ボレル集合の一意化問題とその応用 (その 1)

藤田 博司

愛媛大学大学院理工学研究科

2026 年 3 月 13 日〜17 日
Logic Winter School 2026

はじめに

この講義の予稿と, 一連のスライドのコピーを以下の URL に置きます

https://tenasaku.com/academia/kitakami-2026-03/

この講義（全5回）の目標

実効記述集合論 (Effective Descriptive Set Theory) の
いろいろの話題を紹介して
ルジン-ノヴィコフの定理 (一意化定理と分解定理) の証明に至る

ポーランド空間とボレル集合

ポーランド空間

完備な距離がつく可分な位相空間をポーランド空間 (またはポーリッシュ空間?, Polish space) という.

- 可算な離散位相空間 $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$
- ユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\ldots$
- ベール空間 $\mathcal{N} = {}^{\omega}\omega = \omega \times \omega \times \omega \times \cdots$
- カントール空間 $\mathcal{C} = {}^{\omega}\{0, 1\} = 2 \times 2 \times 2 \times \cdots$

などはポーランド空間の例である.

ポーランド空間

ポーランド空間 X の可算な稠密集合の要素を点列として

$$q_0^X, q_1^X, q_2^X, \dots$$

と番号づけして, 完備な距離関数に関する q_i^X の $1/(j+1)$-近傍を $N^X_{2^i(2j+1)}$ とし, また $N_0^X = \emptyset$ とすることで, X の位相の標準的な開基

$$\left\{ N_0^X, N_1^X, N_2^X, \dots \right\}$$

を定める.

ボレル集合

ポーランド空間 X の標準的な開基で生成される σ-加法的集合族をボレル集合族といって,

$$\mathcal{B}_X$$

とあらわす. $\mathcal{B}_X$ のメンバーを X のボレル集合という.

開集合, 閉集合, F_σ 集合, G_δ 集合などはボレル集合である.

ボレル可測写像

ポーランド空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ による, Y の標準的開基のメンバーの逆像 $f^{-1}[N_k^Y]$ がすべて X のボレル集合であるとき, f をボレル可測写像という.

ボレル可測写像の全体は, すべての連続写像を含み, かつ, 各点収束極限をとる操作のもとで閉じている.

とくに $Y = \mathbb{R}$ の場合, ボレル可測写像の全体はベール関数の全体と一致する.

ボレル可測写像 $f\colon X \to Y$ による Y のボレル集合の逆像は X のボレル集合になる.

ススリン系と解析集合

有限列の扱い

自然数の有限列全体の集合を Seq_ω と書く. これも可算な離散位相空間とみなす.

有限列 s の長さを $\mathrm{lh}(s)$ と書く.

有限列 s が有限列 t の始切片である (または等しい) とき $s \subseteq t$ と書く.

有限列 s のあとに (有限または無限の) 列 t を連結してできる列を $s * t$ と書く.

長さゼロの空な列 () も考慮に入れる.

無限列 α に対して $\alpha \restriction n = (\alpha(0), \alpha(1), \ldots, \alpha(n-1))$ とする.

スリン系とその核

自然数の有限列で添字づけされた集合族を**スリン系**という.

スリン系 $(E_s : s \in \mathrm{Seq}_\omega)$ に対して, 集合

$$\bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} E_{\alpha \restriction n}$$

をその**核**という.

解析集合と補解析集合

ポーランド空間 X の部分集合 A に対してつぎの (1)〜(4) は同値である:

1. X の閉集合のススリン系が存在して, A はその核である.
2. X のボレル集合のススリン系が存在して, A はその核である.
3. ベール空間 $\mathcal{N}$ からの連続写像による閉集合の像である.
4. $X \times \mathcal{N}$ の 閉集合の X への射影である.

(予稿: 補題 13 など)

これらの条件をみたす A を X の解析集合という.

解析集合の補集合のことを補解析集合という.

解析集合全体の族を $\mathbf{\Sigma}^1_1$ と書く. 補解析集合全体の族を $\mathbf{\Pi}^1_1$ と書く. ←太字体

$\mathbf{\Delta}^1_1 = \mathbf{\Sigma}^1_1 \cap \mathbf{\Pi}^1_1$ とおく.

