ボレル集合の一意化問題とその応用 (その 3, 再起動版)

藤田 博司

愛媛大学大学院理工学研究科

2026 年 3 月 13 日〜17 日
Logic Winter School 2026

RP 空間

RP 空間

距離空間 (X, d) に点列 $(q_i^X : i \in \omega)$ が与えられていて,

1. 距離関数 $d(\ ,\ )$ は完備である;
2. 集合 $\{q_0^X, q_1^X, q_2^X, \dots, \}$ は X において稠密である;
3. 非負整数 i, j, k, ℓ にかんする 4 項関係としての

$$d(q_i^X, q_j^X) < \frac{k}{\ell+1} \quad \text{と} \quad d(q_i^X, q_j^X) \leq \frac{k}{\ell+1}$$

は計算可能である

という条件をみたすとき, $(X, d, (q_i^X : i \in \omega))$ をひとつの再帰的表示付き空間 (recursively presented space, 以下 RP 空間) という.

RP 空間の例

前回紹介したポーランド空間の例はどれも RP 空間になる:

- 可算な離散距離空間としての $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
- 通常の距離の入ったユークリッド空間 $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, ...,
- ベール空間　　$\mathcal{N} = {}^{\omega}\omega = \omega \times \omega \times \omega \times \cdots$,
- カントール空間 $\mathcal{C} = {}^{\omega}\{0, 1\} = 2 \times 2 \times 2 \times \cdots$,

標準的な開基

$(X, d, (q_i^X : i \in \omega))$ を RP 空間とする.

q_i^X の $1/(j+1)$-近傍を $N^X_{2^i(2j+1)}$ とする.

また, $N^X_0 = \emptyset$ とする.

集合族 $\{ N^X_k : k = 0, 1, 2, \dots \}$ は X の開基となる.

開集合と Σ^0_1 集合

ω 上の計算可能的部分関数の標準的な数え上げを $(\Phi_e : e \in \omega)$ とする.

部分関数 Φ_e の定義域を W_e と書く. $k \in W_e$ のとき $\Phi_e(k)\downarrow$ と書く.

RP 空間 X の部分集合 A がある e について

$$A = \bigcup_{k \in W_e} N_k^X$$

と書けるとき, A は Σ^0_1 集合であるという. ←細字体

Σ^0_1 集合は開集合だが, その逆はいえない.

算術的集合の階層

Σ^0_1 集合の補集合のことを Π^0_1 集合という.

Π^0_1 集合は閉集合だが, その逆はいえない.

算術的集合の階層

すべての RP 空間で Σ^0_k と Π^0_k が定義できたとして,

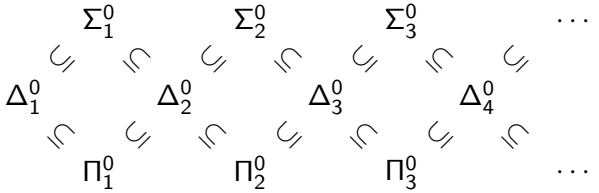
$X \times \omega$ の Π^0_k 集合の X への射影として得られる集合のことを

Σ^0_{k+1} 集合といい, その補集合のことを Π^0_{k+1} 集合という.

Σ^0_k 集合でありかつ Π^0_k 集合でもある集合のことを Δ^0_k 集合という.

算術的集合の階層

集合族としての Σ^0_n, Π^0_n, Δ^0_n には次のような包含関係がある:



無限個の要素からなる RP 空間においてはどの $\subseteq$ においても等号が成立しない.

これらの集合族のどれかに属するような X の部分集合は算術的集合 (arithmetical set) と呼ばれる.

再帰的写像と算術的写像

ふたつの RP 空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ が Σ^0_n-再帰的であるとは, $x \in X$ と $k \in \omega$ の関係

$$f(x) \in N_k^Y$$

が $X \times \omega$ の Σ^0_n 集合になっていることをいう. Σ^0_1-再帰的写像のことを単に再帰的写像といい, どれかの n について Σ^0_n-再帰的である写像のことを算術的写像という.

再帰的写像と算術的写像

再帰的写像は連続写像である. 次の重要な結果がある.

