ボレル集合の一意化問題とその応用 (その 2)

藤田 博司

愛媛大学大学院理工学研究科

2026 年 3 月 13 日〜17 日
Logic Winter School 2026

RP 空間

RP 空間

距離空間 (X, d) に点列 $(q_i^X : i \in \omega)$ が与えられていて,

1. 距離関数 $d(\ ,\ )$ は完備である;
2. 集合 $\{q_0^X, q_1^X, q_2^X, \dots, \}$ は X において稠密である;
3. 非負整数 i, j, k, ℓ にかんする 4 項関係としての

$$d(q_i^X, q_j^X) < \frac{k}{\ell+1} \quad \text{と} \quad d(q_i^X, q_j^X) \leq \frac{k}{\ell+1}$$

は計算可能である

という条件をみたすとき, $(X, d, (q_i^X : i \in \omega))$ をひとつの再帰的表示付き空間 (recursively presented space, 以下 RP 空間) という.

RP 空間

定義から明らかに, RP 空間はポーランド空間である.

すべてのポーランド空間が RP 空間になるわけではないが,

数学の実践で出会ういろいろの具体的なポーランド空間は, どれも RP 空間になっている.

RP 空間の例

前回紹介したポーランド空間の例はどれも RP 空間になる:

- 可算な離散距離空間としての $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
- 通常の距離の入ったユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...,
- ベール空間　　$\mathcal{N} = {}^{\omega}\omega = \omega \times \omega \times \omega \times \cdots$,
- カントール空間 $\mathcal{C} = {}^{\omega}\{0, 1\} = 2 \times 2 \times 2 \times \cdots$,

標準的な開基

$(X, d, (q_i^X : i \in \omega))$ を RP 空間とする.

$k = 1, 2, 3, \ldots$ に対しては $k = 2^i(2j+1)$ をみたす i, j が一意に定まるから, q_i^X の $1/(j+1)$-近傍を N_k^X とする.

また, $N_0^X = \emptyset$ とする.

集合族 $\{ N_k^X : k = 0, 1, 2, \ldots \}$ は X の開基となる.

開集合と Σ^0_1 集合

RP 空間 X の開集合 A はすべて, ある $\alpha \in \mathcal{N}$ について

$$A = \bigcup_{n \in \omega} N^X_{\alpha(n)}$$

の形で得られる. また, この形の集合 A は開集合である.

ここでとくに α として計算可能関数 (再帰的関数) がとれるとき,
A は Σ^0_1 集合であるという. ←細字体

算術的集合の階層

Σ^0_1 集合は開集合だが, その逆はいえない.

Σ^0_1 集合の補集合のことを Π^0_1 集合という.

Π^0_1 集合は閉集合だが, その逆はいえない.

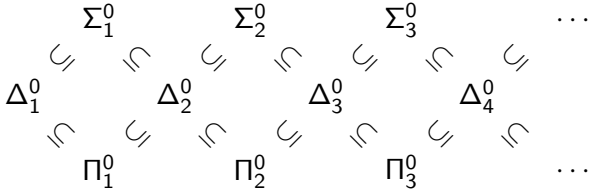
算術的集合の階層

すべての RP 空間で Σ^0_k と Π^0_k が定義できたとして,
$X \times \omega$ の Π^0_k 集合の X への射影として得られる集合のことを
Σ^0_{k+1} 集合といい, その補集合のことを Π^0_{k+1} 集合という.

Σ^0_k 集合でありかつ Π^0_k 集合でもある集合のことを Δ^0_k 集合という.

算術的集合の階層

集合族としての Σ^0_n, Π^0_n, Δ^0_n には次のような包含関係がある:



無限個の要素からなる RP 空間においてはどの $\subseteq$ においても等号が成立しない.

これらの集合族のどれかに属するような X の部分集合は算術的集合 (arithmetical set) と呼ばれる.

再帰的写像と算術的写像

ふたつの RP 空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ が Σ^0_n-再帰的であるとは, $x \in X$ と $k \in \omega$ の関係

$$f(x) \in N_k^Y$$

が $X \times \omega$ の Σ^0_n 集合になっていることをいう. Σ^0_1-再帰的写像のことを単に再帰的写像といい, どれかの n について Σ^0_n-再帰的である写像のことを算術的写像という.

再帰的写像と算術的写像

再帰的写像は連続写像である. 次の重要な結果がある.

