ボレル集合の一意化問題とその応用

藤田 博司 (愛媛大学)

ロジック・ウィンタースクール 2026
(最終組版日時: 2026 年 3 月 12 日, 17:13)

はじめに

2026 年 3 月 13 日から 17 日にかけて, 岩手県北上市にて, 第 4 回となるロジック・ウィンタースクール 2026 が開催される. この会合での講義の依頼が主催の新屋良磨さん (秋田大学) から来た. 本稿はこの講義の準備のためのものである.

この講義では, 古典記述集合論の精華というべき ルジン-ノヴィコフの定理 (とアルゼニン-功力の定理, と思ったけど, どうにも準備が追いつかない) を, 実効記述集合論の観点に立って証明し, その応用を述べる. また, 関連する話題にもなるべく触れたい. 実際の講義には時間の都合で取り入れられない内容, たとえば ノヴィコフ-近藤-アディソンの一意化定理なども, このノートにはできるだけ書いておくことにしよう.

準備期間が短いこともあり, 第 1 回ロジック・ウィンタースクール (2023 年 2 月) のために用意した資料 [7] や, 昨年 6 月に東北大学で集中講義を行なったさいの資料 [8] の内容を, たびたび流用する.

このようにマゼンタ色で書いてあるのは筆者の自己ツッコミや御託である. このように青色で書いてあるのは補足事項である. マゼンタ色や青色の部分には, 予備知識に糸目をつけず喋っているところがあるので, そのつもりで.

◆ 有限列についての操作 一般に集合 Z の要素の有限列全体のなす集合を Seq_Z と書くことにする. 有限列 s の長さ (**l**engt**h**) を $\mathsf{lh}(s)$ と書き, s を自然数の有限集合 $\{0, 1, \dots, \mathsf{lh}(s)-1\}$ を定義域とする関数と同一視する. 有限列 s と t に対し, $s * t$ とは s の後ろに t を連結してできる長さ $\mathsf{lh}(s)+\mathsf{lh}(t)$ の有限列を表す. たとえば $(a,b,c) * (d,e)$ とは (a,b,c,d,e) のことである. 長さゼロの空な列 $\emptyset$ も考える. $n \leq \mathsf{lh}(s)$ のとき, s の始切片 $(s(0), s(1), \dots, s(n-1))$ のことを $s \restriction n$ と書く. s が t の始切片であるとき $s \subseteq t$ あるいは $t \supseteq s$ と書く. $s \subsetneq t$ や $t \supsetneq s$ の意味は明らかだろう. 有限列 s と t が $\subseteq$ の意味で比較不能 (incomparable) のときは, ある i について $s(i) \neq t(i)$ となっている. いいかえれば, 比較不能な有限列どうしは共存不能 (incompatible) でもある.

また, 無限列 $f \in {}^{\omega}Z$ に対しても, 始切片 $f \restriction n$ や $s \subseteq f$ や, 連結 $s * f$ の記法を用いる.

◆ **無限列についての操作**　非負整数全体の集合 $\omega = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ について, $\omega \times \omega$ から ω への (計算可能な) 全単射 $\langle\ ,\ \rangle \colon \omega \times \omega \to \omega$ が存在する. たとえば カントールがやったように

$$\langle m, n\rangle = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1) + n$$

とすればよい. 集合 Z の要素の無限列すなわち関数 $f \colon \omega \to Z$ と番号 $m \in \omega$ に対して,

$$(f)_m(n) = f(\langle m, n\rangle)$$

によって, 無限列 $(f)_m \colon \omega \to Z$ を定義する. これによってひとつの無限列 f で可算無限個の無限列 $(f)_0, (f)_1, \ldots, (f)_m, \ldots$ を表現できる.

また, 無限列 $f \colon \omega \to Z$ に対して, f を 1 桁だけシフトした無限列 $f^\star \colon \omega \to Z$ を

$$f^\star(n) = f(n+1)$$

によって定義する.

1　ポーランド空間とボレル集合

1.1　ポーランド空間

定義 1.　完備な距離のつく可分な位相空間のことを**ポーランド空間**という.

たとえばユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ はポーランド空間である. また, 可算な離散位相空間はポーランド空間である. ポーランド空間の閉部分空間もまたポーランド空間になる. 可算個のポーランド空間の直積空間もまたポーランド空間になる. そこで, 可算無限離散空間としての $\omega = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ の可算無限個のコピーの直積空間 (すなわち自然数の無限列全体の集合)

$$\mathcal{N} := {}^\omega\omega = \omega \times \omega \times \omega \times \cdots$$

や, 有限な離散空間としての $2 = \{0, 1\}$ の可算無限個のコピーの直積空間

$$\mathcal{C} := {}^\omega 2 = 2 \times 2 \times 2 \times \cdots$$

はポーランド空間である. $\mathcal{N}$ のことを**ベールの零次元空間**または単に**ベール空間**といい, $\mathcal{C}$ のことを**カントール空間**という.

ベール空間 $\mathcal{N}$ は記述集合論において特に重要な役割をはたす. $\mathcal{N}$ は, 集合 ${}^\omega\omega$ に距離関数

$$d(\alpha, \beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\min\{\, k \in \omega \mid \alpha(k) \neq \beta(k)\,\} + 1}, & (\alpha \neq \beta \text{ のとき}) \\ 0, & (\alpha = \beta \text{ のとき}) \end{cases}$$

で距離づけした完備可分距離空間である．ベール空間 $\mathcal{N}$ は実数直線 $\mathbb{R}$ の中で無理数全体のなす集合 $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ と無限連分数展開を介して同相なので，また無理数空間とも呼ばれる．この理由で各 $\alpha\colon\omega\to\omega$ を無理数と呼んだり実数と呼んだりすることがある．

有限列 $s\in\mathsf{Seq}_\omega$ に対して $\mathcal{N}$ の部分集合 $[s]$ を

$$[s]=\{\,\alpha\in\mathcal{N}\,:\,s\subseteq\alpha\,\}$$

と定義する．$\mathcal{N}$ において $[s]$ は開集合であると同時に閉集合であり，これらの全体 $\{\,[s]\,:\,s\in\mathsf{Seq}_\omega\,\}$ は $\mathcal{N}$ の位相の開基となっている．

一般のポーランド空間 X においても標準的な開基を指定しておきたい．X の完備な距離づけと，可算な稠密部分集合 $Q=\{q_0,q_1,q_2,\ldots\}$ をなにがしか固定して，$N^X_0=\emptyset$ とし，q_i の $1/(j+1)$-近傍を $N^X_{2^i(2j+1)}$ としよう．このとき $\{\,N^X_k:k=0,1,2,\ldots\,\}$ は X の開基になってくれる．

定義 2. 位相空間 X の部分集合 $A\subseteq X$ が $\mathbf{G}_\delta$ **集合**であるとは，A が可算個の開集合の共通部分で表されることをいう．また，A が可算個の閉集合の和集合で表されるとき，A を $\mathbf{F}_\sigma$ **集合**という．◰

距離空間においては，閉集合は G_δ 集合であり，開集合は F_σ 集合である．また，開集合が G_δ 集合で閉集合が F_σ 集合であることを明らかである．このことから，距離空間において，開集合と閉集合から有限的なブール演算によって構成できる集合は，いずれも G_δ 集合かつ F_σ 集合である．G_δ 集合と F_σ 集合は，あとで定義するボレル集合の例になっている．

補題 3. ポーランド空間の G_δ 部分集合は部分空間としてポーランド空間となる．またポーランド空間の部分集合が位相を変えずにポーランド空間となるなら，その部分集合は G_δ である．

[**証明**] $d(\ ,\ )$ を X の位相を定める完備な距離関数だとする．X の開集合の可算な族 G_n $(n\in\omega)$ が与えられたとする．どの G_n も X 自身と一致しないと仮定しても一般性は損なわれない．各 G_n 上で

$$f_n(x)=\frac{1}{\inf\{\,d(x,y):y\in X\setminus G_n\,\}}$$

と定めよう．G_n は開集合だから，f_n は G_n 上で定義された実数値連続関数となっている．共通部分 $A=\bigcap_{n\in\omega}G_n$ 上で

$$d'(x_1,x_2)=d(x_1,x_2)+\sum_{n\in\omega}2^{-n}\frac{|f_n(x_1)-f_n(x_2)|}{1+|f_n(x_1)-f_n(x_2)|}$$

と定義すると，$d'(\ ,\ )$ は A 上の距離関数であり，各 f_n が A 上で連続であることから，$d'(\ ,\ )$ の定める位相は X からの相対位相と一致する．また A の点の列 $x_0,x_1,\ldots,x_i,\ldots$ が $d'(\ ,\ )$ の意味でのコーシー列であったとき，これは $d(\ ,\ )$ の意味でのコーシー列でもあるから X のある点に収束する．その極限値を x^* としよう．各 $n\in\omega$ について数列 $f_n(x_0),f_n(x_1),\ldots,f_n(x_i),\ldots$ は実数のコーシー列である．よってある正の実数 M_n について $f_n(x_i)\le M_n$ となる．$f_n(x)$ の定義から，このとき

$$\inf\{\,d(x_i,y):y\in X\setminus G_n\}\ge\frac{1}{M_n}$$

であるから, $x^* \in G_n$ がしたがい, $x^* \in A$ が言える. 点列 x_i は距離関数 $d'(\ ,\ )$ の意味で A の点 x^* に収束する. よって $d'(\ ,\ )$ は A の上の完備な距離関数であり A はポーランド空間である.

逆に $A \subseteq X$ に位相を変えずに完備な距離 $d'(\ ,\ )$ がついたとして A が X の G_δ 集合であることを示そう. いま A は X において稠密であると仮定しても一般性は損なわれない. 各 $x \in X$ と正数 δ に対して,

$$O(x,\delta) = \sup\bigl\{\, d'(y,z) : y,z \in U^X(x,\delta) \,\bigr\}$$

としよう. ここで $U^X(x,\delta)$ は X にもともと与えられていた距離関数の意味での x の δ-近傍だとする. さらに,

$$O(x) = \inf\bigl\{\, O(x,\delta) : \delta > 0 \,\bigr\}$$

とおく. 正の数 ε を固定したとき, $O(x) < \varepsilon$ をみたす点 $x \in X$ の全体は開集合になるので,

$$B = \bigl\{\, x \in X : O(x) = 0 \,\bigr\} = \bigcap_{m\in\omega} \bigcup_{n\in\omega} \bigl\{\, x : O(x,2^{-n}) < 2^{-m} \,\bigr\}$$

は X の G_δ 集合である. $d'(\ ,\ )$ が距離関数であることから $A \subseteq B$ であることはすぐにわかる. 逆向きの包含を示すために $x \in B$ だったとしよう. x に収束する A の点列 $x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots$ を考える. 正の数 ε に対して, $O(x) < \varepsilon$ より, ある正数 δ が存在して, $O(x,\delta) < \varepsilon$ となる. 点列 (x_i) は x に収束するので, 十分大きなすべての番号 i,j について $x_i, x_j \in U^X(x,\delta)$ であり, したがって $d'(x_i,x_j) < \varepsilon$ となる. すなわち点列 (x_i) は距離関数 $d'(\ ,\ )$ の意味でコーシー列であり, A のある点に収束する. ところが $d'(\ ,\ )$ の定める位相は X からの相対位相と一致するので, 点列 (x_i) は x 以外の点に収束することはありえない. このことは, $x \in A$ であることを意味する. x は B の任意の点であったから, $B \subseteq A$ であり, $A = B$ であることがわかった. したがって A は G_δ 集合である. ◻

補題 4. ベール空間 $\mathcal{N}$ の G_δ 部分空間は $\mathcal{N}$ の閉部分空間と同相である.

[証明] $A = \bigcap_{n\in\omega} G_n$ で各 G_n は $\mathcal{N}$ の開部分集合だとする. 各 $n \in \omega$ について

$$S_n = \bigl\{\, s \in \mathsf{Seq}_\omega : [s] \subseteq G_n \ \&\ \forall k < \mathsf{lh}(s)\bigl[[s \restriction k] \not\subseteq G_n\bigr] \,\bigr\}$$

とする. 直積空間 $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ の部分集合 C を

$$(\alpha,\beta) \in C \Leftrightarrow \forall n \in \omega\bigl[\alpha \restriction \beta(n) \in S_n\bigr]$$

と定めると, C は閉集合である. 各 $\alpha \in A$ と各 $n \in \omega$ に対して $\alpha \restriction k \in S_n$ をみたす $k \in \omega$ は一意的に定まり, かつ α の十分長い始切片を見れば決まるので, $(\alpha,\beta) \in C$ であるような β は α に対して一意的に定まり, しかも対応 $A \ni \alpha \mapsto (\alpha,\beta) \in C$ は A から C への連続写像になっている. 逆に $(\alpha,\beta) \in C$ のとき $\alpha \in A$ であることは明らかであるから, 写像 $\alpha \mapsto (\alpha,\beta)$ A から C への同相写像になっている. こうして A は $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ の閉部分集合と同相であるが, $\omega \times \omega$ と ω の間に全単射が存在することによって, $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ が $\mathcal{N}$ と同相であることは明らかであるから, 補題の主張がしたがう. ◻

1.2 ボレル集合族

定義 5. ポーランド空間 X の, すべての開集合を含む最小の σ-加法的集合族のことを**ボレル集合族**といい, $\mathcal{B}(X)$ とあらわす. ボレル集合族 $\mathcal{B}(X)$ のメンバーを X の**ボレル集合**という.

ポーランド空間の開集合, 閉集合, G_δ 集合, F_σ 集合などはボレル集合である. ボレル集合族は積分論, 確率論などで大切な役割を果たす.

補題 6. ポーランド空間 X の部分集合族 $\mathcal{A}$ が, (1) すべての開集合を含み, (2) 可算個のメンバーの和集合をとる操作と, (3) 可算個のメンバーの共通部分をとる操作のもとで閉じているなら, $\mathcal{A}$ はすべてのボレル集合を含む.

[**証明**] $\mathcal{A}$ がそのような集合族であったとする. $A \in \mathcal{A}$ かつ $X \setminus A \in \mathcal{A}$ であるような集合 A 全体のなす集合族 $\mathcal{A}'$ を考える. $\mathcal{A}$ にかんする仮定 (1)〜(3) により $\mathcal{A}'$ は σ-加法的集合族である. 開集合は仮定 (1) によりすべて $\mathcal{A}$ に属する. 開集合の補集合である閉集合はポーランド空間においては G_δ 集合であるから, 仮定 (1) と仮定 (3) により, これらもまた $\mathcal{A}$ に属する. よって開集合はすべて集合族 $\mathcal{A}'$ に属する. $\mathcal{A}'$ はすべての開集合を含む σ-加法的集合族なので, $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}'$ となる. ◻

定義 7. ポーランド空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$ について, Y の任意のボレル集合 $B \in \mathcal{B}(Y)$ の逆像 $f^{-1}[B]$ がつねに X のボレル集合になるならば, f は**ボレル可測写像**と呼ばれる.

補題 8. X と Y がポーランド空間で, $f\colon X \to Y$ がボレル可測写像であるとすると, f のグラフ

$$G_f = \{\, (x, y) \in X \times Y : y = f(x) \,\}$$

は直積空間 $X \times Y$ のボレル集合である.

[**証明**]

$$G_f = \bigcap_{k \in \omega} \left((f^{-1}[N_k^Y] \times N_k^Y) \cup \left(f^{-1}[Y \setminus N_k^Y] \times (Y \setminus N_k^Y) \right) \right). \quad ◻$$

補題 8 の逆も成立する. 補題 36 を見よ.

次の 2 つの補題は, 補題 6 を使えば簡単にわかるだろうから, 証明を省略する. いや, 本当をいえば, 補題 10 については Y が可分距離空間であることによってすべての開集合が $\mathcal{G}$ の可算個のメンバーの和集合で書けるという事実を使う必要がある. それを知らなければ, あんまり簡単とは言えない.

補題 9. ポーランド空間のあいだの写像 $f\colon X \to Y$ について, Y の任意の開集合 G の逆像 $f^{-1}[G]$ がつねに X のボレル集合になるならば, f はボレル可測写像である. ◻

補題 10. X と Y をポーランド空間とし $\mathcal{G}$ を Y の開基とする. $f\colon X \to Y$ について, すべての $G \in \mathcal{G}$ の逆像 $f^{-1}[G]$ がつねに X のボレル集合になるならば, f はボレル可測写像である. ◻

次の補題の証明を喋る時間は, たぶんないだろうなあ.

補題 11. X を任意のポーランド空間とするとき, 写像 $f_X\colon \mathcal{N} \to X$ と $i_X\colon X \to \mathcal{N}$ が存在して次をみたす:

(1) f_X は連続な全射である;
(2) i_X はボレル可測な単射である;
(3) $f_X \circ i_X = \mathsf{id}_X$ である;
(4) 値域 $i_X[X]$ は $\mathcal{N}$ の G_δ 部分集合である.

[**証明**] Q を X の稠密部分集合とする. $d(\ ,\ )$ を X 上の完備な距離関数とし, $d(\ ,\ )$ のもとでの X の直径は 1 以下であるものとする.

$x_\emptyset \in Q$ を任意に固定する. $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ に対し $x_s \in Q$ が定まったとして, x_s の $3 \cdot 2^{-\mathsf{lh}(s)+1}$-近傍に属する Q の要素をすべて数え上げて $x_{s*(0)}, x_{s*(1)}, \ldots, x_{s*(i)}, \ldots$ とする. 数え上げは 1 対 1 でなくてもよい. これによって, Seq_ω で添字づけされた Q の要素の系列 $\{\, x_s : s \in \mathsf{Seq}_\omega \,\}$ ができる.

各 $\alpha \in \mathcal{N}$ に対して, 点列 $(x_{\alpha\restriction n})_{n\in\omega}$ は距離関数 $d(\ ,\ )$ に関してコーシー列になっている (←確かめよ). そこで極限値 $x_\alpha = \lim_{n\to\infty} x_{\alpha\restriction n}$ が存在する. このとき対応 $f_X\colon \alpha \mapsto x_\alpha$ は $\mathcal{N}$ から X への連続写像になっている (←確かめよ).