解析集合と補解析集合

解析集合の全体 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ はすべての閉集合を含み, かつ可算和と可算共通部分のもとで閉じているので,

すべてのボレル集合は解析集合である.

したがって, すべてのボレル集合は補解析集合でもあるから,

$$\mathcal{B}_X \subseteq \mathbf{\Delta}^1_1$$

となっている.

また $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Delta}^1_1$ はいずれもボレル可測写像による逆像をとる操作のもとで閉じている.

いっぽう, $\mathbf{\Sigma}^1_1$ と $\mathbf{\Pi}^1_1$ は補集合をとる操作のもとで閉じていない.

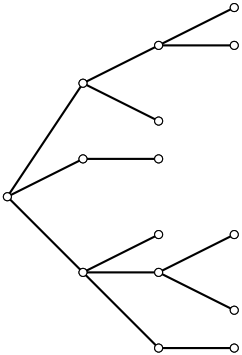
木と可算順序数

ω 上の木

Seq_ω の部分集合 T が始切片をとる操作のもとで閉じているとき:

$$s \subseteq t \in T \Rightarrow s \in T$$

T を ω 上の木 (tree on ω) という. 空集合 $\emptyset$ も木と認める.

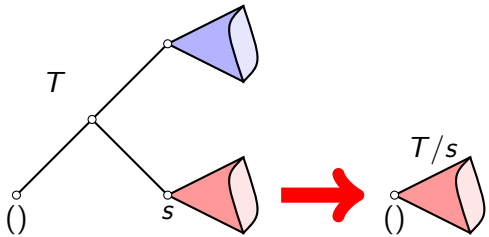


ω 上の木

ω 上の木 T と $s \in \mathrm{Seq}_\omega$ に対して,

$$T/s = \{\, t \in \mathrm{Seq}_\omega : s * t \in T \,\}$$

と書く.



ω 上の木

ω 上の木全体の集合を TR と書く.

各 $s \in \mathrm{Seq}_\omega$ に対し,

$$(s)_+ = \{\, T \in \mathrm{TR} : s \in T \,\}, \quad (s)_- = \{\, T \in \mathrm{TR} : s \notin T \,\}$$

と定める. これらの集合によって生成される位相を与えると, コンパクトなボーランド空間となる.

無限経路と整礎木

無限列 $\alpha \in \mathcal{N}$ と木 $T \in \mathrm{TR}$ について, そのすべての有限始切片が T のメンバー

$$(\forall n)\big[\alpha\restriction n \in T\big]$$

となっているとき, α を T の無限経路 (infinite path) という.

無限経路をひとつももたない木のことを整礎 (wellfounded) な木といい,
その全体を

$$\mathrm{WF}$$

であらわす.

無限経路と整礎木

空間 TR の部分集合とみて, WF は補解析集合である:

$$\mathrm{TR} \setminus \mathrm{WF} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \bigcap_{n \in \omega} (\alpha \restriction n)_+$$

無限経路と整礎木

X をポーランド空間とし $(F_s : s \in \mathrm{Seq}_\omega)$ を X 閉集合からなるススリン系とする.

各点 $x \in X$ に対して,

$$T_x = \{\, t \in \mathrm{Seq}_\omega : (\forall s \subseteq t)[x \in F_s] \,\}$$

とおく. $T_x \in \mathrm{TR}$ である.

対応 $x \mapsto T_x$ は X から TR へのボレル可測写像である.

無限経路と整礎木

スリン系 $(F_s : s \in \mathrm{Seq}_\omega)$ の核を A とおくと,

$$x \in A \Leftrightarrow T_x \notin \mathrm{WF}$$

となっている.

無限経路と整礎木

補解析集合であることと, ボレル可測写像による WF の逆像として表されることは同値である.

WF はこの意味で $\mathbf{\Pi}^1_1$-complete である.

とくに, WF は解析集合でない “真の” 補解析集合である.