補題 (予稿: 補題 50)

孤立点のない RP 空間 X に対して写像 $f_X : \mathcal{N} \to X$ と $i_X : X \to \mathcal{N}$ が存在して次をみたす:

1. f_X は再帰的な全射である;
2. i_X は算術的な単射である;
3. $f_X \circ i_X = \mathrm{id}_X$ となる;
4. 値域 $i_X[X]$ は $\mathcal{N}$ の算術的集合である.

(実は i_X は Σ^0_2-再帰的で, $i_X[X]$ は Π^0_2 集合にとれる.)

Σ^1_1 と Π^1_1

RP 空間 X の部分集合 A に対してつぎの (1)〜(4) は同値である:

1. $X \times \mathrm{Seq}_\omega$ の Π^0_1 集合であるようなススリン系が存在して, A はその核である.
2. $X \times \mathrm{Seq}_\omega$ の 算術的集合であるようなススリン系が存在して, A はその核である.
3. ベール空間 $\mathcal{N}$ からの再帰的写像による Π^0_1 集合の像である.
4. $X \times \mathcal{N}$ の Π^0_1 集合の X への射影である.

(補講: 補題 46+命題 48)

これらの条件をみたす A を X の Σ^1_1 集合という.

Σ^1_1 集合の補集合を Π^1_1 集合とよぶ.

Σ^1_1 でありかつ Π^1_1 でもある集合を Δ^1_1 集合という.

Σ^1_1 と Π^1_1

定義から, Σ^1_1 集合は解析集合だが, その逆はいえない.

Π^1_1 集合は補解析集合だが, その逆はいえない.

Δ^1_1 集合はボレル集合だが, その逆はいえない.

点集合族の閉包性

Σ^0_n, Π^0_n, Δ^0_n, Σ^1_1, Π^1_1, Δ^1_1 はどれも有限の $\cup$ と $\cap$ や, 再帰的写像の逆像をとる操作のもとで閉じている. そのほかの閉包性をまとめると

	$\exists^\omega$	$\forall^\omega$	$\exists^{\mathcal{N}}$	$\forall^{\mathcal{N}}$	$\neg$
Σ^0_n	◯	×	×	×	×
Π^0_n	×	◯	×	×	×
Δ^0_n	×	×	×	×	◯
Σ^1_1	◯	◯	◯	×	×
Π^1_1	◯	◯	×	◯	×
Δ^1_1	◯	◯	×	×	◯

となる. ただし, $\exists^\omega$ は $X \times \omega$ から X への射影, $\exists^{\mathcal{N}}$ は $X \times \mathcal{N}$ から X への射影, $\forall^\omega$ と $\forall^{\mathcal{N}}$ はそれらの双対操作, $\neg$ は補集合を意味する.

相対化

相対化の発想

RP 空間 X の任意の開集合 A は, ある $\alpha \in \mathcal{N}$ について

$$A = \bigcup_{n \in \omega} N^X_{\alpha(n)}$$

の形で得られるのだった. そこで, $\mathcal{N} \times X$ の部分集合 G を

$$G = \{\, (\alpha, x) : (\exists n)[x \in N^X_{\alpha(n)}] \,\}$$

と定義すれば, X の任意の開集合は G のある切り口 G_α として得られることになる.

しかも G 自身は $\mathcal{N} \times X$ の Σ^0_1 集合である.

相対化の定義

Γ を Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_1, Π^1_1 のどれかとする.

$Y_0, \ldots, Y_{r-1}$ と X を RP 空間とする.

X の部分集合 A が直積 RP 空間 $Y_0 \times \cdots \times Y_{r-1} \times X$ の Γ 集合 P の $(y_0, \ldots, y_{r-1}) \in Y_0 \times \cdots \times Y_{r-1}$ における切り口

$$A = P_{y_0, \ldots, y_{r-1}}$$

として得られるならば, A は X の $\Gamma(y_0, \ldots, y_{r-1})$ 集合であるという.

点集合族 $\Gamma(y_0, \ldots, y_{r-1})$ のことを, Γ の $y_0, \ldots, y_{r-1}$ への相対化 (relativization) という.

細字体集合族と太字体集合族

さらに, すべての $\alpha \in \mathcal{N}$ への相対化の和集合を

$$\mathbf{\Gamma} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \Gamma(\alpha)$$

と太字体であらわす.

このとき $\mathbf{\Sigma}^0_1$ は開集合の全体, $\mathbf{\Pi}^0_1$ は閉集合の全体, $\mathbf{\Sigma}^0_2$ は F_σ 集合の全体, $\mathbf{\Pi}^0_2$ は G_δ 集合の全体, 等となる.