連続写像 f_X は全射である. これを見るために $x \in X$ を任意の点とする. $r_0 = x_\emptyset$ とする. 集合 Q の稠密性から, $d(x, r_1) < 2^{-1}$ となる $r_1 \in Q$ が存在する. X の直径が 1 以下であることから, Q の要素はすべて $x_{(i)}$ $(i \in \omega)$ として数え上げられている. そこで, $r_1 = x_{(i_0)}$ をみたす $i_0 \in \omega$ が取れる. 次に $d(x, r_2) < 2^{-2}$ となる $r_2 \in Q$ が存在するが,

$$d(r_1, r_2) \le d(x, r_1) + d(x, r_2) < 2^{-1} + 2^{-2} = 3 \cdot 2^{-2}$$

なので, ある $i_1 \in \omega$ について $r_2 = x_{(i_0,i_1)}$ となっている. 以下同様にして $i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}$ まで決まったとして, $d(x, r_{n+1}) < 2^{-(n+1)}$ をみたす $r_{n+1} \in Q$ をとると,

$$d(x_{(i_0,i_1,\ldots,i_{n-1})}, r_{n+1}) = d(r_n, r_{n+1}) < 3 \cdot 2^{-(n+1)}$$

となるので, ある $i_n \in \omega$ について $r_{n+1} = x_{(i_0,i_1,\ldots,i_{n-1},i_n)}$ となっている. このように順に i_n $(n \in \omega)$ を決めたとして, $\alpha \in \mathcal{N}$ を $\alpha(n) = i_n$ によって定めると, $x_{\alpha\restriction n} = x_{(i_0,i_1,\ldots,i_{n-1})} = r_n$ なので, 点列 $(x_{\alpha\restriction n})_{n\in\omega}$ は x に収束する. よって $f_X(\alpha) = x_\alpha = x$ である.

さて, 以上の考察で点 $x \in X$ に対してとった $\alpha \in \mathcal{N}$ は, $d(x, x_{\alpha\restriction(n+1)}) < 2^{-n}$ となっていれば何でもよかった. とくに, $\alpha(n)$ が条件をみたす最小数になるようにとってみよう:

$$\alpha(n) = \min\bigl\{\, i \in \omega : d(x, x_{(\alpha\restriction n)*(i)}) < 2^{-n} \,\bigr\}.$$

この要領で $x \in X$ に対して定まる $\alpha \in \mathcal{N}$ を $i_X(x)$ と書くことにして, 写像 $i_X\colon X \to \mathcal{N}$ を定義したとする. すると, $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ かつ $\mathsf{lh}(s) = n+1$ のとき

$$i_X(x) \restriction (n+1) = s \Leftrightarrow (\forall k \le n)\bigl[\, d(x, x_{s\restriction(k+1)}) < 2^{-k} \ \&\ (\forall j < s(k))[d(x, x_{(s\restriction k)*(j)}) \ge 2^{-k}] \,\bigr]$$

であるから, 逆像 $i_X^{-1}\big[[s]\big]$ は X の F_σ 集合 (かつ G_δ 集合) とわかる. そこで $\mathcal{N}$ の開集合の i_X による逆像がすべて X の F_σ 集合になるので, i_X はボレル可測写像である.

作り方から $f_X(i_X(x)) = x$ なので $f_X \circ i_X = \mathsf{id}_X$ となる. とくに i_X は単射であって, その値域については

$$\alpha \in i_X[X] \Leftrightarrow \alpha = i_X(f_X(\alpha)) \Leftrightarrow (\forall s \in \mathsf{Seq}_\omega)\big[\, i_X(f_X(\alpha)) \notin [s] \vee \alpha \in [s]\,\big]$$

であるから, $\mathcal{N}$ の G_δ 部分集合である. ◻

定理 12. ポーランド空間 X のボレル部分集合 $B \subseteq X$ に対して, ポーランド空間 E と連続単射 $f\colon E \to X$ が存在して $B = f[E]$ となる. とくに E としてベール空間 $\mathcal{N}$ の閉部分空間をとれる.

[証明] 定理を示すために, $\mathcal{N}$ の閉部分空間からの連続単射の像になりうる X の部分集合全体のなす集合族を $\mathcal{A}$ として, (1) すべての G_δ 集合が $\mathcal{A}$ に属すること, (2) 可算個のメンバーの共通部分をとる操作で $\mathcal{A}$ が閉じていること, (3) 可算個のメンバーの和集合をとる操作で $\mathcal{A}$ が閉じていること, 以上を示す. そうすれば $\mathcal{A}$ が X のボレル集合族を含むことがわかる.

(1) まず B が X の G_δ 集合であれば, 補題 3 により B は部分空間としてポーランド空間である. 補題 11 により, 連続な全射 $f_B\colon \mathcal{N} \to B$ と単射 $i_B\colon B \to \mathcal{N}$ があって, 値域 $i_B[B]$ は $\mathcal{N}$ の G_δ 集合であり, $f_B \circ i_B = \mathsf{id}_B$ である. 補題 4 によれば, $i_B[B]$ は $\mathcal{N}$ の閉部分集合と同相であるから, $\mathcal{N}$ の閉部分集合 E と同相写像 $h\colon E \to i_B[B]$ がとれる. このとき, $f = f_B \circ h$ が求める連続全単射になっている.

(2) X の部分集合 $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ と, $\mathcal{N}$ の閉集合 $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ と, 連続な全単射 $f_n\colon E_n \to B_n$ が与えられたとして, $B = \bigcap_{n\in\omega} B_n$ とする. $\mathcal{N}$ の部分集合 E を

$$\alpha \in E \Leftrightarrow (\forall n \in \omega)\big[\, (\alpha)_n \in E_n \;\&\; f_n((\alpha)_n) = f_0((\alpha)_0)\,\big]$$

によって定めると, E は $\mathcal{N}$ の閉集合であり, 対応 $f\colon \alpha \mapsto f_0((\alpha)_0)$ は E から B への連続全単射になっている.

(3) X の部分集合 $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ と, $\mathcal{N}$ の閉集合 $E_0, E_1, \ldots, E_n, \ldots$ と, 連続な全単射 $f_n\colon E_n \to B_n$ が与えられたとして, $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$ とする. $\mathcal{N}$ の部分集合 E' を

$$E' = \big\{\, \alpha \in \mathcal{N} : \alpha^\star \in E_{\alpha(0)} \;\&\; (\forall n < \alpha(0))\big[f_n(\alpha^\star) \neq f_{\alpha(0)}(\alpha^\star)\big]\,\big\}$$

によって定めよう. E' は $\mathcal{N}$ の G_δ 集合かつ F_σ 集合である. 補題 4 により, E' と同相な $\mathcal{N}$ の閉集合 E が存在する. $h\colon E \to E'$ を同相写像として, $\alpha \in E$ に対して $f(\alpha) = f_{h(\alpha)(0)}(h(\alpha)^\star)$ と定めれば $f\colon E \to B$ が連続全単射になる. ◻

定理 12 の逆も成立する. より一般に, ボレル可測単射によるボレル集合の像はまたボレル集合になる (定理 34 を見よ). このことの証明には, 次に述べる解析集合の理論が用いられる.

2　解析集合と補解析集合

$\mathcal{A}$-演算との関連で木による表示を導入し, 有界性補題と分離定理の証明にもっていく.

2.1　ススリン系と解析集合

自然数の有限列全体 Seq_ω で添字づけられた集合族のことを一般に**ススリン系**という. $(E_s : s \in \mathsf{Seq}_\omega)$ をススリン系とするとき, 集合

$$\bigcup_{\alpha\in\mathcal{N}} \bigcap_{n\in\omega} E_{\alpha\restriction n}$$

をこのススリン系の**核**という.

補題 13.　ポーランド空間 X の部分集合 A について次の (1)〜(3) は同値である.

(1) A は $X \times \mathcal{N}$ の閉集合の射影である,
(2) A は X 閉集合のススリン系の核である,
(3) A は連続写像 $f\colon \mathcal{N} \to X$ の値域である.

[**証明**]　(概略のみ) ←わざわざ断らなくても, この原稿の証明はどのみち全部概略のみだよ.
(1) → (2): C を $X \times \mathcal{N}$ の閉集合とするとき, $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ に対して

$$A_s = \mathsf{proj}_X\big[(X \times [s]) \cap C\big], \quad F_s = \overline{A_s}$$

とおいて, 閉集合のススリン系 $(F_s : s \in \mathsf{Seq}_\omega)$ を作ると, その核は $\mathsf{proj}_X[C]$ に一致する.
(2) → (1): 閉集合のススリン系 $(F_s : s \in \mathsf{Seq}_\omega)$ が与えられたとして,

$$C = \big\{\, (x,\alpha) : (\forall n)[x \in F_{\alpha\restriction n}] \,\big\}$$

によって $C \subseteq X \times \mathcal{N}$ を定めると C は閉集合であり $\mathsf{proj}_X[C]$ はススリン系 $(F_s : s \in \mathsf{Seq}_\omega)$ の核に一致する.
(3) → (1): $f\colon \mathcal{N} \to X$ を連続写像とするとき,

$$C = \big\{\, (x,\alpha) : x = f(\alpha) \,\big\}$$

によって $C \subseteq X \times \mathcal{N}$ を定めると C は閉集合であり $\mathsf{proj}_X[C]$ は像 $f[\mathcal{N}]$ に一致する.
(1) → (3): $C \subseteq X \times \mathcal{N}$ を閉集合とすれば, C は $X \times \mathcal{N}$ からの相対位相でポーランド空間となるから, 補題 11 により, 連続な全射 $f_C\colon \mathcal{N} \to C$ が存在する. そこで $f = \mathsf{proj}_X \circ f_C$ とすれば $f\colon \mathcal{N} \to X$ は連続写像であり, その像 $f[N]$ は $\mathsf{proj}_X[C]$ に一致する. ◻

上記の (1) → (3) の証明と定理 12 を組み合わせると, 条項 (1) を, 任意のポーランド空間 Y との直積 $X \times Y$ のボレル集合の射影に拡張できることがわかる. 同様の理由により, 条項 (3) は任意の

ポーランド空間の連続像，あるいは任意のポーランド空間の任意のボレル集合の連続像にまで拡張できる．

定義 14. ポーランド空間 X の部分集合 A が補題 13 の条項 (1)〜(3) をみたすとき，A を X の**解析集合**という．X の解析集合の全体を $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ とあらわす．◻

上の定義の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ が太字体のシグマを使っているのは定義される言葉の強調のためではない．本当に解析集合の全体を太字体の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ と書くのが慣習になっている．

補題 15. ポーランド空間のボレル集合は解析集合である．

[**証明**] 定理 12 による．◻

補題 16. ポーランド空間 X の解析集合の全体 $\mathbf{\Sigma}^1_1(X)$ は可算和と可算共通部分のもとで閉じている．

[**証明**] $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ を X の解析集合として，連続関数 $f_n\colon \mathcal{N} \to X$ を $A_n = f_n[\mathcal{N}]$ となるようにとったとする．$f\colon \mathcal{N} \to X$ を $f(\alpha) = f_{\alpha(0)}(\alpha^\star)$ と定めると連続写像で，その値域 $f[\mathcal{N}]$ は $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ である．つぎに集合 $E \subseteq \mathcal{N}$ を

$$E = \bigl\{\, \alpha \in \mathcal{N} : (\forall m)(\forall n)[\, f_m((\alpha)_m) = f_n((\alpha)_n)\,]\,\bigr\}$$

と定めれば E は $\mathcal{N}$ の閉部分集合で，$f\colon E \to X$ を $\alpha \mapsto f_0((\alpha)_0)$ によって定めると連続写像で，その像 $f[E]$ は $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ である．◻

補題 17. 直積ポーランド空間 $X \times Y$ の解析集合の X への射影はまた解析集合である．

[**証明**] ベール空間 $\mathcal{N}$ の連続像になるから．◻

補題 18. X と Y をポーランド空間，$f\colon X \to Y$ をボレル可測写像とする．$A \subseteq Y$ が解析集合なら，逆像 $f^{-1}[A]$ は X の解析集合である．

[**証明**] f のグラフ G_f は $X \times Y$ のボレル集合で，$X \times A$ は $X \times Y$ の解析集合である．そして $f^{-1}[A] = \mathsf{proj}_X[(X \times A) \cap G_f]$ である．◻

ところが，解析集合の全体は補集合をとる操作のもとでは閉じていない．これについてはサブセクション 2.4 を見よ．

定義 19. ポーランド空間 X の部分集合 C の補集合 $X \setminus C$ が解析集合であるとき，C を X の**補解析集合**という．X の補解析集合の全体を $\mathbf{\Pi}^1_1(X)$ であらわす．◻

補題 15, 補題 16, 補題 18 を用いて容易に確かめられるように，すべてのボレル集合は補解析集合であり，$\mathbf{\Pi}^1_1(X)$ は可算和と可算共通部分のもとで閉じており，またボレル可測写像のもとでの補解析集合の逆像はまた補解析集合である．しかしながら，補解析集合の射影は必ずしも補解析集合にならない．本稿ではこれ以上は立ち入らないが，このあたりの考察から，いわゆる射影集合の理論が始まる．

2.2 木と可算順序数

ロジックのウィンタースクールなので, 順序数についてのある程度の知識は仮定させてもらう.

定義 20. Z を集合とする. Seq_Z の部分集合 T が始切片をとる操作のもとで閉じているなら, T を Z 上の**木** (tree) という. 無限列 $f\colon \omega \to Z$ のすべての切片が木 T に属するとき, f を T の**無限経路** (infinite path) という. 無限経路をひとつももたない木のことを**整礎木** (wellfounded tree) という. ◻

集合 Z 上の整礎木 T において $s \prec_T t \Leftrightarrow t \subsetneq s$ と二項関係 $\prec_T$ を定めると $(T, \prec_T)$ は整礎的な半順序集合となる. そこで, $\prec_T$ に関する再帰によって, 各 $t \in T$ に対して順序数 $|t|_T$ を

$$|t|_T = \sup\{\, |s|_T + 1 : s \prec_T t \,\}$$

と定めよう. そのうえで, T のルートである空な列 $\emptyset$ に対応する順序数 $|\emptyset|_T$ を $\|T\|$ と書いて整礎木 T の**ランク**ということにする. 無限集合 Z 上の整礎木 T のランク $\|T\|$ は基数 $|Z|^+$ 未満の順序数である. 逆に $|Z|^+$ 未満の順序数はすべて Z 上のある整礎木のランクとして得られる. とくに, 可算順序数はすべて ω 上の整礎木のランクとして得られる. なお, 空集合 $\emptyset$ も定義上は木であり, とくに整礎木である. 上記の定義では空な木のランクは定めようがない. 便宜上, 以下では $\|\emptyset\| = -1$ と約束する. とはいえ -1 が順序数だと言っているわけではない.

集合 Z 上の木 T から順序数への写像 $\varphi\colon T \to \mathsf{Ord}$ があって, 条件

$$s \subsetneq t \in T \Rightarrow \varphi(s) > \varphi(t)$$

をみたすとしよう. もしも T の無限経路 $f \in {}^{\omega}Z$ が存在すれば,

$$\varphi(f \restriction 0) > \varphi(f \restriction 1) > \cdots > \varphi(f \restriction n) > \cdots$$

と順序数の無限降下列ができてしまう. これは不合理なので, T は整礎木である. このとき $(T, \prec_T)$ における超限帰納法によって

$$(\forall s \in T)\big[\, |s|_T \leq \varphi(s) \,\big]$$

となっていることがわかる. すなわち, 対応 $s \mapsto |s|_T$ は $(T, \prec_T)$ から Ord への狭義単調写像のうちで最小のものである.

以下では ω 上の木全体のなす集合を TR と書く. 集合 TR は冪集合 $\mathcal{P}(\mathsf{Seq}_\omega)$ の部分集合である. $\mathcal{P}(\mathsf{Seq}_\omega)$ には, 各 $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ に対する

$$(s)_+ = \{\, x \subseteq \mathsf{Seq}_\omega : s \in x \,\} \text{ と } (s)_- = \{\, x \subseteq \mathsf{Seq}_\omega : s \notin x \,\}$$

によって生成される位相を与える. このとき $\mathcal{P}(\mathsf{Seq}_\omega)$ はカントール空間 $\mathcal{C}$ と同相なコンパクトなポーランド空間となり, TR はその閉部分空間として, これもコンパクトなポーランド空間となる.

以下では $(s)_{\pm} \cap \mathsf{TR}$ のことを $(s)^{\mathsf{TR}}_{\pm}$ と書こう．空間 TR においては $(s)^{\mathsf{TR}}_{\pm}$ は開かつ閉集合になっている．空でない木は必ず空な列 $\emptyset$ を要素にもつから, $(\emptyset)^{\mathsf{TR}}_{-}$ は空な木のみからなる集合である．したがって, 空間 TR は空な木 $\emptyset$ をただ一つの孤立点にもつ.

定義 21. ω 上の整礎木全体のなす TR の部分集合を WF と書く．◰

補題 22. WF は TR の補解析集合である.

[**証明**]

$$\mathsf{TR} \setminus \mathsf{WF} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} (\alpha \restriction n)^{\mathsf{TR}}_{+}. \quad ◰$$

以下に説明するとおり, WF は補解析集合のうちで典型的なものである.

ポーランド空間 X に解析集合 A が与えられたとする．このとき X の閉集合のススリン系 $(F_s : s \in \mathsf{Seq}_\omega)$ が存在して A がその核となる．ここで F_s の代わりに $\bigcap_{k \le \mathsf{lh}(s)} F_{s \restriction k}$ を用いれば, 同じ核をもつ閉集合のススリン系が得られるから, ススリン系 (F_s) について $s \subseteq t$ のとき $F_s \supseteq F_t$ という単調性を仮定しても一般性は損なわれない．そのうえで, 各点 $x \in X$ に対して

$$T_x = \{\, s \in \mathsf{Seq}_\omega : x \in F_s \,\}$$

とすれば, T_x は ω 上の木であり, この作り方から

$$x \in A \Leftrightarrow T_x \notin \mathsf{WF}$$

となることがわかる.

