ボレル集合の一意化問題とその応用 (その 3)

藤田 博司

愛媛大学大学院理工学研究科

2026 年 3 月 13 日〜17 日
Logic Winter School 2026

Δ^1_1-再帰的要素

Γ-再帰的要素の定義

以下の議論では, Γ を細字体の点集合族 (Σ^0_n, Π^0_n, Δ^0_n, Σ^1_1, Π^1_1, Δ^1_1, のどれか, またはその相対化) とする.

RP 空間 X の点 x が Γ-再帰的要素であるとは, ω の部分集合

$$G^x = \{\, k \in \omega : x \in N^X_k \,\}$$

が Γ に属することをいう. (1 点のみからなるトリヴィアルな RP 空間 $\{*\}$ を定義域とする Γ-再帰的写像と考えることもできる.)

ベール空間の Δ^1_1 要素について

$\mathcal{N}$ の点 α が Σ^0_1-再帰的要素であることと,
ω 上の関数として計算可能であることとは同値である.

同様に α が Δ^1_1-再帰的要素であることと,
ω から ω への Δ^1_1-再帰的写像であることとは同値である.

どれかの n について Σ^0_n-再帰的要素である点を算術的要素という.

Δ^1_1-再帰的要素について

補題

RP 空間 X の点 x について次の (1)〜(5) は同値である.

1. x は Δ^1_1-再帰的要素である;
2. x は Σ^1_1-再帰的要素である;
3. x は Π^1_1-再帰的要素である;
4. $\{x\}$ は Δ^1_1 集合である;
5. $\{x\}$ は Σ^1_1 集合である.

証明の概略

(1) → (2) と (1) → (3) はあきらか. (3) → (4) は,

$$\begin{aligned} y = x &\Leftrightarrow (\forall k)[\, y \in N^X_k \vee k \notin G^x \,] \\ &\Leftrightarrow (\forall k)[\, y \notin N^X_k \vee k \in G^x \,] \end{aligned}$$

なのでわかる. (2) → (4) も同様.
(4) → (5) はあきらか.
(5) → (1) は,

$$\begin{aligned} k \in G^x &\Leftrightarrow (\exists y)[\, y \in \{x\} \wedge y \in N^X_k \,] \\ &\Leftrightarrow (\forall y)[\, y \notin \{x\} \vee y \in N^X_k \,] \end{aligned}$$

なのでいえる.

注意. $\{x\}$ が Π^1_1 集合であることは, (1)〜(5) よりずっと弱い条件である.

Δ^1_1-再帰的要素について

まったく同様に次のことがいえる.

補題*

RP 空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ について次の (1)〜(5) は同値である.

1. f は Δ^1_1-再帰的写像である;
2. f は Σ^1_1-再帰的写像である;
3. f は Π^1_1-再帰的写像である;
4. $\mathrm{Graph}(f)$ は Δ^1_1 集合である;
5. $\mathrm{Graph}(f)$ は Σ^1_1 集合である.

ここでも, $\mathrm{Graph}(f)$ が Π^1_1 であることはもっと弱い条件になる.

Δ^1_1-再帰的要素について

命題

P が $\omega \times \omega$ の Π^1_1 集合で,

$$(\forall k)(\exists i)P(k,i)$$

をみたすとき, $\mathcal{N}$ のある Δ^1_1 再帰的要素 α について

$$(\forall k)P(k,\alpha(k))$$

となる.

命題の証明

P を一意化する Π^1_1 集合 P^* をとれば, これがある関数 $\alpha\colon \omega \to \omega$ のグラフになっていて, この α は

$$s \subseteq \alpha \Leftrightarrow (\forall k < \mathrm{lh}(s))P^*(k, s(k)) \quad (s \in \mathrm{Seq}_\omega)$$

をみたすから Π^1_1-再帰的要素であり, 補題により Δ^1_1-再帰的要素である.

Π^1_1-再帰的部分写像

Γ-再帰的部分写像の定義

f が X から Y への部分写像であることを

$$f : X \dashrightarrow Y$$

と書くことにする.

要素 $x \in X$ が部分写像 $f : X \dashrightarrow Y$ の定義域に属することを

$$f(x)\downarrow$$

と書くことにする.

