ボレル集合の一意化問題とその応用 (その5)

藤田 博司

愛媛大学大学院理工学研究科

2026 年 3 月 13 日〜17 日
Logic Winter School 2026

Δ^1_1-再帰的要素に関する諸結果

可算 Δ^1_1 集合の表現補題

補題 (予稿: 補題 70)

E を $\mathcal{N}$ の空でない可算な Δ^1_1 集合とするとき, Δ^1_1-再帰的要素 $\gamma \in \mathcal{N}$ が存在して, $E = \{ (\gamma)_n : n \in \omega \}$ となる.

補題の証明 (1/2)

フェファマン-ハリソン-クリプキの定理の証明を思い出すと, 可算な Σ^1_1 集合 E に対してゲームの Δ^1_1-再帰的な必勝法 τ が存在して, E のすべての要素が τ から計算可能になるのだった.

いま, E は可算な Δ^1_1 集合としているので, そのような Δ^1_1-再帰的な τ をとって

$$A = \left\{ e \in \omega : \Phi_e^\tau \text{ は全域関数で } \Phi_e^\tau \in E \right\}$$

とすれば, A は ω の空でない Δ^1_1 集合となる.

(ここで Φ_e^τ は e をプログラムのコード, τ をオラクルとする, オラクルつき計算可能部分関数)

補題の証明 (2/2)

この A の要素を昇順に数え上げる列

$$e_0 < e_1 < \cdots < e_n < \cdots$$

は $\mathcal{N}$ の Δ^1_1-再帰的要素をなす.

(注意: たとえ E が有限集合でも A は有限集合にならない: いわゆる Padding Lemma)

いま γ を

$$(\gamma)_n = \Phi^{\tau}_{e_n}$$

となるように定めれば, これが求める Δ^1_1-再帰的要素となる. (証明終)

ルヴォーの選択補題

補題 (予稿: 補題 71)

$P \subset X \times Y$ を Π^1_1 部分集合とする. $D = \{ x \in X : (\exists y \in \Delta^1_1(x)) P(x, y) \}$ とおく. このとき X 上の Π^1_1-再帰的部分写像 φ が存在して

$$(\forall x \in D)[\, \varphi(x)\downarrow \wedge P(x, \varphi(x))\,]$$

をみたす. さらに $B \subset D$ で B が Δ^1_1 であれば, Δ^1_1-再帰的 (全域) 写像 $f : X \to Y$ が存在して

$$(\forall x \in B) P(x, f(x))$$

をみたす.

補題の証明 (1/2)

$Q \subseteq X \times Y$ を

$$Q(x,y) \Leftrightarrow y \in \Delta^1_1(x) \wedge P(x,y)$$

と定めると Π^1_1 集合であって $\mathrm{proj}_X Q = D$ となる.

この Q を一意化する Π^1_1 集合 Q^* をとると, Q^* は D を定義域とする部分写像 φ のグラフになっている.

$$\varphi(x)\downarrow \wedge \varphi(x) \in N_k^Y \Leftrightarrow (\exists y \in \Delta^1_1(x))\left[\, Q^*(x,y) \wedge y \in N_k^Y \,\right]$$

であるから φ は Π^1_1-再帰的部分関数であって,

$$(\forall x \in D)[\,\varphi(x)\downarrow \wedge P(x,\varphi(x))\,]$$

をみたす.

補題の証明 (2/2)

いま $B \subset D$ が Δ^1_1 集合だった場合, $\varphi \restriction B$ は Δ^1_1-再帰的部分関数になる. そこで,

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x), & (x \in B) \\ \vec{0}, & (x \notin B) \end{cases}$$

と f を定めれば, Δ^1_1-再帰的全域写像で

$$(\forall x \in B) P(x, f(x))$$

となる. (証明終)

ルジン-ノヴィコフの分解定理

ルジン-ノヴィコフの分解定理

定理 (予稿: 定理 73)

直積ポーランド空間 $X \times Y$ にボレル集合 P があって, 各 $x \in X$ における切り口 P_x が高々可算集合だったとする. このとき, ボレル集合の列 $(P^*_n : n \in \omega)$ が存在して,

$$P = \bigcup_{n \in \omega} P^*_n$$

かつ各 P^*_n は P の一意化になっている.

定理の証明 (1/2)

$X = Y = \mathcal{N}$ の場合をやる.
$P \subseteq X \times Y$ が Δ^1_1 の場合を考えればよい.