ここで, 対応 $\boldsymbol{t}$: $x \mapsto T_x$ は X から TR へのボレル可測写像である．というのも,

$$T_x \in (s)^{\mathsf{TR}}_{+} \Leftrightarrow s \in T_x \Leftrightarrow x \in F_s$$

であるから, 逆像 $\boldsymbol{t}^{-1}[(s)^{\mathsf{TR}}_{+}] = F_s$ は X の閉集合であり, $\boldsymbol{t}^{-1}[(s)^{\mathsf{TR}}_{-}]$ は X の開集合である．よって, 一般に TR の開集合の $\boldsymbol{t}$ による逆像は X の F_σ 集合である．対応 $\boldsymbol{t}$ による開集合の逆像がすべて X のボレル集合なので, $\boldsymbol{t}$ はボレル可測写像である.

つまり, 解析集合 A はボレル可測写像による集合 $\mathsf{TR} \setminus \mathsf{WF}$ の逆像になっている．いっぽう, X から TR へのボレル可測写像による $\mathsf{TR} \setminus \mathsf{WF}$ の逆像は補題 18 と補題 22 により, かならず X の解析集合になる．まとめれば,

補題 23. ポーランド空間 X の部分集合 A が解析集合であるための必要十分条件は, A がボレル可測写像による $\mathsf{TR} \setminus \mathsf{WF}$ の逆像になることである．A が補解析集合であるための必要十分条件は, A がボレル可測写像による WF の逆像になることである．◰

さて, 解析集合でない補解析集合は存在する (→命題 40)．そのようなものもボレル可測写像のもとでの WF の逆像になるわけだから,

補題 24. WF は TR の解析集合ではない．◰

真の補解析集合 (解析集合でない補解析集合) の例は他にもいろいろある．たとえば，有理数の冪集合 $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ をカントール空間と同一視したとき，有理数の通常の順序で整列集合になっているような $\mathbb{Q}$ の部分集合全体は真の補解析集合である．閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数の全体 $C[a,b]$ を一様ノルムで距離づけして得られるポーランド空間において，至るところ微分可能な関数の全体，至るところ微分不可能な関数の全体は，いずれも真の補解析集合である． 実数のコンパクト集合全体 $\mathcal{K}(\mathbb{R})$ にハウスドルフ距離を与えて距離空間とみなしたポーランド空間において，可算なコンパクト集合の全体は真の補解析集合である．などなど．

さてさて，ω 上の木 $T \in \mathsf{TR}$ と有限列 $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ に対して，

$$T/s = \{\, t \in \mathsf{Seq}_\omega : s * t \in T \,\}$$

と定義しよう． T/s も ω 上の木である． 木のランクに関する超限帰納法によって，次のことがわかる:

補題 25. T が ω 上の整礎木で $s \in T$ のとき，$|s|_T = \|T/s\|$ である．◰

このことと，空な木のランクを -1 と約束していることから，$s \notin T$ のときの $|s|_T$ も -1 と約束するのがよいとわかる．いっぽう，整礎でない木のランクを便宜上 ∞ とし，これはいかなる順序数よりも大きいものとする．

定義 26. TR 上の二項関係 $<^*_{\mathsf{WF}}$ と $\leqslant^*_{\mathsf{WF}}$ を，

$$T <^*_{\mathsf{WF}} S \Leftrightarrow T \in \mathsf{WF} \;\&\; \big[\, S \notin \mathsf{WF} \vee \|T\| < \|S\| \,\big],$$
$$T \leqslant^*_{\mathsf{WF}} S \Leftrightarrow T \in \mathsf{WF} \;\&\; \big[\, S \notin \mathsf{WF} \vee \|T\| \leq \|S\| \,\big]$$

によって定義する．◰

補題 27. 二項関係 $<^*_{\mathsf{WF}}$ と $\leqslant^*_{\mathsf{WF}}$ は $\mathsf{TR} \times \mathsf{TR}$ の部分集合とみて補解析集合である．

[証明] (概略のみ)　木 S から木 T への写像 $\varphi\colon S \to T$ で，$t \subsetneq u \in S$ のとき必ず $\varphi(t) \subsetneq \varphi(u)$ をみたすものを，順序保存写像といい，$\varphi\colon S \overset{\text{o.p.}}{\to} T$ と書くことにする． すると，$T <^*_{\mathsf{WF}} S$ であるのは，$T \in \mathsf{WF}$ であって，しかし $\varphi\colon S \overset{\text{o.p.}}{\to} T$ が存在しないときである．また，$T \leqslant^*_{\mathsf{WF}} S$ であるのは，$T \in \mathsf{WF}$ であって，しかし，$s_0 \in T$ かつ $s_0 \neq \emptyset$ であるどのような s_0 についても $\varphi\colon S \overset{\text{o.p.}}{\to} T/s_0$ が存在しないときである．いま冪集合 $\mathcal{P}(\mathsf{Seq}_\omega \times \mathsf{Seq}_\omega)$ をカントール空間と同一視し，木から木への写像を $\mathsf{Seq}_\omega \times \mathsf{Seq}_\omega$ の部分集合とみなすと，三項関係 $\varphi\colon S \overset{\text{o.p.}}{\to} T$ は直積空間 $\mathcal{P}(\mathsf{Seq}_\omega \times \mathsf{Seq}_\omega) \times \mathsf{TR} \times \mathsf{TR}$ の G_δ 部分集合になる．以上の考察により $<^*_{\mathsf{WF}}$ と $\leqslant^*_{\mathsf{WF}}$ はそれぞれその補集合が $\mathsf{TR} \times \mathsf{TR}$ の解析集合になることがわかる．◰

定義 28. 各可算順序数 ξ に対して

$$\mathsf{WF}_\xi = \big\{\, T \in \mathsf{WF} : \|T\| < \xi \,\big\}$$

と定義する．◰

補題 29. (有界性補題)　$A \subseteq \mathsf{WF}$ かつ A が TR の解析集合のとき, ある可算順序数 ξ について $A \subseteq \mathsf{WF}_\xi$ となる．

[**証明**] 結論を否定すると, どんな可算順序数 ξ に対してもある $S \in A$ が存在して $\xi \leq \|S\|$ となる．したがって任意の $T \in \mathsf{WF}$ に対して ある $S \in A$ が存在して $\|T\| \leq \|S\|$ となる．いま,

$$(T, S) \in C \Leftrightarrow S \in A \mathbin{\&} \neg(S <^*_{\mathsf{WF}} T)$$

と定めれば C は $\mathsf{TR} \times \mathsf{TR}$ の解析集合であり, WF がその射影となる．このことは WF が解析集合になることを意味するが, 補題 24 から, それはありえない．◰

補題 30. 各可算順序数 ξ に対して, 集合 WF_ξ は TR のボレル集合である．◰

[**証明**] 順序数 ξ に関する超限帰納法による．まず $\xi = 0$ のとき, WF_0 は空な木のみからなる集合なので TR の開かつ閉集合である．次に $\xi = \eta + 1$ のとき,

$$\mathsf{WF}_{\eta+1} = \big\{\, T \in \mathsf{TR} : (\forall s \in \mathsf{Seq}_\omega)\big[\, s \neq \emptyset \Rightarrow (s \notin T \vee T/s \in \mathsf{WF}_\eta)\,\big]\,\big\}$$

であり, 各 $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ に対して $T \mapsto T/s$ は TR 上の連続写像である．$\mathsf{WF}_{\eta+1}$ は可算個の連続写像による WF_η の逆像の共通部分である．よって WF_η がボレル集合なら $\mathsf{WF}_{\eta+1}$ もボレル集合である．次に ξ が極限順序数のときは

$$\mathsf{WF}_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} \mathsf{WF}_\eta$$

であるから, すべての $\eta < \xi$ について WF_η がボレル集合なら, それらの可算和 WF_ξ もボレル集合である．◰

2.3　ルジンの分離定理とその帰結

定理 31. (ルジンの分離定理)　ポーランド空間 X に互いに交わりのない 2 つの 解析集合 A_0 と A_1 があるとき, ボレル集合 B を $A_0 \subseteq B$ かつ $B \cap A_1 = \emptyset$ となるようにとれる．

[**証明**] ボレル可測写像 $f\colon X \to \mathsf{TR}$ を $x \in A_1 \Leftrightarrow f(x) \notin \mathsf{WF}$ となるようにとる．すると, $A_0 \cap A_1 = \emptyset$ であることから, 像 $f[A_0]$ は WF に含まれ, かつ, TR の解析集合である．よって有界性補題 29 により, ある可算順序数 ξ について $f[A_0] \subseteq \mathsf{WF}_\xi$ となる．補題 30 により WF_ξ はボレル集合であるから, その逆像 $B = f^{-1}[\mathsf{WF}_\xi]$ は X のボレル集合であり, $A_0 \subseteq B$ かつ $B \cap A_1 = \emptyset$ をみたす．◰

定理 32. (ススリンの定理)　ポーランド空間 X の部分集合 $A \subseteq X$ がボレル集合であるための必要十分条件は, A と補集合 $X \setminus A$ がともに解析集合であることである．

[**証明**] $A_0 = A$, $A_1 = X \setminus A$ としてルジンの分離定理 31 を用いればよい. ◻

補題 33. ポーランド空間 X に互いに交わりのない可算個の解析集合 $A_0, A_1, \dots, A_n, \dots$ があるとき, 互いに交わりのないボレル集合 $B_0, B_1, \dots, B_n, \dots$ を $A_n \subseteq B_n$ となるようにとれる.

[**証明**] 定理 31 によってボレル集合 B'_n を $A_0 \cup \dots \cup A_n \subseteq B'_n$ かつ $B'_n \cap \bigcup_{k>n} A_k = \emptyset$ となるようにとり, $B_0 = B'_0$, $B_{n+1} = B'_{n+1} \setminus B'_n$ とすればよい. ◻

定理 34. (ルジンの単射定理) X と Y をポーランド空間, $E \subseteq X$ をボレル集合とする. $f\colon X \to Y$ が連続写像で, 制限写像 $f{\restriction}E$ が単射であるならば, 像 $f[E]$ はボレル集合である.

[**証明**] 定理 12 により, E はベール空間 $\mathcal{N}$ の閉集合の連続単射像であるから, 一般性を損なうことなく, $X = \mathcal{N}$ かつ E は閉集合と仮定できる. $A = f[E]$ とする. 各 $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ に対し $A_s = f\big[[s] \cap E\big]$ とおく. すると,

- $s \subseteq t$ のとき $A_s \supseteq A_t$,
- $i \neq j$ のとき $A_{s*(i)} \cap A_{s*(j)} = \emptyset$,
- $A = A_\emptyset$

となっている. 補題 33 を用いてボレル集合 B_s ($s \in \mathsf{Seq}_\omega$) を

- $A_s \subseteq B_s \subseteq \overline{A_s}$, ただし $\overline{A_s}$ は A_s の閉包,
- $i \neq j$ のとき $B_{s*(i)} \cap B_{s*(j)} = \emptyset$

となるようにとれる. ここで必要なら B_s の代わりに $\bigcap_{n \leq \mathsf{lh}(s)} B_{s{\restriction}n}$ を用いれば, さらに

- $s \subseteq t$ のとき $B_s \supseteq B_t$

となっているとしても一般性は損なわれない. このとき,

$$A = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} A_{\alpha{\restriction}n} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} B_{\alpha{\restriction}n} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} \overline{A_{\alpha{\restriction}n}}$$

であることはすぐにわかる. 最右辺を A^* と書く. $A = A^*$ であることを示す. 任意の $y \in A^*$ をとる. $\alpha \in \mathcal{N}$ を $y \in \overline{A_{\alpha{\restriction}n}}$ $(n \in \omega)$ となるようにとれる. そこで, 各 n ごとに $y_n \in A_{\alpha{\restriction}n}$ を $\mathrm{dist}(y, y_n) < 2^{-n}$ となるようにとれる. $y_n \in A_{\alpha{\restriction}n} = f[[\alpha \restriction n] \cap E]$ であるから, $\alpha_n \in E$ かつ $y_n = f(\alpha_n)$ かつ $\alpha_n \restriction n = \alpha \restriction n$ となるような α_n がとれる. $n \to \infty$ のとき $y_n \to y$ かつ $\alpha_n \to \alpha$ であるから f の連続性により $f(\alpha) = y$ である. また E は閉集合であるから $\alpha \in E$ である. よって $y \in f[E] = A$ となる. よって $A = A^*$ である. したがって $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} B_{\alpha{\restriction}n} = A$ となる.

さて, $B = \bigcap_{n \in \omega} \bigcup_{s \in {}^n\omega} B_s$ としよう. すると B はボレル集合である. 上に示したことから, $A \subseteq B$ であることは明らかだ. 逆向きの包含を示すために, 任意の $y \in B$ をとる. すると各 $n \in \omega$ ごとに $s_n \in {}^n\omega$ を $y \in B_{s_n}$ となるようにとれる. B_s の選びかたから, s と t が比較不能のとき $B_s \cap B_t = \emptyset$ であるので, s_n は n ごとに一意に定まり, かつ, 互いに比較可能である. すなわち $\emptyset = s_0 \subseteq s_1 \subseteq s_2 \subseteq \cdots$ となっている. そこで $\alpha = \bigcup_{n \in \omega} s_n$ が定まって, $s_n = \alpha \restriction n$ である. このと

き $y \in \bigcap_{n\in\omega} B_{\alpha\restriction n}$ であるから $y \in A$ となる．以上のことから $A = B$ であり，A はボレル集合である．これが証明すべきことだった．◻

命題 35. X と Y がポーランド空間，$f\colon X \to Y$ がボレル可測写像，$B \subseteq X$ がボレル集合で，制限写像 $f\restriction B$ が単射であれば，像 $f[B]$ はボレル集合である．

[**証明**] 直積空間 $X \times Y$ の部分集合 C を

$$C = \{\, (x,y) \in X \times Y : x \in B \;\&\; y = f(x) \,\}$$

と定めよう．C はボレル集合であり，$f[B]$ は C の Y への射影である．仮定から $f\restriction B$ が単射なので $y \in f[B]$ のとき $y = f(x)$ となる $x \in B$ はただ 1 つに定まる．$X \times Y$ から Y への射影写像の C への制限写像は単射であり，また連続写像である．よってルジンの単射定理 34 により，$f[B]$ はボレル集合である．◻

補題 36. X と Y をポーランド空間とする．写像 $f\colon X \to Y$ のグラフが $X \times Y$ のボレル集合であれば，f はボレル可測写像である．

[**証明**] Y の任意のボレル集合 B に対して集合 D を

$$D = \{\, (x,y) \in X \times Y : y = f(x) \;\&\; y \in B \,\}$$

と定める．仮定より f のグラフがボレル集合であるから，D もボレル集合である．$X \times Y$ から X への射影写像の D への制限写像はあきらかに単射であり，また連続写像である．よってルジンの単射定理 34 により，D の X への射影はボレル集合であるが，これが $f^{-1}[B]$ にほかならない．Y の任意のボレル集合の f による逆像が X のボレル集合であるから，f はボレル可測写像である．◻

補題 8 と補題 36 から，ただちに次の定理が得られる．ルベーグは 1905 年の論文でこの定理を主張したが，その証明には誤りがあった．ルジンとススリンはルベーグの誤りを解明する作業を通じて解析集合の概念に到達し，結果的にルベーグの定理を救済することができた．このあたりの話は [3] の Introduction などで読める．

定理 37. (ルベーグの陰関数定理) X と Y をポーランド空間とする．$F\colon X \times Y \to \mathbb{R}$ はボレル可測関数とし，各 $x \in X$ に対してただ一つの $y \in Y$ が $F(x,y) = 0$ をみたすとする．このとき $x \in X$ に $F(x,y) = 0$ の唯一の解 $y \in Y$ を対応させる写像はボレル可測である．◻

定理 38. ポーランド空間 X に可算個のボレル集合 B_0, B_1,..., B_n,...が与えられたとする．このとき X 上に位相 τ^* が存在して次をみたす:

(1) 空間 (X, τ^*) はポーランド空間である;
(2) 位相 τ^* は X の元の位相より細かい;
(3) 各 B_n は位相 τ^* のもとでは開かつ閉集合である;

(4) 位相 τ^* は X の元の位相と同じボレル集合族を生成する.

[**証明**] まず 1 個のボレル部分集合 $B \subseteq X$ を開かつ閉集合にするポーランド位相の存在を示そう. 定理 12 によれば, ポーランド空間 C と D, および連続な単射 $f\colon C \to X$ と $g\colon D \to X$ が存在して, $B = f[C]$ かつ $X \setminus B = g[D]$ となる. 直和 $C \sqcup D$ に C と D からの直和位相を与え, f と g のグラフ G_f と G_g の直和 $E = G_f \sqcup G_g$ に直積空間 $(C \sqcup D) \times X$ からの相対位相を与えよう. すると E は $(C \sqcup D) \times X$ の閉部分集合となるからポーランド空間である. E から X への射影 $p_X\colon (z, x) \mapsto x$ は連続な全単射である. この全単射を介して X を E と同一視し, そうして得られる X 上の位相を τ_E とすると, この位相は X のもとの位相より強く, B と $X \setminus B$ はそれぞれ E の閉集合 $E \cap (C \times X)$ と $E \cap (D \times X)$ と同一視されるからどちらも τ_E の閉集合であり, したがって B は τ_E のもとで開かつ閉集合である. τ_E のもとでのボレル集合を X のもとの位相で見たものは E のボレル部分集合の連続単射像なので, 定理 34 により, X のもとの位相でのボレル集合になっている. 以上により, 1 個のボレル集合を開かつ閉集合にするポーランド位相が得られた.

