ボレル集合の一意化問題とその応用 (その 4)

藤田 博司

愛媛大学大学院理工学研究科

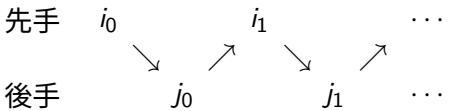
2026 年 3 月 13 日〜17 日
Logic Winter School 2026

Π^0_1 ゲーム

Π^0_1 ゲームとは

ω 上の木 T が与えられたとして, 無限ゲーム $G(T)$ を定義する.

先手と後手が交互に非負整数 i_n と j_n を言いあう:



すると無限列 $(i_0, j_0, i_1, j_1, \ldots, i_n, j_n, \ldots)$ ができる.

この対局の結果, すべての n で $(i_0, j_0, \ldots, i_n, j_n) \in T$ であれば先手の勝ち, そうでなければ後手の勝ちと定める.

Π^0_1 ゲームとは

先手の戦略とは, $j_0, \ldots, j_{n-1}$ を見て i_n を返す関数 $\sigma\colon \mathrm{Seq}_\omega \to \omega$ のこと.

後手の戦略とは, $i_0, \ldots, i_n$ を見て j_n を返す関数 $\tau\colon \mathrm{Seq}_\omega \setminus \{()\} \to \omega$ のこと.

先手と後手がそれぞれ戦略 σ と τ を決めると, 対局の進行は再帰的に

$$
\begin{array}{ll}
i_0 = \sigma(), & j_0 = \tau(i_0), \\
i_1 = \sigma(j_0), & j_1 = \tau(i_0, i_1), \\
\quad\vdots & \quad\vdots \\
i_n = \sigma(j_0, \ldots, j_{n-1}), & j_n = \tau(i_0, \ldots, i_n), \\
\quad\vdots & \quad\vdots
\end{array}
$$

と一意的に決まる. 無限列 $(i_0, j_0, \ldots, i_n, j_n, \ldots)$ を $\sigma \cdot \tau$ と書く.

Π^0_1 ゲームとは

ゲーム $G(T)$ における戦略について,

$$\sigma \text{ が先手の必勝法} \Leftrightarrow (\forall\tau)(\forall n)[(\sigma\cdot\tau)\restriction 2n \in T]$$
$$\tau \text{ が後手の必勝法} \Leftrightarrow (\forall\sigma)(\exists n)[(\sigma\cdot\tau)\restriction 2n \notin T]$$

と定義する.

必勝法の存在

次の定理が知られている:

ゲール-ステュワートの定理

どんな木 $T \in \mathrm{TR}$ についても, $G(T)$ において, 先手または後手の必勝法が存在する.

必勝法の存在

ここではゲール-ステュワートの定理を次のように精密化する:

ブラースの定理 (予稿: 定理 62)

どんな木 $T \in \mathrm{TR}$ についても, $G(T)$ において, 先手の必勝法が存在するか, または後手の $\Delta^1_1(T)$-再帰的な必勝法が存在する.

これを示すために, Seq_ω の部分集合 P を

$$P(s) \Leftrightarrow (\exists \tau \in \Delta^1_1(T))(\forall \sigma)(\exists n)[\, s * ((\sigma \cdot \tau) \restriction 2n) \notin T \,]$$

と定義する. つまり $G(T/s)$ において後手が $\Delta^1_1(T)$-再帰的な必勝法をもつときに $P(s)$ とする.