各 x について P_x は可算な $\Delta^1_1(x)$ 集合である. このとき可算 Δ^1_1 集合の表現補題により, ある $\Delta^1_1(x)$-再帰的要素 γ が存在して $P_x = \{ (\gamma)_n : n \in \omega \}$ となる.

$$Q(x, \gamma) \Leftrightarrow \gamma \in \Delta^1_1(x) \wedge P_x = \{ (\gamma)_n : n \in \omega \}$$

とすると Q は Π^1_1 で,

$$\mathrm{proj}_X Q = \mathrm{proj}_X P$$

かつ $\mathrm{proj}_X Q$ は Δ^1_1 である.

定理の証明 (2/2)

作り方から $x \in \mathrm{proj}_X Q \Leftrightarrow (\exists \gamma \in \Delta^1_1(x)) Q(x, \gamma)$ なので, ルヴォーの選択補題により, Δ^1_1-再帰的写像 $f : X \to Y$ が存在して,

$$x \in \mathrm{proj}_X Q \Rightarrow Q(x, f(x))$$

となる. $n \in \omega$ に対して

$$P^*_n = \{ (x, (f(x))_n) : x \in \mathrm{proj}_X Q \}$$

とおくと, P^*_n は Δ^1_1 集合で, $P = \bigcup_{n \in \omega} P^*_n$ かつ, 各 P^*_n が P の一意化となる. (証明終)

いくつかの話題

いくつかの話題 (1/5)

可算対 1 のボレル可測写像 (予稿: 命題 74)

$f\colon X \to Y$ がポーランド空間の間のボレル可測写像で, 各 $y \in Y$ の逆像 $f^{-1}[\{y\}]$ が高々可算集合であるとする. このとき X のボレル集合 B の像 $f[B]$ は Y のボレル集合である.

(証明) ある $\gamma \in \mathcal{N}$ について X と Y が γ に相対化された RP 空間となり, f は $\Delta^1_1(\gamma)$-再帰的写像となる. グラフ $\mathrm{Graph}(f)$ は $X \times Y$ の $\Delta^1_1(\gamma)$ 集合なので, 各 $y \in Y$ について $f^{-1}[\{y\}]$ は可算な $\Delta^1_1(y,\gamma)$ 集合である. よって $f^{-1}[\{y\}]$ は $\Delta^1_1(y,\gamma)$-再帰的要素のみからなる. いま $B \subseteq X$ をボレル集合とすると, ある $\delta \in \mathcal{N}$ について B は $\Delta^1_1(\gamma,\delta)$ 集合であって,

$$y \in f[B] \Leftrightarrow (\exists x \in \Delta^1_1(y,\gamma))[x \in B \wedge y = f(x)]$$

なので $f[B]$ は $\Delta^1_1(\gamma,\delta)$ 集合, したがってボレル集合である. (証明終)

いくつかの話題 (2/5)

アルゼニン-功力の定理

直積ポーランド空間 $X \times Y$ にボレル集合 P があって, 各 $x \in X$ について切り口 P_x が Y の σ-コンパクト集合であるとき, P はボレル集合で一意化できる.

当初はこの定理の話もしたかったけれども準備が間に合いませんでした.

証明は要するに, σ-コンパクトな Δ^1_1 集合が Δ^1_1-再帰的要素を含むことを示すことによる.

いくつかの話題 (3/5)

これに関連して, ルジン-ノヴィコフの分解定理に類似の結果も得られている:

ルヴォー-サンレイモンの定理

直積ポーランド空間 $X \times Y$ にボレル集合 P があって, 各 $x \in X$ について切り口 P_x が Y の σ-コンパクト集合であるとき, ボレル集合の列 $(P_n : n \in \omega)$ が存在して, $P = \bigcup_{n\in\omega} P_n$ かつ各 P_n の切り口 $(P_n)_x$ はすべてコンパクトである.

いくつかの話題 (4/5)

トマソン-ヒンマンの定理

RP 空間の Π^1_1 集合が 非痩せ集合 (non-meager) ならば, Δ^1_1-再帰的要素を含む.

系

直積ポーランド空間 $X \times Y$ にボレル集合 P があって, 各 $x \in X$ について切り口 P_x が non-meager(痩せていない) 集合であるとき, P はボレル集合で一意化できる.

トマソン-ヒンマンの定理は, フェファマン-ハリソン-クリプキの定理の場合と同様の考察をバナッハ-マズールのゲームに対して行うことで示される.

いくつかの話題 (5/5)

サックス-田中の定理

実数の Π^1_1 集合は, ルベーグ測度が正ならば Δ^1_1-再帰的要素を含む.

系

直積ポーランド空間 $X \times \mathbb{R}$ にボレル集合 P があって, 各 $x \in X$ について切り口 P_x のルベーグ測度が正であるとき, P はボレル集合で一意化できる.

若い頃にこの結果をゲームの論法で示そうといろいろ試したけど, どうもうまくいかなかった . . .