では次に可算個のボレル集合 B_0, B_1,..., B_n,...が与えられたとして, 各 B_n を開かつ閉集合にするポーランド位相 τ_n を X に与えたとしよう. ポーランド空間 (X, τ_n) を簡単のため E_n と書くことにして,

$$E^* = \left\{ u \in \prod_{n\in\omega} E_n \,:\, u(0) = u(1) = u(2) = \cdots \right\}$$

とおき, E^* に直積空間 $\prod_{n\in\omega} E_n$ からの相対位相を与える. すると, E^* は可算個のポーランド空間の直積の閉部分集合となるので, これもポーランド空間であり, 射影 $u \mapsto u(0)$ は E^* から X への連続全単射である. この連続全単射を介して X を E^* と同一視し, そうして得られる X 上の位相を τ^* とすれば, 各 B_n は τ^* のもとで開かつ閉集合となり, かつ, τ^* は X のもとの位相と同じボレル集合族を生成する. ◰

定理 39. ポーランド空間 X に可算個のボレル集合 $B_0, B_1, \ldots, B_n, \ldots$ があって, X の各点を分離しているとする. すなわち,

$$(\forall x, y \in X)\big[\, x \neq y \Rightarrow (\exists n \in \omega)[\, x \in B_n \Leftrightarrow y \notin B_n \,]\,\big]$$

となっているものとする. このとき, $\{\, B_n : n \in \omega \,\}$ は σ-加法的集合族として, ボレル集合族 $\mathcal{B}(X)$ 全体を生成する.

[**証明**] (概略のみ) X からカントール空間 $\mathcal{C}$ への写像 f を,

$$f(x)(n) = \begin{cases} 1, & (x \in B_n \text{ のとき}) \\ 0, & (x \notin B_n \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定めると, f はボレル可測写像である. また, $\{\, B_n : n \in \omega \,\}$ が X の各点を分離しているという仮定から, f は単射である. したがって, 命題 35 により, X の任意のボレル集合 B について

$f[B]$ は $\mathcal{C}$ のボレル集合である. このことから, X のボレル集合はすべて, $\mathcal{C}$ のボレル集合の f による逆像として得られることがわかる. $\mathcal{C}$ のボレル集合族は

$$C_n = \{\, \alpha \in \mathcal{C} : \alpha(n) = 1 \,\} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

で生成される. $f^{-1}[C_n] = B_n$ であるから, X のボレル集合族は B_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ で生成される. ◻

2.4 普遍集合と対角線論法

各ポーランド空間 X には基本開集合の標準的な数え上げ $(N^X_k : k \in \omega)$ が指定されている. そこで, X の開集合 A はなんらかの $\varepsilon \in \mathcal{N}$ によって

$$A = \bigcup_{n \in \omega} N^X_{\varepsilon(n)}$$

と表示できる. この ε は開集合 A のコードとみなされる. いま $\mathcal{N} \times X$ の部分集合 U^X を

$$U^X = \{\, (\varepsilon, x) : (\exists n \in \omega)[\, x \in N^X_{\varepsilon(n)} \,] \,\}$$

と定義したとすると,

- U^X は $\mathcal{N} \times X$ の開集合であり, かつ
- X の任意の開集合 A について $\varepsilon \in \mathcal{N}$ が存在して, $x \in A \Leftrightarrow (\varepsilon, x) \in U^X$ となる.

したがって, X の開集合の全体は, 集合 U^X の**切り口** (section)

$$U^X_\varepsilon = \{\, x \in X : (\varepsilon, x) \in U^X \,\}$$

の全体に一致することになる. この意味で U^X は X の開集合に対する**普遍集合** (universal set) と呼ばれる.

次に, ポーランド空間 X に対して, まず $X \times \mathcal{N}$ の開集合に対する普遍集合 $U^{X \times \mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N} \times X \times \mathcal{N}$ を作り, さらに

$$V^X = \{\, (\varepsilon, x) \in \mathcal{N} \times X : (\forall \alpha \in \mathcal{N})[\, (\varepsilon, x, \alpha) \in U^{X \times \mathcal{N}} \,] \,\}$$

と定める. すると,

- V^X は $\mathcal{N} \times X$ の補解析集合であり, かつ
- X の任意の補解析集合 P について $\varepsilon \in \mathcal{N}$ が存在して, $x \in P \Leftrightarrow (\varepsilon, x) \in V^X$ となる.

したがって, X の補解析集合の全体は, 集合 V^X の切り口

$$V^X_\varepsilon = \{\, x \in X : (\varepsilon, x) \in V^X \,\}$$

の全体に一致することになる. この意味で V^X は X の補解析集合に対する普遍集合である.

次に $V^{\mathcal{N}} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ を $\mathcal{N}$ の補解析集合に対する普遍集合として,

$$D = \{\, \varepsilon \in \mathcal{N} : (\varepsilon, \varepsilon) \in V^{\mathcal{N}} \,\}$$

としよう. D も $\mathcal{N}$ の補解析集合である. もしも D が $\mathcal{N}$ の解析集合であったとすると, $\mathcal{N} \setminus D$ が $\mathcal{N}$ の補解析集合となり, ある ε_0 について $\mathcal{N} \setminus D = V^{\mathcal{N}}_{\varepsilon_0}$ となるだろう. しかしこのとき,

$$\varepsilon_0 \in V^{\mathcal{N}}_{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \varepsilon_0 \in \mathcal{N} \setminus D \Leftrightarrow \varepsilon_0 \notin D \Leftrightarrow (\varepsilon_0, \varepsilon_0) \notin V^{\mathcal{N}} \Leftrightarrow \varepsilon_0 \notin V^{\mathcal{N}}_{\varepsilon_0}$$

となって矛盾する. よって, D は $\mathcal{N}$ の解析集合ではない. これで次のことが示された.

命題 40. ベール空間 $\mathcal{N}$ の補解析集合であって, 解析集合でないものが存在する. ◰

3 RP 空間と実効記述集合論

以下, ω 上の計算可能部分関数の標準的な数え上げ $(\Phi_e : e \in \omega)$ を固定する. 部分関数 Φ_e の定義域を W_e と書く. $(W_e : e \in \omega)$ は計算可能的枚挙可能集合 (computably enumerable sets) の標準的な数え上げになっている. 非負整数 n が Φ_e の定義域に属することを $\Phi_e(n)\!\downarrow$ と書く. ω の空でない計算可能的枚挙可能集合は, なんらかの計算可能な (全域) 関数 $\varphi\colon \omega \to \omega$ の値域になっている.

3.1 RP 空間

定義 41. 再帰的表示つき空間 (recursively presented space, 以下 RP 空間という) とは, 集合 X と X 上の距離関数 $d(\ ,\ )$ と X の点列 $(q^X_i : i \in \omega)$ からなる三つ組 $(X, d, (q^X_i : i \in \omega))$ であって,

- 距離関数 $d(\ ,\ )$ は完備である;
- 集合 $\{\, q^X_i : i \in \omega \,\}$ は距離空間 (X, d) において稠密である;
- 非負整数 i, j, k, ℓ の 4 項関係

$$d(q^X_i, q^X_j) \leq \frac{k}{\ell+1} \text{ と } d(q^X_i, q^X_j) < \frac{k}{\ell+1}$$

は, いずれも計算可能である

という条件をみたすもののことである.

この定義により, RP 空間はポーランド空間である.

たとえば, 実数直線 $\mathbb{R}$ は有理数全体のしかるべき数え上げによって RP 空間となる. ベール空間 $\mathcal{N}$ やカントール空間 $\mathcal{C}$ は有限列のしかるべき数え上げによって RP 空間となる. そのほか, 数学の実践で出会ういろいろな具体的なポーランド空間は, その具体的な与えられ方に即して RP 空間にできる.

この意味で, 記述集合論の考察の範囲を一般のポーランド空間から RP 空間に制限してしまっても, 実践的な意味では, 多くを失うことはない.

以下では, 可算な離散距離空間としての ω や Seq_ω を RP 空間とみなす議論が重要になってくる.

有限個の RP 空間の直積空間も, 距離関数の適切な定義と稠密集合の適切な数え上げを定義することでまた RP 空間にできる. 可算無限個の RP 空間の直積空間を考えると, 空間の並べ順などの偶然的な要素に依存して, RP 空間にならない場合がありうるが, 同じひとつの RP 空間の可算直積には, 適切な距離と稠密集合の適切な数え上げを与えて RP 空間にできる. このあたり細かい説明は省くのでモショヴァキス [3] のセクション 3B を見てね.

3.2 細字体の点集合族 Σ^0_n と Π^0_n

サブセクション 1.1 での議論の繰り返しになるが, RP 空間 $(X, d, \{q^X_i\}_{i\in\omega})$ において $N^X_0 = \emptyset$ とし, $n = 2^i(2k+1)$ のとき N^X_n は q^X_i の距離関数 d に関する $\dfrac{1}{k+1}$-近傍とする. こうして得られる $\{N^X_n\}_{n\in\omega}$ を RP 空間 $(X, d, \{q^X_i\}_{i\in\omega})$ の標準的な開基とする.

定義 42. RP 空間 X の部分集合 A が Σ^0_1 集合であるとは, 計算可能関数 $\alpha\colon \omega \to \omega$ が存在して $A = \bigcup_{k\in\omega} N^X_{\alpha(k)}$ となっていることをいう. ◰

すなわち, 標準的な開基に属する開近傍の計算可能的可算和であるような開集合が Σ^0_1 集合である. Σ^0_1 集合は開集合であるが, その逆は成立しない. ギリシャ文字が細字体になっていることに注意. モショヴァキス [3] は Σ^0_1 集合のことを semirecursive な集合と呼んでいる.

こうしてすべての RP 空間において Σ^0_1 集合が定義できたとしよう.

定義 43. $n \geq 1$ とする. 各 RP 空間の Σ^0_n 集合が定義されたとして, Σ^0_n 集合の補集合になっている集合のことを Π^0_n 集合という. 各 RP 空間の Π^0_n 集合が定義されたとして, $X \times \omega$ の Π^0_n 集合の X への射影になっている集合のことを Σ^0_{n+1} 集合という. どれかの Σ^0_n あるいは Π^0_n に属する集合のことを**算術的集合** (arithmetical set) という. ◰

無限個の点からなるポーランド空間には不可算個の開集合があったが, どんな RP 空間にも Σ^0_1 集合は可算個しかない. したがって, 算術的集合も可算個しかない.

3.3 再帰的写像

ふたつの RP 空間 X と Y があったとする. X から Y への写像 $f\colon X \to Y$ が**再帰的**であるということを, $x \in X$ と $k \in \omega$ の関係としての

$$f(x) \in N^Y_k$$

が, $X \times \omega$ の Σ^0_1 集合になっていることだと定義する.

定義上, 再帰的写像は連続写像だが, その逆は言えない.

直積 RP 空間 ω^n 上定義されて ω に値をとる関数が再帰的写像であることと計算可能関数であることとは同値である. 再帰的写像というのは計算可能関数の概念を一般の空間への拡張というわけだ.

RP 空間 X が孤立点を持たない場合に, 補題 11 の証明を注意深く行えば, 連続な全射 $f_X : \mathcal{N} \to X$ を再帰的写像としてとれる. このことを確認しよう. 補題 11 の証明において, まず $x_\emptyset$ として Q の任意の要素をとって. この要素が $q^X_{k_0}$ だったとしよう. $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ の長さに関する再帰的定義で部分関数 $g\colon \mathsf{Seq}_\omega \dashrightarrow \omega$ を,

$$\begin{aligned} g(\emptyset) &= k_0, \\ g(s*(0)) &= \min\left\{ k \in \omega : d(q^X_{g(s)}, q^X_k) < 3\cdot 2^{-(\mathsf{lh}(s)+1)} \right\}, \\ g(s*(i+1)) &= \min\left\{ k \in \omega : k > g(s*(i)) \ \&\ d(q^X_{g(s)}, q^X_k) < 3\cdot 2^{-(\mathsf{lh}(s)+1)} \right\} \end{aligned}$$

と定義しよう. すると g は計算可能部分関数であり, $g(s)$ が定義されるような $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ の全体 T_X は ω 上の木であり, しかも Seq_ω の Σ^0_1 部分集合になっている. とくに X に孤立点が存在しない場合は $T_X = \mathsf{Seq}_\omega$ である. $s \in T_X$ のときに $x_s = q^X_{g(s)}$ と定義しよう. T_X の無限経路全体の集合を E_X とすると, E_X は一般に $\mathcal{N}$ の閉集合かつ Π^0_2 集合となっている. X に孤立点が存在しない場合は $E_X = \mathcal{N}$ である. ともあれ, f_X が E_X 上定義された X の上への連続写像であることは補題 11 の証明での議論からわかる.

さて, X が孤立点をもたなければ $g(s)$ はすべての $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ に対して定義できるので $E_X = \mathcal{N}$ である. $f_X(\alpha) \in N^X_k$ は, $k = 0$ なら ($N^X_0 = \emptyset$ なので) 偽であり, $k > 0$ なら $k = 2^i(2j+1)$ となる一意的な i と j について

$$\lim_{n\to\infty} d(x_{\alpha\restriction n}, q^X_i) < \frac{1}{j+1}$$

となることだから,

$$\begin{aligned} f_X(\alpha) \in N^X_k \Leftrightarrow (\exists i,j\in\omega)(\exists r\in\mathbb{Q})(\exists n_0\in\omega)\Big[\\ k = 2^i(2j+1) \ \&\ 3\cdot 2^{-n_0} \le \frac{r}{2} \ \&\ d(q^X_{g(\alpha\restriction n_0)}, q^X_i) < \frac{1}{j+1} - \frac{r}{2} \\ \Big] \end{aligned}$$

と書けて, これは α と k の関係として $\mathcal{N}\times\omega$ の Σ^0_1 集合を定める. よってこのとき f_X は再帰的写像である.

空間 X に孤立点 p があったとすると, ある i_0 で $p = q^X_{i_0}$ となるはずだが, p の $3\cdot 2^{-(\ell+1)}$-近傍の点が p 自身だけという状況が, 十分大きな $\ell \in \omega$ について発生する. 長さ ℓ 以上の列 s で $g(s) = i_0$ となったとしたら, $j = 1, 2, \ldots$ に対する $g(s*(j))$ は定義されないことになる. よってこの場合は g は Seq_ω の真部分集合で定義された部分関数, E_X は $\mathcal{N}$ の真部分集合ということになる.

本稿では RP 空間の直積空間に RP 空間の構造を与える方法を詳述しなかったけれども, それが次の補題が成立する程度にうまくできていることを仮定することにしたい.

補題 44. n 個の RP 空間の直積空間 $X_0 \times X_1 \times \cdots \times X_{n-1}$ からの射影写像 proj_{X_k} $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ は再帰的写像である. n 個の RP 空間の直積空間 $Y_0 \times Y_1 \times \cdots \times Y_{n-1}$ への写像

$f\colon X \to Y_0 \times Y_1 \times \cdots \times Y_{n-1}$ が再帰的写像であることと, 射影写像との合成 $\mathsf{proj}_{X_k} \circ f\colon X \to Y_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ がすべて再帰的写像であることとは同値である. ◻

次の補題は n に関する数学的帰納法で示される.

補題 45. X と Y を RP 空間とする. $f\colon X \to Y$ が再帰的写像で, P が Y の Σ^0_n 集合のとき, 逆像 $f^{-1}[P]$ は X の Σ^0_n 集合である. とくに, ふたつの再帰的写像の合成写像はまた再帰的写像である. ◻

3.4 細字体の点集合族 Σ^1_1 と Π^1_1

補題 46. RP 空間 X の部分集合 A について次の 2 つの条件は同値である:

(1) A は $X \times \mathcal{N}$ の Π^0_1 集合の X への射影である.
(2) ベール空間 $\mathcal{N}$ からの再帰的写像 $\varphi\colon \mathcal{N} \to X$ と $\mathcal{N}$ の Π^0_1 部分集合 E が存在して $A = \varphi[E]$ となる.

[**証明**] (概略のみ)
(1) → (2): A が $X \times \mathcal{N}$ の Π^0_1 集合 C の射影だったとしよう. $X \times \mathcal{N}$ は孤立点のない RP 空間なので, サブセクション 3.3 で述べたように, 再帰的な全射 $f\colon \mathcal{N} \to X \times \mathcal{N}$ が存在する. $E = f^{-1}[C]$ とし, $X \times \mathcal{N}$ から X への射影写像と f との合成写像を φ とすれば, E は Π^0_1 集合, φ は再帰的写像で $A = \varphi[E]$ となる.
(2) → (1): 集合 C を

$$C = \{\, (x, \alpha) : \alpha \in E \;\&\; x = \varphi(\alpha) \,\}$$

と定めよう. φ が再帰的写像なので C は Π^0_1 集合であり, A は C の X への射影となる. ◻

定義 47. RP 空間 X の部分集合 A が補題 46 の同値な条件 (1) と (2) をみたすとき A を X の Σ^1_1 集合という. Σ^1_1 集合の補集合を Π^1_1 集合という. Σ^1_1 集合でありかつ Π^1_1 集合でもある集合を Δ^1_1 集合という. ◻ ここでもギリシャ文字が細字であることに注意.

定義から, Σ^1_1 集合は解析集合であり, Π^1_1 集合は補解析集合である. サブセクション 2.2 で議論した整礎木の集合 WF は TR の Π^1_1 集合である.

さて, X と Y が RP 空間で, $A \subseteq X \times Y$ が Σ^1_1 集合のときその射影 $\mathsf{proj}_X A$ が X の Σ^1_1 集合になることは補題 46 の条件 (2) に注意すればすぐにわかる. とくに $A \subseteq X \times \omega$ が Σ^1_1 集合のとき,

$$B = \{\, x \in X : (\exists n)[(x, n) \in A] \,\}$$

で定まる B は X の Σ^1_1 集合である. 実は

$$B' = \{\, x \in X : (\forall n)[(x, n) \in A] \}$$

で定まる B' も X の Σ^1_1 集合になる. これは次のように考えればよい. $X \times \omega \times \mathcal{N}$ の Π^0_1 集合 C が $A = \mathsf{proj}_{X\times\omega} C$ となるようにとれる. そこで $X \times \mathcal{N}$ の部分集合 D を

$$D = \{\, (x, \alpha) : (\forall n)[(x, (\alpha)_n) \in C] \,\}$$

によって定めると, D は Π^0_1 集合であって, $B' = \mathsf{proj}_X D$ となる. これには可算選択公理が必要だ.