必勝法の存在

補題

すべての $s \in \mathrm{Seq}_\omega$ について

$$P(s) \Leftrightarrow (\forall i)(\exists j)P(s*(i,j))$$

(証明) $\rightarrow$はあきらか. $\leftarrow$を示すために $(\forall i)(\exists j)P(s*(i,j))$ と仮定する. $P(s*(i,j))$ は i と j の述語として $\Pi^1_1(T)$ なので, ある $\Delta^1_1(T)$-再帰的な α について $(\forall i)P(s*(i,\alpha(i)))$ となる. このとき各 i について $G(T/s*(i,\alpha(i)))$ には後手の $\Delta^1_1(T)$-再帰的な必勝法が存在する. すなわち

$$(\forall i)(\exists \tau \in \Delta^1_1(T))\Big[(\forall \sigma)(\exists n)[s*(i,\alpha(i),(\sigma\cdot\tau)\restriction 2n) \notin T]\Big]$$

となっている. $(\forall \sigma)$ 以下の述語は $\Pi^1_1(T)$ である.

必勝法の存在

前回証明した Δ^1_1-可算選択補題によって, $\Delta^1_1(T)$-再帰的な列 $(\tau_i : i \in \omega)$ が存在して, 各 i について τ_i は $G(T/s * (i, \alpha(i)))$ における後手の必勝法になっている.

ゲーム $G(T/s)$ において後手に次のような戦略を採用させよう: 先手が最初に i を選んだら $\alpha(i)$ を返し, それ以後の対局では $G(T/s * (i, \alpha(i)))$ の必勝法 τ_i に従って対局させる.

この戦略は $G(T/s)$ における後手の $\Delta^1_1(T)$-再帰的な必勝法である. (補題の証明終)

必勝法の存在

ブラースの定理の証明に移る.

$G(T)$ において後手の $\Delta^1_1(T)$-再帰的な必勝法が存在しなかったとする. このとき $\neg P(())$ であるから, 補題により,

$$(\exists i)(\forall j)\neg P((i,j))$$

となっている. 先手がそのような i を選んで i_0 とすれば, 後手が j_0 をどう選ぼうとも $\neg P((i_0,j_0))$ なので, 補題により,

$$(\exists i)(\forall j)\neg P((i_0,j_0,i,j))$$

となっている. そこで先手はそのような i を選んで i_1 とする.

必勝法の存在

以下同様に, 先手はつねに

$$(\exists i)(\forall j)\neg P((i_0, j_0, \ldots, i_n, j_n, i, j))$$

であるように $i_0, \ldots, i_n$ を選んでゆける.

このとき $(i_0, j_0, \ldots, i_n, j_n) \in T$ のはずだから, これは $G(T)$ における先手の必勝法である. (証明終)

可算な Σ^1_1 集合

完全集合

ポーランド空間の完全集合 (perfect set) とは, 空でなくて孤立点がないコンパクト部分集合のことである.

完全集合はカントール空間 $\mathcal{C}$ と同相な部分集合を含む.
したがって完全集合は連続体の濃度をもつ.

完全集合

次のことが知られている.

1. ポーランド空間の閉集合は可算でなければ完全集合を含む. (カントール-ベンディクソンの定理)
2. ポーランド空間の解析集合は可算でなければ完全集合を含む. (スズリンの完全集合定理)
3. 可算でなくて完全集合を含まない実数の集合は存在する. (いわゆるベルンシュタイン集合. 選択公理に依存)
4. 可算でなくて完全集合を含まない補解析集合の存在は ZFC と独立である.

以下では, この (2) を精密化する定理を示す.

フェファマン-ハリソン-クリプキの定理 (1/8)

定理 (予稿: 定理 65)

$\varepsilon \in \mathcal{N}$ とする. カントール空間 $\mathcal{C}$ の $\Sigma^1_1(\varepsilon)$ 集合 A が $\Delta^1_1(\varepsilon)$-再帰的でない要素をひとつでももてば, A は完全集合を含む.

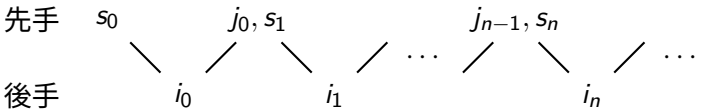
マーティンによる無限ゲームを使った証明を紹介する. 簡単のため A が Σ^1_1 である場合を扱う. このとき $\mathcal{C} \times \mathcal{N}$ の Π^0_1 集合 C を

$$\alpha \in A \Leftrightarrow (\exists \beta) C(\alpha, \beta)$$

となるようにとれる.