この定義での $\mathbf{\Sigma}^1_1$ は解析集合の全体と一致し, $\mathbf{\Pi}^1_1$ は補解析集合の全体と一致するので, 第 1 回の講義での定義と整合している.

細字体集合族と太字体集合族

注意:

Δ^1_1 の相対化 $\Delta^1_1(y_0, \ldots, y_{r-1})$ は,
$\Sigma^1_1(y_0, \ldots, y_{r-1})$ と $\Pi^1_1(y_0, \ldots, y_{r-1})$ の共通部分として改めて定義する.

これは一般に, Δ^1_1 集合の $y_0, \ldots, y_{r-1}$ への相対化より広くなる.

細字体 Δ^1_1 集合の相対化の全体は, 太字体 $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ とは一致しない.

Δ^0_n と $\boldsymbol{\Delta}^0_n$ についても同様.

相対化の効用

細字体集合族 (たとえば Π^0_1) の構造や性質を,

計算可能性理論 (再帰理論) の手法を駆使して証明しておいてから,

相対化を考えることで,

太字体集合族 (たとえば閉集合全体) の構造や性質が理解できる.

ふたたび WF について

第 1 回の講義で紹介した整礎木の全体 WF は Π^1_1 集合である.

Π^1_1 集合であることと, 算術的写像による WF の逆像であることは同値である.

また, 第 1 回の講義で定義した二項関係

$$T_0 \leqslant^*_{\mathrm{WF}} T_1 \Leftrightarrow T_0 \in \mathrm{WF} \wedge [\, T_1 \notin \mathrm{WF} \vee \|T_0\| \leq \|T_1\| \,]$$
$$T_0 <^*_{\mathrm{WF}} T_1 \Leftrightarrow T_0 \in \mathrm{WF} \wedge [\, T_1 \notin \mathrm{WF} \vee \|T_0\| < \|T_1\| \,]$$

は, いずれも $\mathrm{TR} \times \mathrm{TR}$ の Π^1_1 集合である.

ノヴィコフ-近藤-アディソンの定理

定理の主張

ノヴィコフ-近藤-アディソンの定理

Π^1_1 集合は Π^1_1 集合で一意化できる. すなわち, 直積 RP 空間 $X \times Y$ の Π^1_1 集合 P に対して Π^1_1 集合 P^* が存在して,

- $P^* \subseteq P$,
- $\mathrm{proj}_X P^* = \mathrm{proj}_X P$,
- すべての $x \in X$ について切り口 P^*_x は高々 1 点からなる

をみたす.

相対化によりただちに, 補解析集合は補解析集合で一意化できるという結果が得られる.

定理の証明 (1/7)

$X = Y = \mathcal{N}$ の場合を証明する.

非負整数の有限列全体 Seq_ω の計算可能で 1 対 1 の数え上げ $(s_n : n \in \omega)$ を,

- $\mathrm{lh}(s_n) \leq n$,
- $s_m \subseteq s_n \Rightarrow m \leq n$

となるようにとっておく.

Π^1_1 集合 $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ が与えられたとして, 再帰的写像 $(\alpha, \beta) \mapsto T_{\alpha,\beta}$ を

$$P(\alpha, \beta) \Leftrightarrow T_{\alpha,\beta} \in \mathrm{WF}$$

となるようにとれる. (ここは本当は少し議論が必要)

定理の証明 (2/7)

$P_\alpha \neq \emptyset$ であるような α を固定する.

- $\xi_0 = \min\{ \|T_{\alpha,\beta}\| : \beta \in P_\alpha \}$ とする.
- $\|T_{\alpha,\beta}\| = \xi_0$ をみたす β を含む直径 1 以下の基本開集合 N_k の番号の最小値を k_0 とする.
- $A_0 = \{ \beta \in P_\alpha \cap N_k : \|T_{\alpha,\beta}\| = \xi_0 \}$ とする.

定理の証明 (3/7)

ξ_i と k_i と A_i が定まったとして, 次のように定める:

- $\xi_{i+1} = \min\{ \|T_{\alpha,\beta}/s_{i+1}\| : \beta \in A_i \}$ とする.
- $\|T_{\alpha,\beta}/s_{i+1}\| = \xi_{i+1}$ をみたす β を含む直径 $2^{-(i+1)}$ 以下の基本開集合 N_k のうち, 閉包が N_{k_i} に含まれるものの番号の最小値を k_{i+1} とする.
- $A_{i+1} = \{ \beta \in A_i \cap N_{k_{i+1}} : \|T_{\alpha,\beta}\| = \xi_{i+1} \}$ とする.

