記述集合論ノート

藤田 博司

2004 年 2 月 17 日〜18 日, 神戸大学

神戸大学大学院自然科学研究科において, 2004 年 2 月 17 日と 18 日に記述集合論のチュートリアルをおこないました. これは, そのとき配付したレジュメをもとに, 聴講者に指摘された修正点や, 話してみて初めて思いついた改善点, 話したかったけど準備が間に合わなかった追加の話題などを盛り込んだ修正版レクチャーノートです. 修正すべき点や改善できる点などはまだまだ残っているはずです. 読者のみなさま, ぜひ忌憚のないご意見をお聴かせ願います.

(2004 年 2 月 24 日) 頑張って書いているうちに 40 ページを超え, まだ終わりそうにないので, 未完成ながらここで暫定版として公開します.

(2004 年 2 月 27 日) wellfounded tree と Π^1_1 の理論を大幅に増補しました. それでもまだ, いくつか証明できていない結果があります. 意外と手ごわいです.

(2004 年 3 月 1 日) 文献への参照をつけなおしました. ようやく補題 5.27 の証明がついたのでひと安心. 内容は欲張るときりがないので, これで打ち切り.

目 次

1 二階算術の言語と構造

概要. 射影集合の階層に対応する lightface の集合族として解析的 (analitycal) 階層を定義したいのですが, あまり recursion theory に深入りせずに済ませたかったので, 二階算術の言語による定義可能性という観点からの説明を試みました. しかしながら, Π^1_1 の理論を展開する第 5 節では, 結局 recursion 丸出しになっています.

二階算術というのは大ざっぱに言うと ω と ω^ω にかんする (形式化された) 理論のことだ. (ω と $\mathcal{P}(\omega)$ の理論と考えるのが本筋かもしれないが, 簡明さと後々の議論との接続のよさを優先する.)

$$\mathbf{A}_1 = (\omega; +, \cdot, <, \leq)$$

という構造を初等算術の標準モデルと考える. これに, "すべての関数の全体" ω^ω と, 関数の適用を意味する演算 apply を加えた

$$\mathbf{A}_2 = (\omega, \omega^\omega; +, \cdot, <, \leq, \mathrm{apply})$$

を, 二階算術の標準モデルと考える. ($\mathrm{apply}(\alpha, n)$ とは $\alpha(n)$ のこと.) つまり, 初等算術と二階算術はそれぞれ $\mathbf{A}_1$ と $\mathbf{A}_2$ の理論を形式化したものと考える. これはつまり, 算術を集合論に埋め込まれたものと考えていることになる.

以上の "標準的な解釈" を念頭において, 二階算術の形式的理論の概略を述べる.

1.1 記号

二階算術の言語には次の記号が用いられる.

- 論理の記号: 論理結合子 $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, 否定 $\neg$, 量化子 $\exists$, $\forall$.
- 等号: $=$.
- 型 0 の定数記号: $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$,. . . .
- 型 0 の変数記号: $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$,. . . .
- 型 1 の変数記号: $\boldsymbol{\alpha}_0$, $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$,. . . .
- 述語記号: $<$ と $\leq$.
- 演算記号: $+$ と $\cdot$ と **apply**

1.2 項

項としては型 0 の項だけを基本的なものと考える. 以下のルール (1)〜(3) を有限回使って作られるものだけが項である.

(1) 型 0 の定数記号および型 0 の変数記号は項である.

(2) $\boldsymbol{t_0}$ と $\boldsymbol{t_1}$ が項のとき, $\boldsymbol{t_0} + \boldsymbol{t_1}$ と $(\boldsymbol{t_0}) \cdot (\boldsymbol{t_1})$ とは項である.

(3) $\boldsymbol{t}$ が項で $\boldsymbol{\alpha}$ が型 1 の変数であるとき, $\mathbf{apply}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t})$ は項である.

第 3 のルールに出てきた $\mathbf{apply}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{t})$ は今後は $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t})$ と略記される. 以上のルールにより, 型 1 の変数はいつでも $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t})$ という項の形でしか出現することを許されない.

1.3 式

型 1 の変数記号そのものは項とみなさないので, たとえば $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$ のような "式" は, 二階算術の言語の正式な式ではない. 以下のルール (1)〜(4) を有限回使って出てくるものだけが式である.

(1) $\boldsymbol{t_0}$ と $\boldsymbol{t_1}$ が項のとき, $\boldsymbol{t_0} = \boldsymbol{t_1}$ と $\boldsymbol{t_0} < \boldsymbol{t_1}$ と $\boldsymbol{t_0} \leq \boldsymbol{t_1}$ は式である.

(2) φ_0 と φ_1 が式のとき, $(\varphi_0) \vee (\varphi_1)$ と $(\varphi_0) \wedge (\varphi_1)$ と $(\varphi_0) \to (\varphi_1)$ と $\neg(\varphi_0)$ は式である.

(3) φ が式で $\boldsymbol{v}$ が型 0 の変数記号のとき $(\exists \boldsymbol{v})(\varphi)$ と $(\forall \boldsymbol{v})(\varphi)$ は式である.