補題 (予稿: 補題 50)

孤立点のない RP 空間 X に対して写像 $f_X : \mathcal{N} \to X$ と $i_X : X \to \mathcal{N}$ が存在して次をみたす:

1. f_X は再帰的な全射である;
2. i_X は算術的な単射である;
3. $f_X \circ i_X = \mathrm{id}_X$ となる;
4. 値域 $i_X[X]$ は $\mathcal{N}$ の算術的集合である.

(実は i_X は Σ^0_2-再帰的で, $i_X[X]$ は Π^0_2 集合にとれる.)

Σ^1_1 と Π^1_1

RP 空間 X の部分集合 A に対してつぎの (1)〜(4) は同値である:

1. $X \times \mathrm{Seq}_\omega$ の Π^0_1 集合であるようなススリン系が存在して, A はその核である.
2. $X \times \mathrm{Seq}_\omega$ の 算術的集合であるようなススリン系が存在して, A はその核である.
3. ベール空間 $\mathcal{N}$ からの再帰的写像による Π^0_1 集合の像である.
4. $X \times \mathcal{N}$ の Π^0_1 集合の X への射影である.

(補講: 補題 46+命題 48)

これらの条件をみたす A を X の Σ^1_1 集合という.

Σ^1_1 集合の補集合を Π^1_1 集合とよぶ.

Σ^1_1 でありかつ Π^1_1 でもある集合を Δ^1_1 集合という.

Σ^1_1 と Π^1_1

定義から, Σ^1_1 集合は解析集合だが, その逆はいえない.

Π^1_1 集合は補解析集合だが, その逆はいえない.

Δ^1_1 集合はボレル集合だが, その逆はいえない.

ふたたび WF について

第 1 回の講義で紹介した整礎木の全体 WF は Π^1_1 集合である.

Π^1_1 集合であることと, 算術的写像による WF の逆像であることは同値である.

また, 第 2 回の講義で ("ほとんど $\mathbf{\Delta}^1_1$" と) 言及した二項関係

$$T_0 \leqslant^*_{\mathrm{WF}} T_1 \Leftrightarrow T_0 \in \mathrm{WF} \wedge [\, T_1 \notin \mathrm{WF} \vee \|T_0\| \leq \|T_1\| \,]$$
$$T_0 <^*_{\mathrm{WF}} T_1 \Leftrightarrow T_0 \in \mathrm{WF} \wedge [\, T_1 \notin \mathrm{WF} \vee \|T_0\| < \|T_1\| \,]$$

は, いずれも $\mathrm{TR} \times \mathrm{TR}$ の Π^1_1 集合である.

クライゼルの定理

定理 (予稿: 定理 56)

X を RP 空間とするとき, $X \times \omega$ の Π^1_1 集合 P は Π^1_1 集合 P^* で一意化できる.

(証明の概略)

$P(x, i) \Leftrightarrow f(x, i) \in \mathrm{WF}$ となる算術的写像 $f\colon X \times \omega \to \mathrm{TR}$ がある.

$P_x \neq \emptyset$ のとき, 関係 $\leqslant^*_{\mathrm{WF}}$ と $<^*_{\mathrm{WF}}$ を用いて, 順序数 $\|f(x, i)\|$ を最小化する i のうち大小関係で最小のものをとれば OK.

(単に $P(x, i)$ をみたす最小の i をとったのでは Π^1_1 で選べない.)

相対化

相対化の発想

RP 空間 X の任意の開集合 A は, ある $\alpha \in \mathcal{N}$ について

$$A = \bigcup_{n \in \omega} N^X_{\alpha(n)}$$

の形で得られる. そこで, $\mathcal{N} \times X$ の部分集合 G を

$$G = \{\, (\alpha, x) : (\exists n)[x \in N^X_{\alpha(n)}] \,\}$$

と定義すれば, X の任意の開集合は G のある切り口 G_α として得られることになる.

しかも G 自身は $\mathcal{N} \times X$ の Σ^0_1 集合である.

相対化の定義

Γ を Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_1, Π^1_1 のどれかとする.

$Y_0, \ldots, Y_{r-1}$ と X を RP 空間とする.

X の部分集合 A が直積 RP 空間 $Y_0 \times \cdots \times Y_{r-1} \times X$ の Γ 集合 P の $(y_0, \ldots, y_{r-1}) \in Y_0 \times \cdots \times Y_{r-1}$ における切り口

$$A = P_{y_0, \ldots, y_{r-1}}$$

として得られるならば, A は X の $\Gamma(y_0, \ldots, y_{r-1})$ 集合であるという.