以上の考察を, Σ^1_1 は任意の RP 空間 Y についての $\exists^Y$ と $\exists^\omega$ と $\forall^\omega$ のもとで閉じている, と言いあらわすことができるだろう. 同様の意味で Π^1_1 は任意の RP 空間 Y についての $\forall^Y$ と $\exists^\omega$ と $\forall^\omega$ のもとで閉じている. さらに, Σ^1_1 と Π^1_1 は再帰的写像による逆像をとる操作のもとで閉じている.

いっぽう, WF が解析集合でない Π^1_1 集合であることから, Σ^1_1 も Π^1_1 も, 補集合をとる操作のもとでは閉じていない.

定義から明らかに Δ^1_1 は補集合をとる操作のもとで閉じており, また $\exists^\omega$ と $\forall^\omega$ のもとで閉じているが, $\exists^{\mathcal{N}}$ や $\forall^{\mathcal{N}}$ のもとでは閉じていない. Δ^1_1 は再帰的写像による逆像をとる操作のもとで閉じている.

算術的集合の階層についても述べておこう.

まず Σ^0_n は $\exists^\omega$ のもとで閉じており, 再帰的写像による逆像をとる操作のもとで閉じている. Σ^0_n は $\forall^\omega$ のもとで閉じていない.

次に, Π^0_n は $\forall^\omega$ のもとで閉じており, 再帰的写像による逆像をとる操作のもとで閉じている. Π^0_n は $\exists^\omega$ のもとで閉じていない.

あと, Δ^0_n は補集合をとる操作のもとで閉じており, 再帰的写像による逆像をとる操作のもとで閉じているが, $\exists^\omega$ のもとでも $\forall^\omega$ のもとでも閉じていない.

そこで, 細字体の点集合族の閉包性について次の表のようにまとめられるだろう. ここでは $\exists^{\mathbb{R}}$ と書いたが, これは任意の RP 集合に沿った射影のもとで閉じているという意味である. また, 補集合をとる操作のことを $\neg$ と書いた.

	$\exists^\omega$	$\forall^\omega$	$\exists^{\mathbb{R}}$	$\forall^{\mathbb{R}}$	$\neg$
Σ^0_n	○	×	×	×	×
Π^0_n	×	○	×	×	×
Δ^0_n	×	×	×	×	○
Σ^1_1	○	○	○	×	×
Π^1_1	○	○	×	○	×
Δ^1_1	○	○	×	×	○

これらの点集合族はどれも再帰的写像による逆像をとる操作のもとで閉じているので, そこの記述は省略した.

解析集合は閉集合のススリン系の核として得られるのだった. この結果の細字体版が成立する: お気に入りの定式化だからということもあるけど, これを言っておかないと Π^1_1 と WF との関連が言いにくいのよね.

命題 48. RP 空間 X の部分集合 A について次の (1)–(3) は同値である:

(1) A は Σ^1_1 集合である;
(2) X の閉集合のススリン系 $(F_s : s \in \mathsf{Seq}_\omega)$ で $x \in X$ と $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ の関係としての $x \in F_s$ が $X \times \mathsf{Seq}_\omega$ の Π^0_1 集合となるようなものが存在して, A はそのススリン系の核である;
(3) X の算術的集合のススリン系 $(B_s : s \in \mathsf{Seq}_\omega)$ で $x \in X$ と $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ の関係としての $x \in B_s$ が $X \times \mathsf{Seq}_\omega$ の算術的集合となるようなものが存在して, A はそのススリン系の核である.

[**証明**] (2) → (3) は明らか.

(3) → (1): $(B_s : s \in \mathsf{Seq}_\omega)$ が X の部分集合の算術的なススリン系だとする. このとき,

$$P = \{\, (x, \alpha) \in X \times \mathcal{N} : (\forall n)[x \in B_{\alpha\restriction n}] \,\}$$

をおけば P は $X \times \mathcal{N}$ の算術的集合なので, 上に述べた閉包性の結果により Σ^1_1 集合でもある. A は P の X への射影であるから, これも Σ^1_1 集合である. よって (1) が成立する.

(1) → (2): $X \times \mathcal{N}$ の Π^0_1 集合 C について $A = \mathsf{proj}_X C$ となっていたとする. このとき計算可能な関数 $\varepsilon, \delta \in \mathcal{N}$ を

$$(X \times \mathcal{N}) \setminus C = \bigcup_{i \in \omega} \left(N^X_{\varepsilon(i)} \times [s_{\delta(i)}] \right)$$

となるようにとれる. ここで $(s_j : j \in \omega)$ は Seq_ω の要素の計算可能な数え上げとする. このとき各 $s \in \mathsf{Seq}_\omega$ に対して

$$B_s = \left\{\, x \in X : (\forall i) \left[\, s_{\delta(i)} \not\subseteq s \vee x \notin N^X_{\varepsilon(i)} \,\right] \,\right\}$$

と定めよう. このとき $x \in B_s$ は x と s の関係として Π^0_1 であり, $A = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{i \in \omega} B_{\alpha\restriction n}$ となる. ここの細かいチェックは省略するけど一度は確認したから大丈夫. ◻

3.5 Π^1_1-再帰的部分写像

集合族 Γ を Σ^0_n, Π^0_n, Δ^0_n $(n \geq 1)$ Σ^1_1, Π^1_1, Δ^1_1 のいずれかとする.

定義 49. RP 空間 X から RP 空間 Y への写像 $f\colon X \to Y$ が **Γ-再帰的** (Γ-recursive) であるとは, $x \in X$ と $n \in \omega$ の関係としての

$$f(x) \in N^Y_n$$

が $X \times \omega$ の Γ 集合になっていることをいう.

この定義のもとでの Σ^0_1-再帰的写像はサブセクション 3.3 で定義した再帰的写像にほかならない.

定義上, Δ^1_1-再帰的写像はボレル可測写像だが, その逆は言えない. 連続写像やボレル可測写像についての命題を実効記述集合論の方法で証明するには次のサブセクションで説明する相対化の議論を用いる.

いずれかの n について Σ^0_n-再帰的であるような写像を**算術的写像** (arithmetical mapping) という.

サブセクション 3.3 で, 孤立点のない RP 空間 X に対して補題 11 の連続な全射 $f_X\colon \mathcal{N} \to X$ を再帰的写像としてとれることを確認した. 補題 11 の証明の後半部分を読み直せば, 単射 $i_X\colon X \to \mathcal{N}$

が Σ^0_2-再帰的写像であり, 値域 $i_X[X]$ が $\mathcal{N}$ の Π^0_2 集合であることがわかる. したがって次の補題が成立する.

補題 50. X を孤立点のない RP 空間とするとき, 写像 $f_X\colon \mathcal{N} \to X$ と $i_X\colon X \to \mathcal{N}$ が存在して次をみたす:

(1) f_X は Σ^0_1-再帰的な全射である;
(2) i_X は算術的な単射である;
(3) $f_X \circ i_X = \mathsf{id}_X$ である;
(4) 値域 $i_X[X]$ は $\mathcal{N}$ の算術的集合である. ◰

X が孤立点をもつ RP 空間の場合は, 全射 f_X は再帰的写像にはとれないかもしれないけど, 連続な Σ^0_2-再帰的写像として, 同様の結果が成り立つ.

命題 48 から次のことがわかる. 細字体の世界でも WF は典型的な Π^1_1 集合である.

命題 51. RP 空間 X の部分集合 A について次の (1)–(4) は同値である:

(1) A は Π^1_1 集合である;
(2) Σ^0_2-再帰的な写像 $\boldsymbol{t}\colon X \to \mathsf{TR}$ が存在して $A = \boldsymbol{t}^{-1}[\mathsf{WF}]$ となる;
(3) 算術的な写像 $\boldsymbol{t}\colon X \to \mathsf{TR}$ が存在して $A = \boldsymbol{t}^{-1}[\mathsf{WF}]$ となる;
(4) Δ^1_1-再帰的な写像 $\boldsymbol{t}\colon X \to \mathsf{TR}$ が存在して $A = \boldsymbol{t}^{-1}[\mathsf{WF}]$ となる. ◰

計算可能性理論で計算可能部分関数が活躍したように, 実効記述集合論では Π^1_1-再帰的部分写像が重要である. 次にこれを議論しよう. 以下, f が X の部分集合を定義域として Y に値をとる写像 (X から Y への部分写像) であることを $f\colon X \dashrightarrow Y$ と表記する. `-->` は `\dashrarrow` と書く. これはモショヴァキス [3] の記号では $\rightharpoonup$ だが, $\to$ との違いがわかりにくすぎる.

要素 $x \in X$ が f の定義域に属することを $f(x)\!\downarrow$ と書く.

定義 52. X と Y を RP 空間とする. 部分写像 $f\colon X \dashrightarrow Y$ が **Γ-再帰的部分写像**であるとは,

- f の定義域は Γ 集合である;
- $x \in X$ と $n \in \omega$ の関係としての $f(x)\!\downarrow \,\&\, f(x) \in N^Y_n$ は $X \times \omega$ の Γ 集合である

となっていることをいう. ◰

計算可能性理論でいう計算可能部分関数とは ω から ω への Σ^0_1-再帰的部分写像にほかならない.

次のことが n に関する数学的帰納法でわかる: $P(y)$ が $y \in Y$ についての Σ^0_n 述語で $f\colon X \dashrightarrow Y$ が Σ^0_m-再帰的部分写像のとき, $f(x)\!\downarrow \,\&\, P(f(x))$ は $x \in X$ についての Σ^0_{m+n-1} 述語である. とくに, 各 $n \geq 1$ について, Σ^0_n は Σ^0_1-再帰的部分写像の代入のもとで閉じている. 同様に Σ^1_1 と Π^1_1 も Σ^0_1-再帰的部分写像の代入のもとで閉じていることがわかるが, さらに

補題 53. (Π^1_1-再帰的分写像についての代入補題)　Π^1_1 は Π^1_1-再帰的部分写像の代入のもとで閉じている. すなわち, P が Y の Π^1_1 集合で $f\colon X \dashrightarrow Y$ が Π^1_1-再帰的部分写像のとき,

$$Q(x) \Leftrightarrow f(x)\downarrow \,\&\, P(f(x))$$

で定まる Q は X の Π^1_1 集合である.

[**証明**]　次の同値性に注意せよ:

$$f(x)\downarrow \,\&\, P(f(x)) \Leftrightarrow f(x)\downarrow \,\&\, (\forall y)\big[\,(\exists k)[y \notin N^Y_k \,\&\, f(x) \in N^Y_k] \vee P(y)\,\big]. \quad \square$$

多変数の述語へ複数の部分写像を代入する場合についても同様である. この補題により, Π^1_1-再帰的部分写像どうしの合成写像はまた Π^1_1-再帰的部分写像になることがわかる.

定義 54. RP 空間 X の要素 x について, 集合

$$G^x = \{\, k \in \omega : x \in N^X_k \,\}$$

が点集合族 Γ に属するなら, x は **Γ-再帰的要素**であるという. どれかの $n \geq 1$ について Σ^0_n-再帰的要素であるような要素は**算術的要素**と呼ばれる. $\square$

いいかえれば, 1 点のみからなるトリヴィアルな RP 空間 $\{*\}$ から X の Γ-再帰的写像の値になっているような要素が Γ-再帰的要素である. このことと, Σ^0_n-再帰的写像の合成についての前述の計算から, $f\colon X \to Y$ が Σ^0_n-再帰的写像で, a が X の Σ^0_m-再帰的要素であれば, $f(a)$ は Y の Σ^0_{m+n-1}-再帰的要素になるとわかる. よって, 算術的写像にかんする算術的要素の値は, また算術的要素になる.

RP 空間 X の Π^1_1-再帰的要素は Δ^1_1-再帰的要素である. というのは, $x \in N^X_k$ が Π^1_1 であれば,

$$x \in N^X_k \Leftrightarrow (\exists y \in X)\big[\,(\forall i)[x \notin N^X_i \vee y \in N^X_i] \,\&\, y \in N^X_k\,\big]$$

となり, 右辺は Σ^1_1 であるからだ. 同様の考察により, Π^1_1-再帰的部分写像は, その定義域が Δ^1_1 集合であれば Δ^1_1-再帰的部分写像であるとわかる. とくに,

命題 55. RP 空間 X から RP 空間 Y への (全域的) 写像 $f\colon X \to Y$ について,

(1) f は Δ^1_1-再帰的写像である;
(2) f は Σ^1_1-再帰的写像である;
(3) f は Π^1_1-再帰的写像である

の 3 条件は互いに同値である.

[**証明**]　(1) → (3) は自明である. 上に述べたとおり (3) → (2) である. (2) かつ (3) ならば (1) であるから, あとは (2) → (3) がいえればよい. これについては,

$$f(x) \in N^Y_k \Leftrightarrow (\forall y \in X)\big[\,(\exists i)[f(x) \notin N^Y_i\, y \in N^Y_i] \vee y \in N^Y_k\,\big]$$

であって, 左辺が Σ^1_1 なら右辺は Π^1_1 である. ◻

なので, Π^1_1-再帰的写像であることと, 写像のグラフが Π^1_1 集合であることとは同値ではない. Π^1_1-再帰的全域写像は結局 Δ^1_1-写像なのでボレル可測写像だし, Π^1_1-再帰的部分写像にしても, Π^1_1 集合の逆像が Π^1_1 になるので, ルベーグ可測くらいのことはいえる. けれども, グラフが Π^1_1 集合だということだけでは, ボレル集合の逆像は一般に $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合というものになり, ルベーグ可測かどうかもわからない.

3.6 相対化

サブセクション 2.4 において, X の開集合に対する普遍集合 U^X を

$$U^X = \{\, (\varepsilon, x) : (\exists n)[x \in N^X_{\varepsilon(n)}] \,\}$$

と定義した. この U^X は Σ^0_1 集合であるから, X の開集合はすべて, $\mathcal{N} \times X$ の Σ^0_1 集合の切り口

$$U^X_\varepsilon = \{\, x \in X : (\varepsilon, x) \in U^X \,\}$$

として得られることになる. 同様に, X の閉集合は $\mathcal{N} \times X$ のある Π^0_1 集合 (U^X の補集合) の切り口である. X の F_σ 集合は $\mathcal{N} \times X$ のある Σ^0_2 集合の切り口として得られるし, X の G_δ 集合は $\mathcal{N} \times X$ のある Π^0_2 集合の切り口として得られる.

いま Γ を Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_1, Π^1_1 のいずれかとしよう. $\varepsilon \in \mathcal{N}$ のとき, Γ の ε への**相対化** $\gamma(\varepsilon)$ とは, $\mathcal{N} \times X$ の Γ 集合の切り口として得られる X の部分集合のなす点集合族のことだとする.

そのうえで, Γ に対応する太字体の集合族 $\mathbf{\Gamma}$ を, ある $\varepsilon \in \mathcal{N}$ への相対化 $\Gamma(\varepsilon)$ に属する集合全体のなす点集合族だとしよう. すると, 任意の RP 空間において,

- $\mathbf{\Sigma}^0_1$ は開集合の全体,
- $\mathbf{\Pi}^0_1$ は閉集合の全体,
- $\mathbf{\Sigma}^0_2$ は F_σ 集合の全体,
- $\mathbf{\Pi}^0_2$ は G_δ 集合の全体,
- $\mathbf{\Sigma}^1_1$ は解析集合の全体,
- $\mathbf{\Pi}^1_1$ は補解析集合の全体

ということになる.

なお, Δ^1_1 の相対化 $\Delta^1_1(\varepsilon)$ は Δ^1_1 集合の切り口の全体としてではなく, $\Sigma^1_1(\varepsilon) \cap \Pi^1_1(\varepsilon)$ として改めて定義される. Δ^0_n の相対化についても同様である. 太字体の $\mathbf{\Delta}^1_1$ や $\mathbf{\Delta}^0_n$ の定義は, この意味での相対化の全体を用いる必要がある.

スリンの定理 32 により, $\mathbf{\Delta}^1_1$ はボレル集合族に一致する. 注意すべきこととして, 細字体の Δ^1_1 集合の切り口の全体は太字体の $\mathbf{\Delta}^1_1$ には一致しない. 細字体の Δ^1_1 集合は各 RP 空間に高々可算個しかないので, その相対化のボレル集合としてのレベルがある可算順序数でおさえられてしまう.

相対化した点集合族 $\Gamma(\varepsilon)$ の構造や性質については Γ についてと並行して語ることができる．そのうえ

$$\mathbf{\Gamma} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{N}} \Gamma(\varepsilon)$$

であるから, 計算可能性理論 (再帰理論) の知見を応用して細字体の Γ の構造を調べ, それをしかるべく相対化すれば, 太字体の $\mathbf{\Gamma}$ についてもわかることになる．この方法で, 古典記述集合論のさまざまな問題にも実効記述集合論が応用できる.

なお, $\mathcal{N}$ 以外の RP 空間 Y の要素 y への相対化 $\Gamma(y)$ についても同様に考えられる． また複数の RP 空間 $Y_0, \ldots, Y_n$ の要素 $y_0 \in Y_0, \ldots, y_n \in Y_n$ への相対化 $\Gamma(y_0, \ldots, y_n)$ は, 直積 RP 空間 $Y_0 \times \cdots \times Y_n$ の要素 $(y_0, \ldots, y_n)$ への相対化として定義される.

3.7 普遍集合の実効版

次に RP 空間における細字体の点集合族に対する普遍集合を考えることにする.

計算可能部分関数の標準的な数え上げを $(\Phi_e : e \in \omega)$ とする. Φ_e の定義域 (プログラム e にもとづく計算が正常に終了して結果が返ってくるような入力の全体) を W_e と書く．$n \in W_e$ であること, すなわち $\Phi_e(n)$ が定義されていることを $\Phi_e(n)\!\downarrow$ と書く. $(W_e : e \in \omega)$ は ω の Σ^0_1 集合の標準的な数え上げを与える.

次に一般の RP 空間 X に対して

$$U^X_1 = \{\, (e, x) \in \omega \times X : (\exists n)[n \in W_e \;\&\; x \in N^X_n] \,\}$$

と定義する. U^X_1 は $\omega \times X$ の Σ^0_1 集合であり, かつ, X の任意の Σ^0_1 集合 A に対してある $e \in \omega$ が存在して $A = \{\, x \in X : (e, x) \in U^X_1 \,\}$ となる. すなわちこの U^X_1 は X の Σ^0_1 集合に対する普遍集合である.