Γ-再帰的部分写像の定義

RP 空間の間の部分写像 $f : X \dashrightarrow Y$ が Γ-再帰的部分写像であるとは,

- 定義域 $\mathrm{Domain}(f)$ が X の Γ 集合である;
- $X \times \omega$ の部分集合

$$G^f = \{ (x, k) : f(x)\downarrow \wedge f(x) \in N_k^Y \}$$

が Γ 集合である

の 2 条件をみたすことをいう.

Γ が $\exists^\omega$ のもとで閉じていれば 1 つ目の条件は冗長.

Γ-再帰的部分写像の定義

再帰理論 (計算可能性理論) でいう計算可能部分関数は,

$\omega^\ell \times \mathcal{N}^m$ から ω への Σ^0_1-再帰的部分写像にほかならない.

以下の議論では, Π^1_1-再帰的部分写像が活躍する.

Π^1_1-再帰的部分写像について

$f\colon X \dashrightarrow Y$ が Π^1_1-再帰的部分写像で, 定義域 $\mathrm{Domain}(f)$ が Δ^1_1 集合であれば, (補題の論法により) f は Δ^1_1-再帰的部分写像である.

Π^1_1-再帰的部分写像について

次の補題が重要である.

Π^1_1-再帰的部分写像の代入補題

P を Y の Π^1_1 集合とし, $f : X \dashrightarrow Y$ を Π^1_1-再帰的部分写像とするとき,

$$Q(x) \Leftrightarrow f(x)\downarrow \wedge P(f(x))$$

で定まる Q は X の Π^1_1 集合である. (多変数の述語へ複数の部分写像を代入する場合についても同様である)

これは

$$f(x)\downarrow \wedge P(f(x)) \Leftrightarrow f(x)\downarrow \wedge (\forall y)\big[(\exists k)[y \notin N^Y_k \wedge f(x) \in N^Y_k] \vee P(y)\big]$$

なのでわかる.

Π^1_1-再帰的部分写像について

代入補題と Π^1_1-再帰的部分写像の定義により,

Π^1_1-再帰的部分写像どうしの合成はまた Π^1_1-再帰的部分写像になる.

普遍集合

Σ^0_1 に対する普遍集合

$(\Phi_e : e \in \omega)$ を, ω 上の計算可能部分関数の標準的な数え上げとし, Φ_e の定義域を W_e と書くと, $(W_e : e \in \omega)$ が ω の Σ^0_1 部分集合, すなわち計算可能的枚挙可能集合 (computably enumerable set, CE 集合) の標準的な数え上げになる.

RP 空間 X に対して,

$$U^X = \{ (e, x) \in \omega \times X : (\exists k)[\, k \in W_e \wedge x \in N^X_k \,] \}$$

によって $\omega \times X$ の部分集合 U^X を定義しよう.

すると U^X は Σ^0_1 集合であり, X のすべての Σ^0_1 集合が U^X の切り口 U^X_e として得られることになる. このような U^X を X の Σ^0_1 集合に対する普遍集合という.

Σ^0_{n+1} に対する普遍集合

U^X が X の Σ^0_1 集合に対する普遍集合だとすると, その補集合 $\neg U^X$ は X の Π^0_1 集合に対する普遍集合となる. すなわち, $\neg U^X$ は $\omega \times X$ の Π^0_1 集合であり, かつ X のすべての Π^0_1 集合が $\neg U^X$ の切り口 $\neg U^X_e$ として得られる.

次に

$$U^X_2 = \{\, (e,x) \in \omega \times X : (\exists k)[\, (e,x,k) \notin U^{X \times \omega}\,]\,\}$$

を考えると, これが X の Σ^0_2 集合に対する普遍集合となる. 以下同様に, すべての Σ^0_n と Π^0_n に対する普遍集合が得られる.

注意. Δ^0_n に対する普遍集合は存在しない.

Π^1_1 に対する普遍集合

同様の発想で

$$V^X = \{\, (e,x) \in \omega \times X : (\forall \alpha)[(e,x,\alpha) \in U^{X \times \mathcal{N}}] \,\}$$

を考えると, これが X の Π^1_1 集合に対する普遍集合である. すなわち V^X は $\omega \times X$ の Π^1_1 集合であり, かつ, X のすべての Π^1_1 集合が, V^X の切り口 V^X_e として得られる.

V^X の補集合は X の Σ^1_1 集合に対する普遍集合になる. Δ^1_1 に対する普遍集合は存在しない.