点集合族 $\Gamma(y_0, \ldots, y_{r-1})$ のことを, Γ の $y_0, \ldots, y_{r-1}$ への相対化 (relativization) という.

細字体集合族と太字体集合族

さらに, すべての $\alpha \in \mathcal{N}$ への相対化の和集合を

$$\mathbf{\Gamma} = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{N}} \Gamma(\alpha)$$

と太字体であらわす.

このとき $\mathbf{\Sigma}^0_1$ は開集合の全体, $\mathbf{\Pi}^0_1$ は閉集合の全体, $\mathbf{\Sigma}^0_2$ は F_σ 集合の全体, $\mathbf{\Pi}^0_2$ は G_δ 集合の全体, 等となる.

この定義での $\mathbf{\Sigma}^1_1$ は解析集合の全体と一致し, $\mathbf{\Pi}^1_1$ は補解析集合の全体と一致するので, 第 1 回の講義での定義と整合している.

細字体集合族と太字体集合族

注意:

Δ^1_1 の相対化 $\Delta^1_1(y_0, \ldots, y_{r-1})$ は,
$\Sigma^1_1(y_0, \ldots, y_{r-1})$ と $\Pi^1_1(y_0, \ldots, y_{r-1})$ の共通部分として改めて定義する.

これは一般に, Δ^1_1 集合の $y_0, \ldots, y_{r-1}$ への相対化より広くなる.

細字体 Δ^1_1 集合の相対化の全体は, 太字体 $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ とは一致しない.

Δ^0_n と $\boldsymbol{\Delta}^0_n$ についても同様.

相対化の効用

細字体集合族 (たとえば Π^0_1) の構造や性質を,

計算可能性理論 (再帰理論) の手法を駆使して証明しておいてから,

相対化を考えることで,

太字体集合族 (たとえば閉集合全体) の構造や性質が理解できる.

Δ^1_1-再帰的要素

Γ-再帰的要素の定義

以下の議論では, Γ を細字体の点集合族 (Σ^0_n, Π^0_n, Δ^0_n, Σ^1_1, Π^1_1, Δ^1_1, のどれか, またはその相対化) とする.

RP 空間 X の点 x が Γ-再帰的要素であるとは, ω の部分集合

$$G^x = \{\, k \in \omega : x \in N^X_k \,\}$$

が Γ に属することをいう.

ベール空間の Δ^1_1 要素について

$\mathcal{N}$ の点 α が Σ^0_1-再帰的要素であることと,
ω 上の関数として計算可能であることとは同値である.

α が Δ^1_1-再帰的要素であることと,
ω から ω への Δ^1_1-再帰的写像であることとは同値である.

どれかの n について Σ^0_n-再帰的要素である点を算術的要素という.

Δ^1_1-再帰的要素について

補題

RP 空間 X の点 x について次の (1)〜(5) は同値である.

1. x は Δ^1_1-再帰的要素である;
2. x は Σ^1_1-再帰的要素である;
3. x は Π^1_1-再帰的要素である;
4. $\{x\}$ は Δ^1_1 集合である;
5. $\{x\}$ は Σ^1_1 集合である.

注意. $\{x\}$ が Π^1_1 集合であることは, (1)〜(5) よりずっと弱い条件である.

Δ^1_1-再帰的要素について

まったく同様に次のことがいえる.

補題*

RP 空間の間の写像 $f\colon X \to Y$ について次の (1)〜(5) は同値である.

1. f は Δ^1_1-再帰的写像である;
2. f は Σ^1_1-再帰的写像である;
3. f は Π^1_1-再帰的写像である;
4. $\mathrm{Graph}(f)$ は Δ^1_1 集合である;
5. $\mathrm{Graph}(f)$ は Σ^1_1 集合である.

ここでも, $\mathrm{Graph}(f)$ が Π^1_1 であることはもっと弱い条件になる.

Δ^1_1-再帰的要素について

命題 (予稿: 命題 57)

P が $\omega \times \omega$ の Π^1_1 集合で,

$$(\forall k)(\exists i)P(k,i)$$

をみたすとき, $\mathcal{N}$ のある Δ^1_1 再帰的要素 α について

$$(\forall k)P(k,\alpha(k))$$

となる.