このようにすべての RP 空間 X について Σ^0_1 集合に対する普遍集合が定められたとして, 次に

$$U^X_2 = \{\, (e, x) \in \omega \times X : (\exists n)[(e, x, n) \notin U^{X \times \omega}_1] \,\}$$

としよう. この U^X_2 が X の Σ^0_2 集合に対する普遍集合となる.

以下同様に, すべての RP 空間のすべての Σ^0_k 集合に対する普遍集合 U^X_k が与えられる.

最後に, $X \times \mathcal{N}$ の Σ^0_1 集合に対する普遍集合 $U^{X \times \mathcal{N}}_1$ から

$$U^X_\Pi = \{\, (e, x) \in \omega \times X : (\forall \alpha \in \mathcal{N})[(e, x, \alpha) \in U^{X \times \mathcal{N}}_1] \,\}$$

によって U^X_Π を作ると, これが X の Π^1_1 集合に対する普遍集合となる.

可算な離散位相空間としての ω においては, すべての部分集合が開集合であった．しかし RP 空間としての ω の Σ^0_1 集合は, 先ほど注意したとおり可算個しかない．普遍集合 U^ω_n に対角線論法を用いれば, 各 $n \geq 1$ に対して, ω の Σ^0_n でない Π^0_n 集合が存在することがわかる．このことから各 $n \geq 1$ について, 無限個の点からなるすべての RP 空間において

$$\Sigma^0_n \cup \Pi^0_n \subsetneq \Sigma^0_{n+1} \cap \Pi^0_{n+1}$$

となり, 算術的集合が階層化されていることがわかる.

3.8 クライゼルの一意化定理

(沖縄のときのノートから引っ張ってきた.)

定理 56. (クライゼルの一意化定理) X を RP 空間とし, P を $X \times \omega$ の Π^1_1 集合とする. このとき $X \times \omega$ の Π^1_1 集合 P^* で

- $P^* \subseteq P$;
- $(\forall x)\big[(\exists i)[(x,i) \in P] \Leftrightarrow (\exists i)[(x,i) \in P^*]\big]$;
- $(\forall x)(\forall i,j)\big[\,(x,i) \in P^* \,\&\, (x,j) \in P^* \Rightarrow i = j\,\big]$

をみたすものが存在する. すなわち P^* は $(x,i) \in P$ をみたす i をひとつだけ選ぶ (一意化する).

[**証明**] P は Π^1_1 なので算術的な写像 $\boldsymbol{t}\colon X \times \omega \to \mathsf{TR}; (x,i) \mapsto T_{x,i}$ が存在して

$$(x,i) \in P \Leftrightarrow T_{x,i} \in \mathsf{WF}$$

となっている. そこで P に属する (x,i) には可算順序数 $\|T_{x,i}\|$ が対応する. $(x,i) \in P^*$ となる i としては, この順序数 $\|T_{x,i}\|$ を最小にする i のうちで自然数の通常の大小関係で最小のものをとることにする. すると,

$$(x,i) \in R^* \Leftrightarrow (\forall j)[\,T_{x,i} \leqslant^*_{\mathsf{WF}} T_{x,j}\,] \,\&\, (\forall j < i)[\,T_{x,i} <^*_{\mathsf{WF}} T_{x,j}\,]$$

と書けるので, P^* も Π^1_1 となる. 単に $(x,i) \in R$ をみたす最小の i を選んだのでは Π^1_1 で書けないことに注意しよう. ◻

この定理の議論はモショヴァキスの文献 [3] の 4B.4 から借りた. ここでの証明のアイデアは, あとのノヴィコフ-近藤-アディソンの定理 68 の証明にも継承されている.

命題 57. $P \subseteq \omega \times \omega$ が Π^1_1 集合で $(\forall i)(\exists j)P(i,j)$ のとき, $\mathcal{N}$ のある Δ^1_1-再帰的要素 α について $(\forall i)P(i,\alpha(i))$ となる.

[**証明**] $P^* \subseteq P$ が定理 56 の意味で P を一意化する Π^1_1 集合だとすると, P^* はある関数 $\alpha\colon \omega \to \omega$ のグラフになっている. この α について

$$\alpha(i) = j \Leftrightarrow P^*(i,j) \Leftrightarrow (\forall k)[\neg P^*(i,k) \vee k = j]$$

なので, α は Δ^1_1-再帰的要素である. ◻

3.9 Δ^1_1-再帰的要素の数えあげについて

$\boldsymbol{d}^X(e,x)$ の定義まわりのこと.

定理 58. X と Y を RP 空間とする. Π^1_1-再帰的部分写像 $\boldsymbol{d}^{X,Y}\colon \omega\times X \dashrightarrow Y$ で次の条件をみたすものが存在する. $x\in X$ であり, $y\in Y$ が $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素であるとき, 番号 $e\in\omega$ を

$$\boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\!\downarrow \text{ かつ } y=\boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)$$

となるようにとれる. とくに, 集合

$$\big\{\,\boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x) : e\in\omega \mathbin{\&} \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\!\downarrow\big\}$$

が Y の $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素全体と一致する.

[証明] まず $Y=\mathcal{N}$ の場合を考える. $X\times\omega\times\omega$ の Π^1_1 集合に対する普遍集合 $U_\Pi^{X\times\omega\times\omega}$ を考える. クライゼルの一意化定理により, $\omega\times X\times\omega\times\omega$ の Π^1_1 集合 U^* が存在して

- $U^*\subseteq U_\Pi^{X\times\omega\times\omega}$;
- $(\forall e,x,i)\big[(\exists j)[(e,x,i,j)\in U_\Pi^{X\times\omega\times\omega}]\Leftrightarrow(\exists j)[(e,x,i,j)\in U^*]\big]$;
- $(\forall e,x,i)(\forall j,k)\big[(e,x,i,j),(e,x,i,k)\in U^*\Rightarrow j=k\big]$

となる. そこで $(\forall i)(\exists j)[(e,x,i,j)\in U_\Pi^{X\times\omega\times\omega}]$ であるような (e,x) を固定するたびに, i に $(e,x,i,j)\in U^*$ をみたす j を対応させる関数 $\alpha\in\mathcal{N}$ が一意的に定まることになる. この α を $\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x)$ と定める. すると,

$$\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x)\!\downarrow\Leftrightarrow(\forall i)(\exists j)\big[(e,x,i,j)\in U_\Pi^{X\times\omega\times\omega}\big]$$

である. そして $\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x)\!\downarrow$ が成立するときには,

$$\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x)\in[s]\Leftrightarrow(\forall i<\mathsf{lh}(s))[(e,x,i,s(i))\in U^*]$$

となる. 右辺は Π^1_1 であるから, $\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}$ は Π^1_1-再帰的部分写像である. $\alpha=\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x)$ のとき,

$$\alpha(i)=j\Leftrightarrow(e,x,i,j)\in U^*\Leftrightarrow(\forall k)[j=k\vee(e,x,i,k)\notin U^*]$$

となるから, α は $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素である. 逆に $\alpha\in\mathcal{N}$ が $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素のときは, $\alpha(i)=j$ が i と j の関係として $\Pi^1_1(x)$ だから, ある $e\in\omega$ について

$$(\forall i,j)\big[\,\alpha(i)=j\Leftrightarrow(e,x,i,j)\in U_\Pi^{X\times\omega\times\omega}\,\big]$$

となっているが, この場合, 各 i に対して $(e,x,i,j)\in U_\Pi^{X\times\omega\times\omega}$ をみたす j は $\alpha(i)$ ただ一つなので, このとき

$$(\forall i,j)\big[\,\alpha(i)=j\Leftrightarrow(e,x,i,j)\in U^*\,\big]$$

であり, $\alpha=\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x)$ であることがわかる.

一般の RP 空間 Y の場合を考える. このときは算術的で連続な全射 $f_Y\colon\mathcal{N}\to Y$ と算術的な単射 $i_Y\colon Y\to\mathcal{N}$ が $f_Y\circ i_Y=\mathsf{id}_Y$ となるようにとれるのだった. (←証明書かねば) 算術的な写像は

$\Delta^1_1(x)$-再帰的要素を $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素に移すから, $\boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x) = f_X(\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x))$ と定めれば, この $\boldsymbol{d}^{X,Y}$ が求めるものである. ◪

この定理 58 からいろいろ興味深いことがわかる.

二つの RP 空間 X と Y を考える. Y の要素 y が $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素である, という関係を, 今後は

$$y \in \Delta^1_1(x)$$

と表記することにしよう. すると,

命題 59. X と Y を RP 空間とする. 関係 $y \in \Delta^1_1(x)$ は $X \times Y$ の部分集合とみて Π^1_1 である.

[**証明**] この関係は

$$(\exists e \in \omega)\big[\, \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\!\downarrow \,\&\, (\forall k \in \omega)[y \notin N^Y_k \vee \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x) \in N^Y_k\,]\,\big]$$

と書ける. ◪

命題 60. X と Y を RP 空間とし, P を $X \times Y$ の Π^1_1 集合とする. このとき,

$$Q = \{\, x \in X : (\exists y \in \Delta^1_1(x))[(x,y) \in P]\,\}$$

で定まる Q は X の Π^1_1 集合である.

[**証明**] Q の定義を

$$x \in Q \Leftrightarrow (\exists e \in \omega)\big[\boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\!\downarrow \,\&\, (x, \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)) \in P\big]$$

と変形し, Π^1_1-再帰的部分写像の代入補題 53 に訴えればよい. ◪

補題 61. (Δ^1_1 可算選択補題)　$P \subseteq \omega \times \mathcal{N}$ が Π^1_1 で $(\forall i)(\exists \alpha \in \Delta^1_1)P(i,\alpha)$ ならば, $\mathcal{N}$ のある Δ^1_1-再帰的要素 β について $(\forall i)P(i,(\beta)_i)$ となる.

[**証明**] $\tilde{P} \subset \omega \times \omega$ を

$$\tilde{P}(i,e) \Leftrightarrow \boldsymbol{d}^{\omega,\mathcal{N}}(e,0)\!\downarrow \,\&\, P(i, \boldsymbol{d}^{\omega,\mathcal{N}}(e,0))$$

によって定めると, Π^1_1-再帰的部分写像の代入補題 53 により, $\tilde{P}$ も Π^1_1 であり, $(\forall i)(\exists e)\tilde{P}(i,e)$ であるから, 命題 57 によりある Δ^1_1-再帰的要素 α_0 について $(\forall i)\tilde{P}(i,\alpha_0(i))$ となる. そこで,

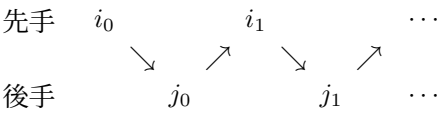
$$\beta(\langle i,n\rangle) = \big(\boldsymbol{d}^{\omega,\mathcal{N}}(\alpha_0(i),0)\big)(n)$$

によって $\beta \in \mathcal{N}$ を定義すると, $k,\ell \in \omega$ の関係 $\beta(k) = \ell$ は Π^1_1 であるから, β は Δ^1_1-再帰的要素である. この β について $(\forall i)P(i,(\beta)_i)$ となる. ◪

4 Π^0_1 ゲームの必勝法について

ここでは ω 上の木 T に対して定義される無限ゲームの必勝法の定義可能性とその応用について考える.

非負整数全体の集合 ω 上の木 T が与えられたとして, 無限ゲーム $G(T)$ を次のように定義する:



先手と後手が交互に自然数 i_n と j_n を指定していく. すると非負整数の無限列

$$i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n, \ldots$$

が定まる. 勝敗は, すべての n で $(i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n) \in T$ であれば先手の勝ち, そうでなければ後手の勝ちと定める. すると, 先手の勝ちとなるような無限列 $i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots$ の全体は $\mathcal{N}$ の閉集合となる.

したがって, ゲール-ステュワートの定理 (文献 [3] の 6A.2) により, ゲーム $G(T)$ には先手または後手の必勝法が存在する.

必勝法の定義可能性について, 次の結果がある.

定理 62. (ブラースの定理) T を ω 上の計算可能な木とする. ゲーム $G(T)$ においては, 先手の必勝法が存在するか, または後手の Δ^1_1 な必勝法が存在する.

[証明] ゲーム $G(T/s)$ に後手の Δ^1_1 な必勝法が存在する, という主張を $P(s)$ としよう. 先手の戦略 σ と後手の戦略 τ に従う対局の結果である無限列を $\sigma\#\tau$ と表記することにすれば,

$$P(s) \Leftrightarrow (\exists \tau \in \Delta^1_1)(\forall \sigma)(\exists n)\big[(\sigma\#\tau) \restriction (2n) \notin T/s\big]$$

であり, このことから P は Seq_ω の Π^1_1 集合を定めることがわかる.

ここで大切なのは, 任意の $i_0, j_0, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}$ について

$$\neg P((i_0, j_0, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1})) \Rightarrow (\exists i_n)(\forall j_n)\neg P((i_0, j_0, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, j_n)) \qquad (*)$$

となっていることである. このことを確認しよう. 対偶を示す. $(*)$ の後件を否定すると

$$(\forall i_n)(\exists j_n)P((i_0, j_0, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, j_n))$$

である. このときクライゼルの一意化定理により, Δ^1_1 な $\alpha \in \mathcal{N}$ が存在して,

$$(\forall i_n)P((i_0, j_0, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, \alpha(i_n)))$$

となる. このとき $G(T/(i_0, j_0, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, \alpha(i_n)))$ に後手の Δ^1_1 な必勝法が存在する:

$$(\forall i_n)(\exists \tau \in \Delta^1_1)\big[\tau \text{ は } G(T/(i_0, j_0, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, \alpha(i_n))) \text{ の後手の必勝法}\big].$$

この [ ] 内が Π^1_1 であることから, Δ^1_1 可算選択補題 61 により,

$$(\exists \beta \in \Delta^1_1)(\forall i_n)\big[(\beta)_{i_n} \text{ は } G(T/(i_0, j_0, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}, i_n, \alpha(i_n))) \text{ の後手の必勝法}\big]$$

となる. そこで, $G(T/(i_0, j_0, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}))$ において, 後手は i_n に対して $j_n = \alpha(i_n)$ と応じ, あとは戦略 $(\beta)_{i_n}$ に従って対局すれば, これが, Δ^1_1 な後手の必勝法となる. したがって $P((i_0, j_0, \ldots, i_{n-1}, j_{n-1}))$ である. これで $(*)$ が示された.

さて, $G(T)$ において後手の Δ^1_1 な必勝法が存在しなかったとすると, $\neg P(())$ であるから, $(*)$ により

$$(\exists i_0)(\forall j_0)\neg P((i_0, j_0))$$

である. そのような i_0 を先手が選び, 後手が j_0 を選んだとすると, $\neg P((i_0, j_0))$ であるから, $(*)$ により

$$(\exists i_1)(\forall j_1)\neg P((i_0, j_0, i_1, j_1))$$

である. 先手はそのような i_1 を選ぶ. 以下同様に, 先手は $i_0, i_1, \ldots, i_n$ を

$$(\forall j_n)\neg P((i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n))$$

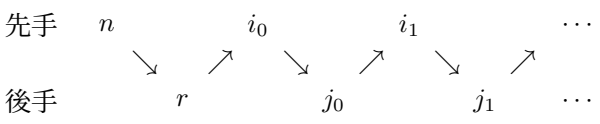
であるように選んでゆける. ゲームの勝敗の定義により $\neg P((i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n))$ のとき $(i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n) \in T$ だから, これは先手の必勝法である. ◻

なお, ブラースの定理 62 で, 後手の必勝法の範囲を Δ^1_1 より改良すること (たとえば算術的とすること) はできない. 任意の Δ^1_1-再帰的集合 $a \subseteq \omega$ に対して, ω 上の後手必勝な Π^0_1 ゲームを定めて, 後手のいかなる必勝法 τ からも a が計算可能 $(a \leqslant_{\mathrm{T}} \tau)$ であるようにできる. これもけっこう面白い話なんだけど, たぶん喋ってる暇ないよね. でも書いておこう.

非負整数の集合 a は Δ^1_1 なので, ω 上の計算可能な木の計算可能な系列 $(T^+_n : n \in \omega)$ と $(T^-_n : n \in \omega)$ を,

$$n \in a \Leftrightarrow T^+_n \in \mathsf{WF} \leftrightarrow T^-_n \notin \mathsf{WF}$$

となるようにとれる. この状況で次のゲームを考える.