Δ^1_1-再帰的要素の数え上げ定理

数え上げ定理

定理 (予稿: 定理 58)

X と Y を RP 空間とする. 次の条件をみたす Π^1_1-再帰的部分写像 $\boldsymbol{d}^{X,Y} : \omega \times X \dashrightarrow Y$ が存在する. すべての $x \in X$ について, 集合

$$\left\{ \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x) : e \in \omega \wedge \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\downarrow \right\}$$

が Y の $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素全体と一致する.

数え上げ定理の証明 (1/4)

まず $Y = \mathcal{N}$ の場合を示す.
$X \times \omega \times \omega$ の Π^1_1 集合に対する普遍集合 $V^{X\times\omega\times\omega}$ を一意化することにより,

- $V^* \subseteq V^{X\times\omega\times\omega}$;
- $(\exists j)V^{X\times\omega\times\omega}(e,x,i,j) \Leftrightarrow (\exists j)V^*(e,x,i,j)$;
- $V^*(e,x,i,j) \wedge V^*(e,x,i,k) \Rightarrow j = k$;

をみたす Π^1_1 集合 V^* がとれる.

$$(\forall i)(\exists j)V^{X\times\omega\times\omega}(e,x,i,j)$$

をみたす (e,x) を固定するたびに, i に $V^*(e,x,i,j)$ をみたす一意的な j を対応させる関数 $\alpha \in \mathcal{N}$ が定まる. この α を $\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x)$ と定める.

数え上げ定理の証明 (2/4)

したがって

$$\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x)\downarrow \Leftrightarrow (\forall i)(\exists j)V^{X\times\omega\times\omega}(e,x,i,j)$$

である. そして $\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x)\downarrow$ のときは $s \in \mathrm{Seq}_\omega$ に対して

$$s \subseteq \boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x) \Leftrightarrow (\forall i < \mathrm{lh}(s))V^*(e,x,i,s(i))$$

である. したがって $\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}$ は Π^1_1-再帰的部分写像である.

$\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e,x)\downarrow$ のときこの値が $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素になることは最初の補題と同様にしてわかる.

数え上げ定理の証明 (3/4)

$\alpha \in \mathcal{N}$ が $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素のとき, $\alpha(i) = j$ が i と j の関係として $\Delta^1_1(x)$ なので, ある $e \in \omega$ について,

$$\alpha(i) = j \Leftrightarrow V^{X \times \omega \times \omega}(e, x, i, j)$$

であるが, この場合各 i に対して j は $\alpha(j)$ ただ一つなので,

$$\alpha(i) = j \Leftrightarrow V^{*}(e, x, i, j)$$

したがって $\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}(e, x) = \alpha$ となる.

数え上げ定理の証明 (4/4)

一般の RP 空間 Y に対しては算術的な連続全射 $f_Y : \mathcal{N} \to Y$ と算術的な単射 $i_Y : Y \to \mathcal{N}$ で $f_Y \circ i_Y = \mathrm{id}_Y$ となるものがあるのだった. そこで, $\boldsymbol{d}^{X,\mathcal{N}}$ と f_Y の合成写像を $\boldsymbol{d}^{X,Y}$ と定めればよい. (証明終)

数え上げ定理の帰結 (1/3)

《y が Y の $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素である》ということを

$$y \in \Delta^1_1(x)$$

と表記することにしよう. この関係は

$$y \in \Delta^1_1(x) \Leftrightarrow (\exists e \in \omega)\big[\boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\downarrow \wedge (\forall k)[y \notin N^Y_k \vee \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x) \in N^Y_k]\big]$$

と書けるので Π^1_1 である.

数え上げ定理の帰結 (2/3)

$P(x,y)$ が $X \times Y$ の Π^1_1 集合だったとき,

$$Q(x) \Leftrightarrow (\exists y \in \Delta^1_1(x))P(x,y)$$

で定まる $Q(x)$ は

$$Q(x) \Leftrightarrow (\exists e \in \omega)\left[\boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\downarrow \wedge P(x, \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x))\right]$$

と書けるので, 代入補題により Π^1_1 である.

数え上げ定理の帰結 (3/3)

次の補題では $\beta \in \mathcal{N}$ と $i \in \omega$ に対して $j \mapsto \beta(2^i(2j+1))$ という関数を $(\beta)_i$ と書いている.