フェファマン-ハリソン-クリプキの定理 (2/8)

次の無限ゲーム G^* を考える:



先手は $s_n \in {}^{<\omega}2$ と $j_n \in \omega$ を選ぶ. $n \geq 1$ のとき $s_n(0) = i_{n-1}$ となるように選ばねばならない. 後手は $i_n \in \{0, 1\}$ となるように選ばねばならない. そのうえで

$$(s_0 * s_1 * \cdots * s_n * \cdots, (j_0, j_1, \ldots, j_n, \ldots)) \in C$$

となっていれば先手の勝ち, そうでなければ後手の勝ちとする.

フェファマン-ハリソン-クリプキの定理 (3/8)

このゲーム G^* は勝敗条件が Π^0_1 なので, ω 上のある算術的な木 T についての $G(T)$ になっている. ブラースの定理により, G^* において, 先手に必勝法があるか, または後手に Δ^1_1-再帰的な必勝法がある.

そこで, 次の 2 つの補題を示せば定理は証明できる.

補題 (A)

G^* において先手に必勝法があれば, A は完全集合を含む.

補題 (B)

τ が G^* における後手の必勝法ならば, A は τ から計算可能な要素のみからなる.

フェファマン-ハリソン-クリプキの定理 (4/8)

補題 (A) の証明:

σ を $G^*(T)$ における先手の必勝法とする. 後手に $y \in \mathcal{C}$ を選ばせて先手が σ で応戦してできる列

$$s_0, j_0, s_1, j_1, \dots$$

に対して $f(y) = s_0 * s_1 * \cdots$, $g(y) = (j_0, j_1, \dots)$ とする.

σ が先手の必勝法であることから $(f(y), g(y)) \in C$ である.

また $y(n) \neq y'(n)$ のとき $s_{n+1}(0) = y(n) \neq y'(n) = s'_{n+1}(0)$ なので $f(y) \neq f(y')$ である.

よって $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ は連続 1 対 1 写像であり, その像は A に含まれる完全集合である. (補題 (A) の証明終)

フェファマン-ハリソン-クリプキの定理 (5/8)

補題 (B) の証明:

τ を G^* における後手の必勝法とする. 任意の $\alpha \in A$ を固定して考える. G^* の対局の途中経過

$$s_0, i_0, j_0, s_1, i_1, j_1, \ldots, s_n, i_n$$

が 未解決 であるということを

- どの s_k も空でない;
- $\big(\,((s_0 * \cdots * s_n) \restriction n) * \gamma, (j_0, \ldots, j_{n-1}) * \beta\,\big) \in C$ をみたす γ と β がある;
- $s_0 * \cdots * s_n \subseteq \alpha$;
- 各 $k < n$ で $s_{k+1}(0) = i_k = \tau(s_0, j_0, s_1, \ldots, j_{k-1}, s_k)$;
- $\mathrm{lh}(s_0 * \cdots * s_n) = \ell$ とするとき $i_n = \tau(s_0, j_0, \ldots, j_{n-1}, s_n) = \alpha(\ell)$

となっていることだとする.

フェファマン-ハリソン-クリプキの定理 (6/8)

未解決な列とは, 後手が τ に従って対局している途中で, まだ先手の負けが確定していなくて, このままでは $s_0 * \cdots * s_n$ が α に収束しかねない, という状況であるような列である.

もしも無限列

$$s_0, i_0, j_0, \ldots, s_n, i_n, j_n, \ldots$$

のすべての始切片 $s_0, i_0, j_0, \ldots, s_n, i_n$ が未解決なら τ が後手の必勝法でないことになるので, 未解決な $s_0, i_0, j_0, \ldots, s_n, i_n, j_n$ で, 未解決な拡大を持たないものが必ず存在する.