すると,

$$A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$$

各 A_i は空でなくて, 直径は 2^{-i} 以下となる.

定理の証明 (4/7)

$\beta_i \in A_i$ をとると, 点列 $(\beta_i : i \in \omega)$ はコーシー列なので収束する:

$$\beta_\infty = \lim_{i \to \infty} \beta_i.$$

対応 $(\alpha, \beta) \mapsto T_{\alpha,\beta}$ は再帰的なので連続であり, したがって各 $n \in \omega$ ごとに番号 i_n がとれて,

$$s_n \in T_{\alpha,\beta_\infty} \Leftrightarrow (\forall i \geq i_n)[s_n \in T_{\alpha,\beta_i}]$$
$$s_n \notin T_{\alpha,\beta_\infty} \Leftrightarrow (\forall i \geq i_n)[s_n \notin T_{\alpha,\beta_i}]$$

となる.

定理の証明 (5/7)

$s_m, s_n \in T_{\alpha,\beta_\infty}$ を $s_m \subsetneq s_n$ となるようにとったとしよう. $i \geq \max\{i_m, i_n, m, n\}$ とすると,

$$\xi_m = \|T_{\alpha,\beta_i}/s_m\| = |s_m|_{T_{\alpha,\beta_i}} > |s_n|_{T_{\alpha,\beta_i}} = \|T_{\alpha,\beta_i}\| = \xi_n$$

であるから, 対応 $s_n \mapsto \xi_n$ は $(T_{\alpha,\beta_i}, \prec_{T_{\alpha,\beta_\infty}})$ 上の狭義順序保存の順序数値関数である. よって T_{α,β_∞} も整礎木であり, $P(\alpha, \beta_\infty)$ が成立する. ランク関数は最小の狭義順序保存順序数値関数なので, $s_n \in T_{\alpha,\beta_\infty}$ のとき

$$|s_n|_{T_{\alpha,\beta_\infty}} = \|T_{\alpha,\beta_\infty}/s_n\| \leq \xi_n$$

であるが, ξ_n の最小性から $\|T_{\alpha,\beta_\infty}/s_n\| = \xi_n$ となり, $\beta_\infty \in A_n$ がわかる. (ここはこの議論を n の小さい順から帰納法で繰り返す必要がある.)

定理の証明 (6/7)

以上の議論から $\{\beta_\infty\} = \bigcap_{i\in\omega} A_i$ である. このように最小化の手順を繰り返すことで P_α から要素 β_∞ を選ぶことができる. あとは, この手順を式で書くだけ. まず $\beta \in A_i$ であることを次のように Π^1_1 で書ける:

$$
\begin{aligned}
R(\alpha,\beta,i) \Leftrightarrow & P(\alpha,\beta) \wedge (\forall\gamma)\big[\, T_{\alpha,\beta}/s_i \leqslant^*_{\mathrm{WF}} T_{\alpha,\gamma}/s_i \,\big] \\
& \wedge (\exists u \in \mathrm{Seq}_\omega)\Big[\mathrm{lh}(u) = i+1 \wedge \forall(j \le i)\big[\\
& \quad [j>0 \Rightarrow \overline{N^{\mathcal{N}}_{u(j)}} \subseteq N^{\mathcal{N}}_{u(j-1)}] \\
& \quad \wedge \mathrm{diam}(N^{\mathcal{N}}_{u(j)}) \le 2^{-j} \wedge \beta \in N^{\mathcal{N}}_{u(j)} \\
& \quad \wedge (\forall k < u(j))[\\
& \qquad \mathrm{diam}(N^{\mathcal{N}}_k) \le 2^{-j} \Rightarrow (\forall\gamma)[z \in N^{\mathcal{N}}_k \Rightarrow T_{\alpha,\beta}/s_j <^*_{\mathrm{WF}} T_{\alpha,\gamma}/s_j] \\
& \quad]\big]\Big]
\end{aligned}
$$

定理の証明 (7/7)

そこで P^* を

$$P^*(\alpha, \beta) \Leftrightarrow (\forall i) R(\alpha, \beta, i)$$

と定めれば, この P^* が P を一意化する Π^1_1 集合となる. (証明終)