これは前述のクライゼルの定理を用いて示せる.

Π^1_1-再帰的部分写像

Γ-再帰的部分写像の定義

f が X から Y への部分写像であることを

$$f : X \dashrightarrow Y$$

と書くことにする.

要素 $x \in X$ が部分写像 $f : X \dashrightarrow Y$ の定義域に属することを

$$f(x)\downarrow$$

と書くことにする.

Γ-再帰的部分写像の定義

RP 空間の間の部分写像 $f : X \dashrightarrow Y$ が Γ-再帰的部分写像であるとは,

- 定義域 $\mathrm{Domain}(f)$ が X の Γ 集合である;
- $X \times \omega$ の部分集合

$$G^f = \{\, (x,k) : f(x)\!\downarrow \wedge\, f(x) \in N^Y_k \,\}$$

が Γ 集合である

の 2 条件をみたすことをいう.

Γ-再帰的部分写像の定義

再帰理論 (計算可能性理論) でいう計算可能部分関数は,

$\omega^\ell \times \mathcal{N}^m$ から ω への Σ^0_1-再帰的部分写像にほかならない.

以下の議論では, Π^1_1-再帰的部分写像が活躍する.

Π^1_1-再帰的部分写像について

$f\colon X \dashrightarrow Y$ が Π^1_1-再帰的部分写像で, 定義域 $\mathrm{Domain}(f)$ が Δ^1_1 集合であれば, (補題の論法により) f は Δ^1_1-再帰的部分写像である.

Π^1_1-再帰的部分写像について

次の補題が重要である.

Π^1_1-再帰的部分写像の代入補題

P を Y の Π^1_1 集合とし, $f : X \dashrightarrow Y$ を Π^1_1-再帰的部分写像とするとき,

$$Q(x) \Leftrightarrow f(x)\downarrow \wedge P(f(x))$$

で定まる Q は X の Π^1_1 集合である. (多変数の述語へ複数の部分写像を代入する場合についても同様である)

Π^1_1-再帰的部分写像について

代入補題と Π^1_1-再帰的部分写像の定義により,

Π^1_1-再帰的部分写像どうしの合成はまた Π^1_1-再帰的部分写像になる.

Δ^1_1-再帰的要素の数え上げ定理

数え上げ定理

定理 (予稿: 定理 58)

X と Y を RP 空間とする. 次の条件をみたす Π^1_1-再帰的部分写像 $\boldsymbol{d}^{X,Y} : \omega \times X \dashrightarrow Y$ が存在する. すべての $x \in X$ について, 集合

$$\left\{ \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x) : e \in \omega \wedge \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\downarrow \right\}$$

が Y の $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素全体と一致する.

数え上げ定理の帰結 (1/3)

《y が Y の $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素である》ということを

$$y \in \Delta^1_1(x)$$

と表記することにしよう. この関係は

$$y \in \Delta^1_1(x) \Leftrightarrow (\exists e \in \omega)\big[\boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\downarrow \wedge (\forall k)[y \notin N^Y_k \vee \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x) \in N^Y_k]\big]$$

と書けるので Π^1_1 である.

数え上げ定理の帰結 (2/3)

$P(x, y)$ が $X \times Y$ の Π^1_1 集合だったとき,

$$Q(x) \Leftrightarrow (\exists y \in \Delta^1_1(x))P(x, y)$$

で定まる $Q(x)$ は

$$Q(x) \Leftrightarrow (\exists e \in \omega)\left[\boldsymbol{d}^{X,Y}(e, x)\downarrow \wedge P(x, \boldsymbol{d}^{X,Y}(e, x))\right]$$

と書けるので, 代入補題により Π^1_1 である.

数え上げ定理の帰結 (3/3)

次の補題では $\beta \in \mathcal{N}$ と $i \in \omega$ に対して $(\beta)_i \in \mathcal{N}$ を

$$(\beta)_i(j) = \beta(2^i(2j+1))$$

と定義して使っている.