Δ^1_1 可算選択補題 (予稿: 補題 61)

P が $\omega \times \mathcal{N}$ の Π^1_1 集合で $(\forall i)(\exists \alpha \in \Delta^1_1) P(i, \alpha)$ をみたすとき, $\mathcal{N}$ のある Δ^1_1-再帰的要素 β について $(\forall i) P(i, (\beta)_i)$ となる.

この補題は, i と e の関係

$$\boldsymbol{d}^{\omega,\mathcal{N}}(e,0)\downarrow \wedge P(i, \boldsymbol{d}^{\omega,\mathcal{N}}(e,0))$$

を一意化することで示される. 詳細は略す.

Δ^1_1 集合による一意化

解析集合で一意化できない閉集合

数え上げ定理からの帰結として $\mathcal{N}$ 上の 2 項関係 $\beta \notin \Delta^1_1(\alpha)$ は Σ^1_1 なので, $\mathcal{N}^3$ のある Π^0_1 集合 C により,

$$\beta \notin \Delta^1_1(\alpha) \Leftrightarrow (\exists\gamma)C(\alpha, \beta, \gamma)$$

となる. この C を用いて

$$P(\alpha, \beta) \Leftrightarrow C(\alpha, (\beta)_0, (\beta)_1)$$

と定めよう. P は $\mathcal{N}^2$ の Π^0_1 集合で, $(\forall\alpha)(\exists\beta)P(\alpha, \beta)$ となっている.

解析集合で一意化できない閉集合

この P を一意化する解析集合 P^* があったとする.

P^* が $\Sigma^1_1(\varepsilon)$ だったとして, 切り口 P^*_ε のただ一つの要素を β とする.

すると $P^*_\varepsilon = \{\beta\}$ なので β は最初に述べた補題により $\Delta^1_1(\varepsilon)$-再帰的要素である.

したがって $(\beta)_0$ も $\Delta^1_1(\varepsilon)$-再帰的要素ということになるが, このとき $P(\varepsilon, \beta)$ より $C(\varepsilon, (\beta)_0, (\beta)_1)$ なので $(\beta)_0 \notin \Delta^1_1(\varepsilon)$ となって矛盾する.

したがって, P は解析集合で一意化できない閉集合の例となっている.

一般にボレル集合はボレル集合で一意化できるとは限らない.

ボレル集合で一意化できる条件

$X \times Y$ のボレル集合 P がボレル集合 P^* で一意化できたとする.

P^* が $\Delta^1_1(\varepsilon)$ だったとすると, 各 $x \in \mathrm{proj}_X P$ に対して, P^*_x の一意的な要素は Y の $\Delta^1_1(\varepsilon, x)$-再帰的要素だということになる.

したがってもとから, P_x に $\Delta^1_1(\varepsilon, x)$-再帰的要素が存在していたのでなければならない.

ボレル集合で一意化できる条件

ボレル集合 P がボレル集合で一意化できるならば, ある $\varepsilon \in \mathcal{N}$ が存在して, すべての $x \in X$ について, 切り口 P_x は空でなければ $\Delta^1_1(\varepsilon, x)$-再帰的要素を含む.

この条件は, 実は十分条件でもある.

ボレル集合で一意化できる条件

簡単のため細字体版の結果を述べる. しかるべく相対化すればボレル集合に関する結果が得られる.

Δ^1_1 集合で一意化できる必要十分条件 (予稿: 定理 69)

直積 RP 空間 $X \times Y$ の Δ^1_1 集合 P が Δ^1_1 集合 P^* で一意化できるための必要十分条件は, 各 $x \in X$ について, P_x が空でなければ $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素を含むことである.

定理の証明

条件が必要であることはすでに示したとおりである.

いま P が $X \times Y$ の Δ^1_1 集合で, 各 P_x は空であるかまたは $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素を含むとする.

$$R(x,e) \Leftrightarrow \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\downarrow \wedge P(x, \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x))$$

とすると, R は Π^1_1 である. R を一意化する Π^1_1 集合 R^* をとって,

$$\begin{aligned} P^*(x,y) &\Leftrightarrow (\exists e)[R^*(x,e) \wedge y = \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)] \quad (\Pi^1_1) \\ &\Leftrightarrow P(x,y) \wedge (\forall e)[\neg R^*(e,x) \vee y = \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)] \quad (\Sigma^1_1) \end{aligned}$$

とすれば P^* は P を一意化する Δ^1_1 集合である. (証明終)