整礎木のランク関数

整礎木 T 上で二項関係

$$t \prec_T s \Leftrightarrow t \supsetneq s$$

を考えると $(T, \prec_T)$ は整礎的な半順序集合になっている.

この整礎的半順序集合における超限再帰的定義によって, 各 $s \in T$ に順序数 $|s|_T$ を

$$|s|_T = \sup\{\, |t|_T + 1 : t \prec_T s \,\}$$

をみたすように定義できる. $|\ |_T$ を T 上のランク関数といい, 値の最大値

$$\|T\| = |()|_T$$

を整礎木 T のランクという.

整礎木のランク関数

ω 上の木 T が整礎木であるための必要十分条件は, 順序数値関数

$$\varphi\colon T \to \mathrm{Ord}$$

で狭義順序保存

$$t \prec_T s \Rightarrow \varphi(t) < \varphi(s)$$

をみたすものが存在することである. このとき,

$$|s|_T \leq \varphi(s)$$

となる. (ランク関数は最小の狭義順序保存順序数値関数である)

整礎木のランク関数

ω 上の整礎木のランクは可算順序数である. 各可算順序数 ξ に対して,

$$\mathrm{WF}_\xi = \{\, T \in \mathrm{WF} : \|T\| < \xi \,\}$$

と定義する. $\mathrm{WF} = \bigcup_{\xi<\aleph_1} \mathrm{WF}_\xi$ となる.

次の補題が重要.

補題 (予稿: 補題 30)

すべての可算順序数 ξ について WF_ξ はボレル集合である.

これは ξ にかんする超限帰納法で証明できる.

補題の証明の概略

(1) WF_0 は, 空な木 (TR の孤立点) だけからなる集合なので, 開かつ閉集合で, したがってボレル集合.

(2) WF_η がボレル集合なら,

$$\mathrm{WF}_{\eta+1} = \mathrm{WF}_\eta \cup \bigcap_{s \in \mathrm{Seq}_\omega \setminus \{()\}} \{\, T \in \mathrm{TR} : T/s \in \mathrm{WF}_\eta \,\}$$

で, $T \mapsto T/s$ は連続写像なので, $\mathrm{WF}_{\eta+1}$ もボレル集合.

(3) ξ が可算な極限順序数ですべての $\eta < \xi$ について WF_η がボレル集合なら,

$$\mathrm{WF}_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} \mathrm{WF}_\eta$$

なので WF_ξ もボレル集合.

ルジンの分離定理・スリンの定理

整礎木のランク関数

木のランクの比較について, TR 上の二項関係

$$T_0 \leqslant^*_{\mathrm{WF}} T_1 \Leftrightarrow T_0 \in \mathrm{WF} \wedge [\, T_1 \notin \mathrm{WF} \vee \|T_0\| \leq \|T_1\| \,]$$
$$T_0 <^*_{\mathrm{WF}} T_1 \Leftrightarrow T_0 \in \mathrm{WF} \wedge [\, T_1 \notin \mathrm{WF} \vee \|T_0\| < \|T_1\| \,]$$

は, いずれも $\mathrm{TR} \times \mathrm{TR}$ の補解析集合である. (予稿: 補題 27)

この事実を用いて, 次の補題がいえる:

ルジンの分離定理

有界性補題 (予稿: 補題 29)

$A \subseteq \mathrm{WF}$ かつ A が解析集合のとき,
ある可算順序数 ξ について $A \subseteq \mathrm{WF}_\xi$ となる.

このことと, 各 WF_ξ がボレル集合であることから,

ルジンの分離定理 (予稿: 定理 31)

A_0 と A_1 が互いに交わりのない解析集合のとき, ボレル集合 B を

$$A_0 \subseteq B, \quad \text{かつ} \quad B \cap A_1 = \emptyset$$

となるようにとれる.

スリンの定理

ルジンの分離定理を, A_0 と A_1 が互いの補集合である場合に適用すれば,

スリンの定理 (予稿: 定理 32)

ポーランド空間 X の部分集合 A がボレル集合であるための必要十分条件は, A と補集合 $X \setminus A$ がともに解析集合であることである.