ここで n, r, i_k, j_k はすべて非負整数である. 勝敗は, r が偶数でありかつすべての k で $(i_0, i_1, \ldots, i_k) \in T^+_n$ となるか, または r が奇数でありかつすべての k で $(i_0, i_1, \ldots, i_k) \in T^-_n$ である

ときに先手の勝ちと定める．したがってこのゲームは Π^0_1 ゲームであり，ω 上の計算可能な木 $\tilde{T}$ についての $G(\tilde{T})$ となっている．

このゲームでは先手が非負整数 n を選んで，この n が a に属するか，と問う．後手は，$n \in a$ だと思えば偶数 r を答え，$n \notin a$ だと思えば奇数 r を答える．後手の答えが間違っているならば，r が偶数であって T^+_n に無限経路があるか，または r が奇数であって T^-_n に無限経路があることになる．そこで先手はそうした無限経路 $(i_0, i_1, \ldots, i_k, \ldots)$ を選ぼうとする．後手の選ぶ $j_0, j_1, \ldots$ は勝敗に関係ない．

このゲームは後手必勝である．$n \in a$ なら T^+_n に無限経路はないし，$n \notin a$ なら T^-_n に無限経路はないので，後手は $n \in a$ かどうかを正しく判断して r を答えればいいだけのことである．また，判断を間違えば，先手によってその証拠となる無限経路が選ばれて，後手は負けてしまう．だから，後手のいかなる必勝法も，$n \in a$ かどうかを正しく判断し，$n \in a$ なら r を偶数にするし，$n \notin a$ なら r を奇数にする．そこで τ がこのゲームにおける後手の必勝法だとしたら，$n \in a$ と $\tau(n)$ が偶数であることは同値になる．よって a は τ から計算可能である．証明終わり．この議論もブラースによるものだったと思う．要確認．

あとは Π^0_1 ゲームに先手の必勝法があった場合だが，ブラースの定理により，σ が先手の必勝法であることは

$$(\forall \tau \in \Delta^1_1)(\forall n)\big[(\sigma \# \tau) \restriction 2n \in T\big]$$

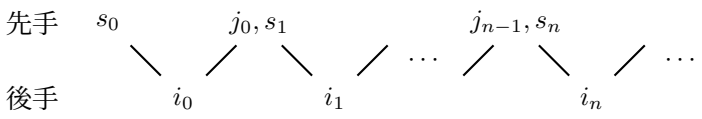
と書ける．この式は Σ^1_1 であるから，先手の必勝法全体は Σ^1_1 集合 (実は Δ^1_1 集合だけど) になる．よって計算可能性理論におけるクリーネの基定理 (basis theorem，文献 [3] の 4E.8 を参照) により，先手は構成的順序数の記法全体の集合 $\mathcal{O}$ から計算可能な必勝法をもつ．$\mathcal{N}$ の空でない Σ^1_1 集合で Δ^1_1-再帰的要素をもたないものが存在するから，ここでの 《$\mathcal{O}$ から計算可能》という結果を《Δ^1_1-再帰的》に強めることはできない．

4.1 フェファマン-ヒンマン-クリプキの定理

カントール空間 $\mathcal{C}$ の Σ^1_1 部分集合 A が与えられたとする．これに対して $2 \times \omega$ 上の計算可能な木 T を

$$\alpha \in A \Leftrightarrow (\exists \beta)(\forall n)\big[(\alpha \restriction n, \beta \restriction n) \in T\big]$$

となるようにとる．次の 2 人無限ゲーム $G^*(T)$ を考える:



ここで先手は $s_n \in {}^{<\omega}2$ と $j_n \in \omega$ を選ぶにあたって，$n \geq 1$ のとき $s_n(0) = i_{n-1}$ となるように選ばねばならない．後手は $i_n \in \{0, 1\}$ となるように選ばねばならない．そのうえで

$$(s_0 \frown \cdots \frown s_n \frown \cdots, (j_0, j_1, \ldots)) \in [T]$$

となっていれば先手の勝ち, そうでなければ後手の勝ちとする. したがってこれは Π^0_1 ゲームであり, ω 上の計算可能な木 T' についての $G(T')$ とみなすことができる.

以下, モショヴァキスの [3], 6E.5 の議論に従って次の 2 つのことを示そう.

補題 63. ゲーム $G^*(T)$ に先手の必勝法があれば A は完全集合を含む.

[証明] σ を $G^*(T)$ における先手の必勝法とする. 後手に $y \in \mathcal{C}$ を選ばせて先手が σ で応戦してできる列

$$s_0, j_0, s_1, j_1, \dots$$

に対して $f(y) = s_0^\frown s_1^\frown \cdots$, $g(y) = (j_0, j_1, \dots)$ とする. σ が先手の必勝法であることから $(f(y), g(y)) \in [T]$ である. また $y(n) \neq y'(n)$ のとき $s_{n+1}(0) = y(n) \neq y'(n) = s'_{n+1}(0)$ なので $f(y) \neq f(y')$ である. よって $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{N}$ は連続 1 対 1 写像であり, その像は A に含まれる完全集合である. ◻

補題 64. ゲーム $G^*(T)$ に後手の必勝法があれば A は可算集合である.

[証明] $G^*(T)$ における後手の必勝法 τ を固定する. 任意の $x \in A$ を固定して考える. $G^*(T)$ の対局の途中経過

$$s_0, i_0, j_0, s_1, i_1, j_1, \dots, s_n, i_n$$

が未解決であるということを

- どの s_k も空でない;
- $\big((s_0^\frown \cdots ^\frown s_n) \restriction n, (j_0, \dots, j_{n-1}) \big) \in T$;
- $s_0^\frown \cdots ^\frown s_n \subseteq x$;
- 各 $k < n$ で $s_{k+1}(0) = i_k = \tau(s_0, j_0, \dots, s_k)$;
- $\ell h(s_0^\frown \cdots ^\frown s_n) = \ell$ とするとき $i_n = \tau(s_0, j_0, \dots, s_n) = x(\ell)$

となっていることだとする. もしも無限列

$$s_0, i_0, j_0, \dots, s_n, i_n, j_n, \dots$$

のすべての始切片 $s_0, i_0, j_0, \dots, s_n, i_n$ が未解決なら τ が後手の必勝法でないことになるので, 未解決な $s_0, i_0, j_0, \dots, s_n, i_n, j_n$ で, 未解決な拡大を持たないものが必ず存在する. そのような未解決な極大列を取って, $\ell h(s_0^\frown \cdots ^\frown s_n) = \ell$ とする. よって $s_0, i_0, j_0, \dots, s_n, i_n, j_n, (x(\ell)), i_{n+1}$ は, $i_{n+1} = \tau\big(s_0, i_0, j_0, \dots, s_n, i_n, j_n, (x(\ell))\big)$ であるかぎり未解決でない. このことは $x(\ell+1) \neq \tau\big(s_0, i_0, j_0, \dots, s_n, i_n, j_n, (x(\ell))\big)$ であることを意味する. 同様に, $s_0, i_0, j_0, \dots, s_n, i_n, j_n, (x(\ell), \dots, x(\ell+m-1)), i_{n+1}$ は $i_{n+1} = x(\ell+m)$ であるかぎり未解決でない. このことは $x(\ell+m) \neq \tau\big(s_0, i_0, j_0, \dots, s_n, i_n, j_n, (x(\ell+m-1))\big)$ であることを意味する. このようにして, $k > \ell$ のときの $x(k)$ は τ を用いて

$$x(k) = 1 - \tau\big(s_0, i_0, j_0, \dots, s_n, i_n, j_n, (x(\ell), \dots, x(k-1))\big)$$

と計算できてしまう．このことはすべての $x \in A$ が τ をオラクルとして計算可能可能であることを意味する．τ から計算できる実数は可算個しかないので, A が可算集合であることがわかる．◰

さて, Π^0_1 ゲーム $G^*(T)$ には先手または後手の必勝法がある．そして補題 63 によれば A が可算である限り $G^*(T)$ に先手の必勝法はない．$G^*(T)$ は Π^0_1 ゲームなので, ブラースの定理 62 により, 後手に必勝法があれば Δ^1_1 な必勝法がある．τ を $G^*(T)$ における後手の Δ^1_1 な必勝法だとして, A の要素がすべて τ から計算できることを用いれば, A のすべての要素が 1 個の Δ^1_1 な実数から計算可能である．よって A のすべての要素は Δ^1_1 である．証明できたのは次のことだ:

定理 65. (フェファマン-ハリソン-クリプキの定理) 完全集合を含まない Σ^1_1 集合は Δ^1_1 な要素のみからなる．◰

5 Δ^1_1 集合の一意化可能性について

以下では, 集合 X 部分集合 P に対して, $x \in P$ のことを述語のように $P(x)$ と書くことがある．同様に, 直積集合 $X \times Y$ の部分集合 R に対しても, $(x, y) \in R$ のことを $R(x, y)$ と書くことがある．

直積集合 $X \times Y$ の部分集合 R と要素 $x \in X$ に対して

$$R_x = \{\, y \in Y : R(x, y) \,\}$$

と定義し, これを x における R の**切り口** (section) という．

定義 66. X と Y をポーランド空間とする．P を直積空間 $X \times Y$ の部分集合とする．集合 P^* が P の**一意化** (uniformization) であるとは,

- $P^* \subseteq P$,
- $(\forall x)[P_x \neq \emptyset \Leftrightarrow P^*_x \neq \emptyset]$, すなわち P と P^* の X への射影は一致する,
- 各 $x \in X$ について切り口 P^*_x は高々 1 点のみからなる

となっていることをいう．このとき, P は P^* によって一意化されるという．◰

そこで, P^* が P の一意化であるとき, P^* は射影 $\mathsf{proj}_X P = \{\, x \in X : P_x \neq \emptyset \,\}$ の各要素 x に, 切り口 P_x の要素を選んで対応させる写像のグラフになっている．

選択公理によれば, どんな集合 $X \times Y$ のどんな部分集合 P に対しても一意化が存在する．しかしながら, 選択公理によって存在が保障される一意化については, われわれは何の情報ももっておらず, その素性はまったく不明である．そこで, ここでは, P がポーランド空間におけるしかるべく定義された部分集合, とくにボレル集合のときに, P を一意化する P^* をしかるべく定義可能な集合としてとれるか, という問題を考える．

一般にはボレル集合がボレル集合で一意化できるとは限らない．

命題 67. $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ の閉部分集合 P で, 解析集合で一意化できないものが存在する．

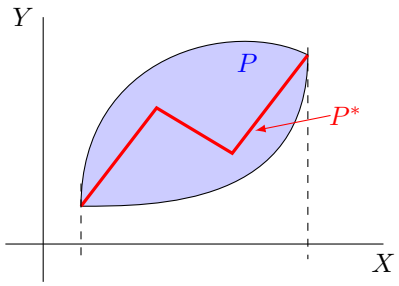


図 1　一意化

[**証明**]　$\mathcal{N}$ 上の二項関係 $\beta \in \Delta^1_1(\alpha)$ は Π^1_1 なので, $\omega \times \omega \times \omega$ 上の計算可能な木 T が存在して,

$$\beta \notin \Delta^1_1(\alpha) \Leftrightarrow (\exists\gamma)(\forall n)\big[\,(\alpha \restriction n, \beta \restriction n, \gamma \restriction n) \in T\,\big]$$

をみたす. 集合 $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ を

$$P(\alpha, \beta) \Leftrightarrow (\forall n)\big[\,(\alpha \restriction n, (\beta)_0 \restriction n, (\beta)_1 \restriction n) \in T\,\big]$$

と定義しよう. すると P は Π^0_1 集合, したがって閉集合であり, すべての α について $P_\alpha \neq \emptyset$ である. この P が解析集合 P^* で一意化できたとしよう. ある $\alpha_* \in \mathcal{N}$ について P^* は $\Sigma^1_1(\alpha_*)$ になっている. 切り口 $P^*_{\alpha_*}$ はただ 1 つの要素 β_* のみからなる. この β_* は,

$$\begin{aligned}\beta_*(n) = k &\Leftrightarrow (\exists\beta)\big[\,P^*(\alpha_*, \beta)\ \&\ \beta(n) = k\,\big]\\ &\Leftrightarrow (\forall\beta)\big[\,P^*(\alpha_*, \beta) \Rightarrow \beta(n) = k\,\big]\end{aligned}$$

をみたす. したがって $\beta_* \in \Delta^1_1(\alpha_*)$ であり, $(\beta_*)_0 \in \Delta^1_1(\alpha_*)$ でもある. ところが P の作り方から, 一般に $P(\alpha, \beta)$ のとき $(\beta)_0 \notin \Delta^1_1(\alpha)$ であるから矛盾する. ◻

文献 [3] の演習問題 4F.22 では, 二つの解析集合の差集合で一意化できない解析集合 P の例が挙げられている. 文献 [6] において, 解析集合は解析集合の差集合の可算和で一意化できるという結果が紹介されている (139 ページ, 定理 4.1.20′).

ボレル集合は補解析集合で一意化できる. より一般に次の定理が成立する. たぶん証明を喋ってる時間はないんだろうけど.

定理 68. (ノヴィコフ-近藤-アディソンの一意化定理)　X と Y がポーランド空間のとき $X \times Y$ の補解析集合は補解析集合で一意化できる. X と Y が RP 空間のとき, $X \times Y$ の Π^1_1 集合は Π^1_1 集合で一意化できる.

[**証明**]　ここでは前半を証明する. 後半はこの議論が実効的であることを一筋縄ではないけど検証することで得られる. $P \subseteq X \times Y$ が補解析集合とすると, ボレル可測写像

$$\boldsymbol{t}\colon X \times Y \to \mathsf{TR}; (x, y) \mapsto T_{x,y}$$

が存在して,

$$(x, y) \in P \Leftrightarrow T_{x,y} \in \mathsf{WF}$$

となる．ここで定理 38 を用いて X と Y の位相を与え直すことにより，写像 $\boldsymbol{t}$ は連続写像であると仮定してさしつかえない．(この部分は実効的には困難．実効バージョンでは，ひとまず $X = Y = \mathcal{N}$ の場合に話を限って議論する．この場合には，本当に写像 $\boldsymbol{t}$ を計算可能連続写像としてとれる.) Seq_ω の計算可能な 1 対 1 の数え上げ $(s_n : n \in \omega)$ であって，$\mathsf{lh}(s_n) \leq n$ をみたすものを固定しておく．このとき $s_0 = \emptyset$ となることに注意しよう．以上の準備のもとで，$(\exists y)P(x,y)$ であるような x を固定して，

- $\xi_0 = \min\{\, \|T_{x,y}\| : y \in P_x \,\}$ とおく．
- $\|T_{x,y}\| = \xi_0$ をみたすある $y \in P_x$ を含む直径 1 以下の基本開集合 N^Y_k の番号 k の最小値を k_0 とする．
- $A_0 = \{\, y \in P_x : \|T_{x,y}\| = \xi_0 \;\&\; y \in N^Y_{k_0} \,\}$ とおく．

以下再帰的に，ξ_i, k_i, A_i が定まったとして，

- $\xi_{i+1} = \min\{\, \|T_{x,y}/s_{i+1}\| : y \in A_i \,\}$ とおく．
- $\|T_{x,y}\| = \xi_{i+1}$ をみたすある $y \in A_i$ を含む直径 $2^{-(i+1)}$ 以下の基本開集合 N^Y_k のうち，閉包が $N^Y_{k_i}$ に含まれるものの番号 k の最小値を k_{i+1} とする．
- $A_{i+1} = \{\, y \in A_i : \|T_{x,y}\| = \xi_{i+1} \;\&\; y \in N^Y_{k_{i+1}} \,\}$ とおく．

このように定めていくと，各 A_i は空でなくて，

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq \cdots \supseteq A_i \supseteq \cdots$$

と入れ子になっている．A_i の直径は 2^{-i} 以下だから，各 A_i から要素 y_i をとると，$(y_i : i \in \omega)$ は Y のコーシー列になっている．よって極限値 $y_\infty = \lim_{i\to\infty} y_i$ が存在する．写像 $(x,y) \mapsto T_{x,y}$ の連続性により，各 $n \in \omega$ について $i_n \in \omega$ がとれて，

$$s_n \in T_{x,y_\infty} \Leftrightarrow (\forall i \geq i_n)[s_n \in T_{x,y_i}],$$
$$s_n \notin T_{x,y_\infty} \Leftrightarrow (\forall i \geq i_n)[s_n \in T_{x,y_i}]$$

とできる．$s_m, s_n \in T_{x,y_\infty}$ を $s_m \subsetneq s_n$ となるようにとったとしよう．すると $i \geq \max\{i_m, i_n\}$ のとき $s_m, s_n \in T_{x,y_i}$ である．さらに $i \geq \max\{m,n\}$ をもみたすように i を十分大きくとれば，このとき

$$\xi_m = \|T_{x,y_i}/s_m\| = |s_m|_{T_{x,y_i}} > |s_n|_{T_{x,y_i}} = \|T_{x,y_i}/s_n\| = \xi_n$$

となる．つまり対応 $s_n \mapsto \xi_n$ は $(T_{x,y_\infty}, \prec_{T_{x,y_\infty}})$ 上の狭義順序保存の順序数値関数である．このような順序数値関数が存在することから，T_{x,y_∞} は整礎木であり，したがって $P(x,y_\infty)$ が成立するとわかる．いま，ランク関数 $s \mapsto |s|_{T_{x,y_\infty}}$ は狭義順序保存の順序数値関数のうちの最小のものであったから，各 n について

$$\|T_{x,y_\infty}/s_n\| = |s_n|_{T_{x,y_\infty}} \leq \xi_n$$

であり，ξ_n の最小性から $\|T_{x,y_\infty}/s_n\| = \xi_n$ となる．よって各 i で $y_\infty \in A_i$ となり，$\{y_\infty\} = \bigcap_{i\in\omega} A_i$ となっている．以上の考察から，P を一意化する P^* の定義を述べよう．まず $X \times Y \times \omega$ の部分集

合 R を

$$
\begin{aligned}
R(x,y,i) \Leftrightarrow & P(x,y) \mathbin{\&} (\forall z \in Y)\big[\, T_{x,y}/s_i \leqslant^*_{\mathsf{WF}} T_{x,z}/s_i \,\big] \\
& \mathbin{\&} (\exists u \in \mathsf{Seq}_\omega)\Big[\, \mathsf{lh}(u) = i+1 \mathbin{\&} \forall (j \le i)\big[\\
& \quad [j > 0 \Rightarrow \overline{N^Y_{u(j)}} \subseteq N^Y_{u(j-1)}] \\
& \quad \mathbin{\&} \mathsf{diam}(N^Y_{u(j)}) \le 2^{-j} \\
& \quad \mathbin{\&} y \in N^Y_{u(j)} \\
& \quad \mathbin{\&} (\forall k < u(j))[\\
& \qquad \mathsf{diam}(N^Y_k) \le 2^{-j} \Rightarrow (\forall z \in Y)[z \in N^Y_k \Rightarrow T_{x,y}/s_j <^*_{\mathsf{WF}} T_{x,z}/s_j] \\
& \quad] \\
& \big]\Big]
\end{aligned}
$$

と定めよう．式中の u は $(k_0, k_1, \ldots, k_i)$ を意味する．R は補解析集合である．これで $R(x,y,i)$ と $y \in A_i$ が同値になるので, あとは

$$P^*(x,y) \Leftrightarrow (\forall i) R(x,y,i)$$

とすれば, P を一意化する補解析集合 P^* が得られる． ☑ 細かいチェックは省略した．ごめんなさい．

上記の近藤-アディソンの定理の証明のアイデアはモショヴァキスの本 [3] の第 4 章 (おもにセクション 4E) から借りた．補解析集合 $A = \{\, x : T_x \in \mathsf{WF} \,\}$ に対して, 順序数値関数 $x \mapsto \|T_x/s_n\|$ $(n \in \omega)$ が, モショヴァキスのいわゆる Π^1_1-スケールになっている． 証明を書いてしまってから, ポーランド空間 Y は $\mathcal{N}$ の閉集合の連続単射像なんだから, 最初っから $Y = \mathcal{N}$ で議論してもよかったと思い至った．そのほうが多少は見通しがよかったかもしれない．

こうしてボレル集合は補解析集合で一意化できるとわかった．

では, ボレル集合がボレル集合で一意化できるのは, どんな場合だろうか．

もしもボレル集合 P がボレル集合 P^* で一意化されるならば, ルジンの単射定理 34 により, 射影 $\mathsf{proj}_X P^*$ は X のボレル集合である．よって, $\mathsf{proj}_X P$ がボレル集合であることは, P がボレル集合であるためのひとつの必要条件になっている．

だがこの条件は弱すぎる．命題 67 によれば, P が閉集合で射影 $\mathsf{proj}_X P$ が空間 X 全域であっても必ずしもボレル集合で一意化できるとは限らない．

実効記述集合論の言葉を使えば, この問題に答えられる．X と Y を RP 空間とし, $X \times Y$ のボレル集合 P を考える．P を一意化するボレル集合 P^* があったとする．この P^* はある $\alpha \in \mathcal{N}$ について $\Delta^1_1(\alpha)$ になっている．すると, 各 $x \in X$ ごとに切り口 P^*_x は高々 1 個の要素からなる $\Delta^1_1(\alpha, x)$ 集合である． このあたりのことは RP 空間の定義まわりのことを書く際にちゃんと説明する必要が

あるな. $\{y\} = P^*_x$ のとき, 集合

$$G^y = \{\, k \in \omega : y \in N^Y_k \,\}$$

が $\Delta^1_1(\alpha, x)$ であるという意味で, y は $\Delta^1_1(\alpha, x)$-再帰的要素である. このときもちろん $y \in P_x$ であるから, P の各セクション P_x は, 空でないかぎり, $\Delta^1_1(\alpha, x)$-再帰的要素を少なくとも 1 個含んでいることになる. これが, P がボレル集合で一意化できるための必要十分条件になる.