そのような未解決な極大列を取って, $\mathrm{lh}(s_0 * \cdots * s_n) = \ell$ とする.

フェファマン-ハリソン-クリプキの定理 (7/8)

よって $s_0, i_0, j_0, \ldots, s_n, i_n, j_n, (\alpha(\ell)), i_{n+1}$ は, $i_{n+1} = \tau\big(s_0, j_0, \ldots, s_n, j_n, (\alpha(\ell))\big)$ であるかぎり未解決でない. このことは $\alpha(\ell+1) \neq \tau\big(s_0, j_0, \ldots, s_n, j_n, (\alpha(\ell))\big)$ であることを意味する.

同様に, $s_0, i_0, j_0, \ldots, s_n, i_n, j_n, (\alpha(\ell), \ldots, \alpha(\ell+m-1)), i_{n+1}$ は $i_{n+1} = \alpha(\ell+m)$ であるかぎり未解決でない. このことは
$\alpha(\ell+m) \neq \tau\big(s_0, j_0, \ldots, s_n, j_n, (\alpha(\ell), \ldots, \alpha(\ell+m-1))\big)$ であることを意味する.

フェファマン-ハリソン-クリプキの定理 (8/8)

このようにして, $k > \ell$ のときの $\alpha(k)$ は τ を用いて

$$\alpha(k) = 1 - \tau\big(s_0, j_0, \ldots, s_n, j_n, (\alpha(\ell), \ldots, \alpha(k-1))\big)$$

と計算できてしまう. このことはすべての $\alpha \in A$ が τ をオラクルとして計算可能可能であることを意味する. (補題 (B) の証明終)

他の RP 空間の場合

一般の RP 空間 X については, 写像 $f_X : \mathcal{N} \to X$ と $i_X : X \to \mathcal{N}$ を

- f_X は算術的で連続な全射である;
- i_X は算術的な単射である;
- $f_X \circ i_X = \mathrm{id}_X$ である;
- 値域 $i_X[X]$ は $\mathcal{N}$ の算術的部分集合である

となるようにとれるのだった.

この写像を用いて X の Σ^1_1 集合 A を $\mathcal{N}$ の Σ^1_1 集合 $i_X[X] \cap f_X^{-1}(A)$ に写して議論すれば, A が Δ^1_1-再帰的でない要素をもてば完全集合を含むことが示される.

スースリンの完全集合定理

フェファマン-ハリソン-クリプキの定理からただちに:

スースリンの完全集合定理

ポーランド空間の解析集合は可算でなければ完全集合を含む.

が得られる.

ルジン-ノヴィコフの一意化定理

ルジン-ノヴィコフの一意化定理

直積 RP 空間 $X \times Y$ に Δ^1_1 集合 P があって, 各 $x \in X$ における切り口 P_x が高々可算だったとする. P_x は可算な $\Delta^1_1(x)$ 集合なので, フェファマン-ハリソン-クリプキの定理により, $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素のみからなる. このことは,

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{proj}_X P &\Leftrightarrow (\exists y) P(x,y) \\ &\Leftrightarrow (\exists y \in \Delta^1_1(x)) P(x,y) \end{aligned}$$

であることを意味する. そこで, まず射影 $\mathrm{proj}_X P$ が Δ^1_1 集合であることがわかる.

また, 3 回目の講義で述べた Δ^1_1 集合で一意化できるための必要十分条件を P がみたしていることがわかる.

ルジン-ノヴィコフの一意化定理

この考察を相対化すると, ひとまず次の結果が得られる:

ルジン-ノヴィコフの一意化定理

直積ポーランド空間 $X \times Y$ のボレル集合 P があって, 各 $x \in X$ における切り口 P_x が高々可算集合だったとする. このとき, 射影 $\mathrm{proj}_X P$ は X のボレル集合であり, かつ, P はボレル集合 P^* で一意化できる.

次の最終回の講義では, この結果の強化版を証明する.