すなわち,

$$\mathcal{B}_X = \mathbf{\Delta}^1_1$$

となっている.

ルジンの単射定理

ルジンの分離定理からのもうひとつの重要な帰結,

ルジンの単射定理 (予稿: 定理 34)

X と Y がポーランド空間, $f\colon X \to Y$ がボレル可測写像, $B \subseteq X$ がボレル集合で, f が B 上単射であるとき, 像 $f[B]$ は Y のボレル集合である.

したがってとくに,

ボレル可測写像の条件

ポーランド空間の写像 $f\colon X \to Y$ がボレル可測写像であるためには, グラフ

$$\mathrm{Graph}(f) = \{\, (x, y) : y = f(x),\ x \in X \,\}$$

が $X \times Y$ のボレル集合であることが必要かつ十分である.

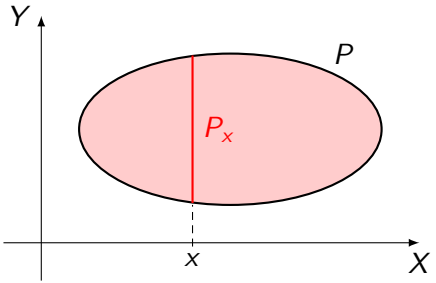
一意化の問題

切り口と射影

直積集合 $X \times Y$ の部分集合 P と $x \in X$ について

$$P_x = \{\, y \in Y : (x, y) \in P \,\}$$

を P の x における切り口 (section) という.

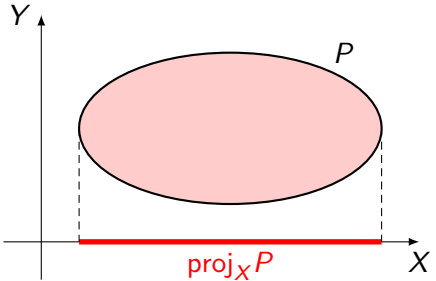


切り口と射影

直積集合 $X \times Y$ の部分集合 P について

$$\mathrm{proj}_X P = \{\, x \in X : P_x \neq \emptyset \,\}$$

を P の X への射影 (projection) という.

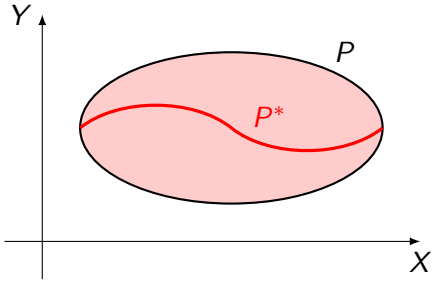


一意化

直積集合 $X \times Y$ の部分集合 P と P^* があって,

- $P^* \subseteq P$,
- $\mathrm{proj}_X P^* = \mathrm{proj}_X P$,
- どの切り口 P^*_x も高々 1 点のみからなる

となっているとき, P^* は P の一意化 (uniformization) であるという.



一意化の問題

選択公理によればどんな $P \subseteq X \times Y$ もなんらかの一意化をもつが,

公理により存在を保証される一意化にはなんの情報もなく,

その素性はまったくわからない

一意化の問題 (アダマール)

与えられた集合 $P \subseteq X \times Y$ に対し
一意化 P^* を実効的 (エフェクティブ) に与えること

いろいろな一意化定理

いろいろなクラスの集合の一意化が記述集合論の重要な問題になってきた.

- $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$ の閉集合で, 解析集合では一意化できないものがある.
- 解析集合は, 解析集合の差集合の可算和で一意化できる.
- 補解析集合は補解析集合で一意化できる. (ノヴィコフ-近藤の定理)
- すべての切り口が高々可算集合であるようなボレル集合はボレル集合で一意化できる. (ルジン-ノヴィコフの定理)
- すべての切り口が σ-コンパクト集合であるようなボレル集合はボレル集合で一意化できる. (アルゼニン-功力の定理)

この講義では, ノヴィコフ-近藤の定理とルジン-ノヴィコフの定理の証明を紹介したい.