定理 69. (Δ^1_1 一意化の条件) X と Y を RP 空間とし, P を直積空間 $X \times Y$ のボレル集合とする. P がボレル集合で一意化できるための必要十分条件は, ある $\alpha \in \mathcal{N}$ が存在して, すべての $x \in X$ について, 切り口 P_x が空でなければ $\Delta^1_1(\alpha, x)$-再帰的要素を含むことである.

とくに P が Δ^1_1 集合で, 各 $x \in X$ について, P_x が空でない限り $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素を含むならば, P は Δ^1_1 集合で一意化できる.

[**証明**] すでに示したとおり, 条件は必要である. 以下, 条件が十分であることを示そう. 以下, 簡単のため P を $X \times Y$ の Δ^1_1 部分集合とする. 各 $x \in X$ について, 切り口 P_x は空であるかまたは $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素を含むと仮定しよう. $\boldsymbol{d}^{X,Y} : \omega \times X \dashrightarrow Y$ を, サブセクション 3.9 で導入した, $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素を数え上げる Π^1_1 部分関数とする. $X \times \omega$ の部分集合 R を

$$R(x, e) \Leftrightarrow \boldsymbol{d}^Y(e, x)\!\downarrow \,\&\, P(x, \boldsymbol{d}^Y(e, x))$$

と定めよう. R は Π^1_1 集合である. 仮定により, $P_x \neq \emptyset \Leftrightarrow (\exists e \in \omega) R(x, e)$ となる. R を一意化する Π^1_1 集合 R^* をとって,

$$\begin{aligned} P^*(x, y) &\Leftrightarrow (\exists e \in \omega)[\, R^*(x, e) \,\&\, y = \boldsymbol{d}^Y(e, x)\,] \\ &\Leftrightarrow P(x, y) \,\&\, (\forall e \in \omega)[\, R^*(x, e) \Rightarrow y = \boldsymbol{d}^Y(e, x)\,] \end{aligned}$$

とすれば, P^* は P を一意化する $\Delta^1_1(\alpha)$ 集合となる. ☑

6 ルジン-ノヴィコフの定理

補題 70. E を $\mathcal{N}$ の空でない可算な Δ^1_1 集合とするとき, Δ^1_1-再帰的要素 $\gamma \in \mathcal{N}$ が存在して, $E = \{\, (\gamma)_n : n \in \omega \,\}$ となる.

[**証明**] 沖縄のときのノートから取ってくる. ここでは $\boldsymbol{d}^{\omega,\mathcal{N}}(e, 0)$ を簡単に $\boldsymbol{d}(e)$ と書くことにする. $\alpha \in \mathcal{N}$ と $e \in \omega$ の関係 $P(\alpha, e)$ を

$$P(\alpha, e) \Leftrightarrow \boldsymbol{d}(e)\!\downarrow \,\&\, \alpha = \boldsymbol{d}(e)$$

と定めれば Π^1_1 である. クライゼルの一意化定理 56 によって P を一意化する Π^1_1 集合 $P^*(\alpha, e)$ がとれる. いま関数 $f : \mathcal{N} \to \omega$ を $\alpha \notin E$ のとき $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in E$ のとき $f(\alpha)$ は $P^*(\alpha, e)$ をみたす唯

一の e と定める. すると f は Δ^1_1-再帰的写像となる.

$$\begin{aligned} e \in f[E] &\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \Delta^1_1)[\alpha \in E \mathbin{\&} P^*(\alpha, e)] \\ &\Leftrightarrow (\exists \alpha)[\alpha \in E \mathbin{\&} (\forall k)[P^*(\alpha, k) \Rightarrow k = e]] \end{aligned}$$

であるから $f[E]$ は Δ^1_1 集合である. そこでいま $f[E]$ の全要素を昇順に数えあげる関数を $\beta\colon \omega \to \omega$ とすれば, β は Π^1_1-再帰的関数になるので, $\mathcal{N}$ の Δ^1_1-再帰的要素である. あとは γ を $\gamma(\langle m, n\rangle) = (\boldsymbol{d}(\beta(m)))(n)$ となるように定めれば, $\gamma\colon \omega \to \omega$ は Π^1_1-再帰的関数になるので, これも $\mathcal{N}$ の Δ^1_1-再帰的要素である. この γ が求めるものである. ◻

この補題を相対化すると次の結果が得られる: E を $\mathcal{N}$ の空でなくて可算な $\Delta^1_1(x)$ 集合とすると, $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素 $\gamma \in \mathcal{N}$ が存在して, $E = \{\, (\gamma)_n : n \in \omega \,\}$ となる. この事実があとで大事な役割を果たす.

補題 71. (ルヴォーの選択補題) $A \subset X \times Y$ を Π^1_1 部分集合とする. $A^+ = \{\, x \in X : (\exists y \in \Delta^1_1(x))[\,(x, y) \in A\,]\,\}$ とおく. このとき X 上の Π^1_1-再帰的部分写像 φ が存在して

$$(\forall x \in A^+)[\,\varphi(x)\!\downarrow \mathbin{\&} (x, \varphi(x)) \in A\,]$$

をみたす. さらに $B \subset A^+$ で B が Δ^1_1 であれば, Δ^1_1-再帰的 (全域) 写像 $f\colon X \to Y$ が存在して

$$(\forall x \in B)[\,(x, f(x)) \in A\,]$$

をみたす.

[**証明**] この証明も沖縄のときのノートから取ってきた. ノヴィコフ-近藤-アディソンの一意化定理により, 関係

$$(x, y) \in A \mathbin{\&} y \in \Delta^1_1(x)$$

を一意化する Π^1_1 部分集合 $A' \subseteq A$ が存在する. このとき A' はある部分関数 φ のグラフになっていて, その定義域は A^+ に一致する. この φ について

$$\varphi(x)\!\downarrow \mathbin{\&} \varphi(x) \in N^Y_i \Leftrightarrow x \in A^+ \mathbin{\&} (\exists y \in \Delta^1_1(x))[\,(x, y) \in A' \mathbin{\&} y \in N^Y_i\,]$$

であるから, φ は Π^1_1-再帰的部分写像である.

次に $B \subset A^+$ で B が Δ^1_1 だったとすると,

$$\begin{aligned} (\varphi \restriction B)(x)\!\downarrow \mathbin{\&} \varphi(x) \in N^Y_i &\Leftrightarrow x \in B \mathbin{\&} (\exists y \in \Delta^1_1(x))[\,(x, y) \in A' \mathbin{\&} y \in N^Y_i\,] \\ &\Leftrightarrow x \in B \mathbin{\&} (\forall y \in \Delta^1_1(x))[\,(x, y) \in A' \Rightarrow y \in N^Y_i\,] \end{aligned}$$

であるから制限写像 $\varphi \restriction B$ は Δ^1_1-再帰的部分写像で, その定義域 B が Δ^1_1 であるから, Δ^1_1-再帰的全域写像 $f\colon X \to Y$ で $\varphi = f \restriction B$ となるものが存在する. この f が求めるものである. ◻

補題 71 をルヴォーの選択補題と呼んだのは, 藤田がこの補題をアラン・ルヴォーの文献 [1] から引用してきたからにすぎない. 初出が誰のどの文献なのかはわからない. ノヴィコフ-近藤-アディソンの一意化定理からすぐに出てくる結果なので, いわばフォークロア扱いだろう.

命題 72. X を RP 空間とする. P を $X\times\mathcal{N}$ の Δ^1_1 集合で, 各 $x\in X$ について切り口 P_x は高々可算集合だとする. このとき, 射影 $\mathsf{proj}_X P$ は Δ^1_1 集合であり, さらに, X から $\mathcal{N}$ への写像の列 $(g_n : n\in\omega)$ が存在して,

- x と n,m,k の関係 $\big(g_n(x)\big)(m)=k$ は Δ^1_1 である. したがって各 g_n は Δ^1_1-再帰的写像である;
- $P_x\neq\emptyset$ のとき $P_x=\{\,g_n(x) : n\in\omega\,\}$ である

となる.

[**証明**] $B=\mathsf{proj}_X P$ とおく. この B は

$$x\in B\Leftrightarrow(\exists\alpha)P(x,\alpha)\Leftrightarrow(\exists\alpha\in\Delta^1_1(x))P(x,\alpha)$$

なので Δ^1_1 である. 各 $x\in B$ に対して, 切り口 P_x は空でない可算な $\Delta^1_1(x)$ 集合であるから, 相対化された補題 70 により, ある $\gamma\in\Delta^1_1(x)$ が存在して $P_x=\{\,(\gamma)_n : n\in\omega\,\}$ となる. そこで $Q\subseteq X\times\mathcal{N}$ を

$$Q(x,\gamma)\Leftrightarrow\gamma\in\Delta^1_1(x)\ \&\ (\forall n)P(x,(\gamma)_n)\ \&\ (\forall\alpha)[P(x,\alpha)\Rightarrow(\exists n)[\alpha=(\gamma)_n]]$$

によって定めよう. Q は Π^1_1 で, $\mathsf{proj}_X Q=\mathsf{proj}_X P=B$ であり, かつ

$$(\forall x\in B)(\exists\gamma\in\Delta^1_1(x))Q(x,\gamma)$$

となっている. ルヴォーの選択補題 71 により, このとき Δ^1_1-再帰的写像 $f\colon X\to\mathcal{N}$ が存在して, 各 $x\in B$ に対して $Q(x,f(x))$ となる. そこでこの f について $g_n(x)=(f(x))_n$ と定めれば, $(g_n : n\in\omega)$ が要件をみたす. ☐

定理 73. (ルジン-ノヴィコフの定理) X と Y をポーランド空間とする. $P\subseteq X\times Y$ がボレル集合で, 各 $x\in X$ について切り口 P_x が高々可算集合だったとする. このとき, 射影 $\mathsf{proj}_X P$ はボレル集合であり, さらに, $X\times Y$ のボレル集合の列 $(P^*_n : n\in\omega)$ が存在して, $P=\bigcup_{n\in\omega}P^*_n$ かつ各 P^*_n は P を一意化する.

[**証明**] 補題 11 によれば, 連続な全射 $f_X\colon\mathcal{N}\to X$ とボレル可測な単射 $i_X\colon X\to\mathcal{N}$ で $f_X\circ i_X=\mathsf{id}_X$ をみたすものが存在し, 像 $i_X[X]$ は $\mathcal{N}$ の G_δ 部分集合になるのだった. Y についても連続な全射 f_Y とボレル可測な単射 i_Y が同様にとれる. いま, $\mathcal{N}\times\mathcal{N}$ の部分集合 Q を

$$Q(\alpha,\beta)\Leftrightarrow\alpha\in i_X[X]\ \&\ \beta\in i_Y[Y]\ \&\ P(f_X(\alpha),f_Y(\beta))$$

によって定めよう. Q はボレル集合であるから, あるパラメータ ε について $\Delta^1_1(\varepsilon)$ となる. 各 $\alpha\in\mathcal{N}$ に対する切り口 Q_α は, $\alpha\notin i_X[X]$ なら空集合で, $\alpha\in i_X[X]$ なら $f_Y^{-1}[P_{f_X(\alpha)}]\cap i_Y[Y]$ であ

る．$P_{f_X(\alpha)}$ は仮定により高々可算集合であり，かつ，f_Y が $i_Y[Y]$ 上で 1 対 1 であるから，Q_α も高々可算集合である．よってパラメータ ε に相対化された命題 72 により，射影 $\mathsf{proj}_{\mathcal{N}}Q$ は $\Delta^1_1(\varepsilon)$ 集合であり，さらに $\mathcal{N}$ から $\mathcal{N}$ への $\Delta^1_1(\varepsilon)$-再帰的写像の系列 $(g_n : n \in \omega)$ が存在して，$Q_\alpha \neq \emptyset$ のとき $Q_\alpha = \{\, g_n(\alpha) : n \in \omega \,\}$ となる．連続写像 f_X が $i_X[X]$ 上 1 対 1 であることから，ルジンの単射定理により $f_X[\mathsf{proj}_{\mathcal{N}}Q]$ は X のボレル集合であるが，これは $\mathsf{proj}_X P$ に一致する．また写像 $f_Y \circ g_n \circ i_X$ は X から Y へのボレル可測写像になる．そこで

$$P^*_n(x,y) \Leftrightarrow x \in \mathsf{proj}_X P \mathbin{\&} Q(i_X(x), g_n(i_X(x))) \mathbin{\&} y = f_Y(g_n(i_X(x)))$$

とすれば，P^*_n は $X \times Y$ のボレル集合である．このとき $(P^*_n : n \in \omega)$ が要件をみたす．(チェックは routine なので省略!) ◻

7 応用例

命題 74. X と Y をポーランド空間とする．$f\colon X \to Y$ がボレル可測写像で，各 $y \in Y$ の逆像 $f^{-1}[\{y\}]$ が高々可算集合であるものとすれば，X の任意のボレル集合 B の像 $f[B]$ は Y のボレル集合である．

[**証明**] B を与えられた X のボレル集合として，$Y \times X$ の部分集合 P を

$$P(y,x) \Leftrightarrow x \in B \mathbin{\&} y = f(x)$$

によって定めると，P はボレル集合で，各 $y \in Y$ に対し切り口 $P_y = f^{-1}[\{y\}] \cap B$ は高々可算集合である．よってルジン-ノヴィコフの定理により射影 $\mathsf{proj}_Y P$ は Y のボレル集合となるが，この射影が $f[B]$ にほかならない．◻

木田 [5] の定義 2.1 では標準ボレル空間上の可算ボレル同値関係の定義を次のように述べている．(標準ボレル空間というのはポーランド空間とその上のボレル集合族が作る可測空間と同型な可測空間のこと.) X 上の同値関係 $\mathcal{R}$ が可算ボレル同値関係であるとは，次の 3 条件をみたすことをいう:

(1) $\mathcal{R}$ は $X \times X$ の可測集合である．
(2) 任意の $x \in X$ に対し，その同値類 $[x]_{\mathcal{R}}$ は可算である．
(3) $\mathcal{R}$ の可測集合の列 $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ が存在して，$\mathcal{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_n$，かつ，終写像 $r\colon \mathcal{R} \to X$ は各 R_n 上で単射である．(終写像とは，順序対 (x,y) に左要素 x を対応させる写像．すなわち左因子空間への射影写像である.)

いま標準ボレル空間 X をポーランド空間と思い，ボレル同値関係 $\mathcal{R}$ を $X \times X$ のボレル集合と思えば，同値類 $[x]_{\mathcal{R}}$ とは切り口 $\mathcal{R}_x$ にほかならない．そこで，ルジン-ノヴィコフの定理 73 によれば，この条件 (3) は冗長である．この件に関しては文献 [5] 第 2 章のノート (p.28–29) を見よ．条件 (3) は冗長だが，意図的に入れてあるらしい．

参考文献

[1] A.Louveau, *A Separation Theorem for* Σ^1_1, Trans. AMS., **260** (1988) 363–378.

[2] D.A. Martin and A.S. Kechris, *Infinite games and effective descriptive set theory,* Part 4 of [4].

[3] Y.N. Moschovakis, Descriptive Set Theory, 2nd ed., American Mathematical Society, 2009.

[4] C.A. Rogers (ed.), Analytic Sets, Academic Press, 1980.

[5] 木田良才, 離散群とエルゴード理論, 共立出版, 2024.

[6] 田中 尚夫, 記述集合論要説, 日本評論社, 2024.

[7] 藤田 博司, ロジック・ウィンタースクール 2023 関連の資料,
`https://tenasaku.com/academia/okinawa-2023-02/`

[8] —, 東北大学における集中講義 (2025 年 6 月) の資料,
`https://tenasaku.com/academia/notes/Tohoku_June2025.pdf`