Δ^1_1 可算選択補題 (予稿: 補題 61)

P が $\omega \times \mathcal{N}$ の Π^1_1 集合で $(\forall i)(\exists \alpha \in \Delta^1_1)P(i,\alpha)$ をみたすとき, $\mathcal{N}$ のある Δ^1_1-再帰的要素 β について $(\forall i)P(i,(\beta)_i)$ となる.

この補題は, i と e の関係

$$\boldsymbol{d}^{\omega,\mathcal{N}}(e,0)\downarrow \wedge P(i,\boldsymbol{d}^{\omega,\mathcal{N}}(e,0))$$

を (クライゼルの定理で) 一意化することで示される. 詳細は略す.

Δ^1_1 集合による一意化

解析集合で一意化できない閉集合

数え上げ定理からの帰結として $\mathcal{N}$ 上の 2 項関係 $\beta \notin \Delta^1_1(\alpha)$ は Σ^1_1 なので, $\mathcal{N}^3$ のある Π^0_1 集合 C により,

$$\beta \notin \Delta^1_1(\alpha) \Leftrightarrow (\exists\gamma)C(\alpha, \beta, \gamma)$$

となる. この C を用いて

$$P(\alpha, \beta) \Leftrightarrow C(\alpha, (\beta)_0, (\beta)_1)$$

と定めよう. P は $\mathcal{N}^2$ の Π^0_1 集合で, $\mathrm{proj}P = \mathcal{N}$ となっている.

解析集合で一意化できない閉集合

この P を一意化する解析集合 P^* があったとする.

P^* が $\Sigma^1_1(\varepsilon)$ だったとして, 切り口 P^*_ε のただ一つの要素を β とする.

すると $P^*_\varepsilon = \{\beta\}$ なので β は $\Delta^1_1(\varepsilon)$-再帰的要素である.

したがって $(\beta)_0$ も $\Delta^1_1(\varepsilon)$-再帰的要素ということになるが, このとき $P(\varepsilon, \beta)$ より $C(\varepsilon, (\beta)_0, (\beta)_1)$ なので $(\beta)_0 \notin \Delta^1_1(\varepsilon)$ となって矛盾する.

したがって, P は解析集合で一意化できない閉集合の例となっている.

ボレル集合で一意化できる条件

$X \times Y$ のボレル集合 P がボレル集合 P^* で一意化できたとする.

P^* が $\Delta^1_1(\varepsilon)$ だったとすると, 各 $x \in \mathrm{proj}_X P$ に対して, P^*_x の一意的な要素は Y の $\Delta^1_1(\varepsilon, x)$-再帰的要素だということになる.

したがってもとから, P_x に $\Delta^1_1(\varepsilon, x)$-再帰的要素が存在していたのでなければならない.

ボレル集合で一意化できる条件

ボレル集合 P がボレル集合で一意化できるならば, ある $\varepsilon \in \mathcal{N}$ が存在して, すべての $x \in X$ について, 切り口 P_x は空でなければ $\Delta^1_1(\varepsilon, x)$-再帰的要素を含む.

この条件は, 実は十分条件でもある.

ボレル集合で一意化できる条件

簡単のため細字体版の結果を述べる. しかるべく相対化すればボレル集合に関する結果が得られる.

Δ^1_1 集合で一意化できる必要十分条件 (予稿: 定理 69)

直積 RP 空間 $X \times Y$ の Δ^1_1 集合 P が Δ^1_1 集合 P^* で一意化できるための必要十分条件は, 各 $x \in X$ について, P_x が空でなければ $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素を含むことである.

定理の証明

条件が必要であることはすでに示したとおりである.

いま P が $X \times Y$ の Δ^1_1 集合で, 各 P_x は空であるかまたは $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素を含むとする.

$$R(x,e) \Leftrightarrow \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)\downarrow \wedge P(x, \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x))$$

とすると, R は Π^1_1 である. R を一意化する Π^1_1 集合 R^* をとって,

$$\begin{aligned} P^*(x,y) &\Leftrightarrow (\exists e)[R^*(x,e) \wedge y = \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)] \quad (\Pi^1_1) \\ &\Leftrightarrow P(x,y) \wedge (\forall e)[\neg R^*(e,x) \vee y = \boldsymbol{d}^{X,Y}(e,x)] \quad (\Sigma^1_1) \end{aligned}$$

とすれば P^* は P を一意化する Δ^1_1 集合である. (証明終)