(4) φ が式で $\boldsymbol{\alpha}$ が型 1 の変数記号のとき $(\exists \boldsymbol{\alpha})(\varphi)$ と $(\forall \boldsymbol{\alpha})(\varphi)$ は式である.

とくに, ルール (4) を一度も使わずにできる式 (型 1 の変数の量化を含まない式) のことを, <u>算術式</u> という.

項および式におけるカッコの省略の規約などは普通どおりに定められているものとする.

1.4 有界な式

算術式 (型 1 の量化をふくまない式) のうち, すべての量化子の出現が

$$(\exists \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} < \boldsymbol{t} \wedge \cdots) \text{ あるいは } (\forall \boldsymbol{v})(\boldsymbol{v} < \boldsymbol{t} \to \cdots)$$

(しかも, 項 $\boldsymbol{t}$ には変数 $\boldsymbol{v}$ は含まれていない) という形をしているものを, <u>有界な式</u> という. このような形の量化子の出現は, それぞれ

$$(\exists \boldsymbol{v} < \boldsymbol{t})(\cdots) \text{ および } (\forall \boldsymbol{v} < \boldsymbol{t})(\cdots)$$

のように略記される.

有界な式の標準的な解釈における真偽は, 自然数に関する和と積の演算, 大小の比較, および関数 (型 1 の引数) の値の問い合わせを有限回おこなうことで, かならず判定できる. しかし, 逆に, 有限の手続きで真偽が判定できるコンセプトがすべて有界な式で書けるかというと, そうはいかない. 実際のところ, 有界な式の表現能力は高くない. たとえば, “x は素数である” は

$$(x > 1) \wedge \neg(\exists y < x)(\exists z < x)[\, y > 1 \wedge z > 1 \wedge x = yz \,]$$

と有界な式で書ける (ここで $>$ という正式でない記号を使ったがその処理の仕方は明らかだろう) が, “$x = y^z$” とか “x は完全数である” とかになると, もうどう書いたらいいかわからない. (かといって, これらが本当に有界な式で書けないか確かめるも簡単ではない.)

あとで説明する Δ^0_1 定義可能なコンセプトの全体が, 有限の手続きで決定できるコンセプトの全体と一致すると考えられている. そこまで範囲を拡げれば, 表現能力も十分になる.

1.5 ペアリング

$\langle a,b\rangle = (a+b)(a+b+1)/2+b$ とおく (自然数のペアリング).

	0	1	2	3	4	$\cdots$
0	0	2	5	9	14	$\cdots$
1	1	4	8	13	$\cdots$	
2	3	7	12	$\cdots$		
3	6	11	$\cdots$			
4	10	$\cdots$				
$\vdots$	$\vdots$					

(縦軸 a, 横軸 b に対する $\langle a,b\rangle$ の値)

これで $\omega\times\omega$ と ω の間に一対一対応ができる. この $\langle\ ,\ \rangle$ を導入することによって算術の言語を少し拡大しておくとあとで便利だ. この拡大は言語の実質的な表現能力を拡大するものではない. というのも, ペアリングを含む式を見て, ペアリングを含まない同値な式に書き換える (ペアリングを除去する) 簡単で機械的な手順というものがあるから. 要するに, $\varphi(\langle t_0,t_1\rangle)$ を

$$(\exists x<(t_0+t_1+1)(t_0+t_1+1))[\,2x=(t_0+t_1)(t_0+t_1+1)\wedge\varphi(x+t_1)\,]$$

と書き換えればよいだけだ. したがって, 少なくとも標準的な解釈のもとでは, ペアリングを使った有界な式は使わない有界な式と同値だし, ペアリングを使った算術式は使わない算術式と同値になる.

ペアリングの逆演算として $(\ )_0$ と $(\ )_1$ を考える. これは $x=\langle y,z\rangle$ が $y=(x)_0\wedge z=(x)_1$ と同値になるように定められる. そこで

$$\varphi((t)_0,(t)_1)$$

は

$$(\exists v_0<(t+1))(\exists v_1<(t+1))[\,t=\langle v_0,v_1\rangle\wedge\phi(v_0,v_1)\,]$$

と同じである. この方法で $(\ )_0$ と $(\ )_1$ を除去する手続きによって, 算術式は算術式に, 有界な式は有界な式に書き換えられる.

今後は, 自然数のペアリング演算 $\langle\ ,\ \rangle$ および $(\ )_0$ と $(\ )_1$ は自由に用いる.

1.6 算術式の分類, 算術的集合

算術式 φ が与えられたとして, これをまず冠頭形にする. たとえば $\psi\wedge(\exists v)(\theta(v))$ という式があったら, θ に含まれる変数 v の出現を, ψ に含まれない変数 v' に一斉に書き換え, $(\exists v')(\psi\wedge\theta(v'))$ としても論理的に同値である. この要領ですべての量化子を式の先頭にあつめた式を冠頭形の式という. た

だし, あらかじめ $\psi \to \theta$ を $(\neg\psi) \vee \theta$ に直し, さらに $\neg\exists$ は $\forall\neg$ におきかえるという方法で, 量化子が $\neg$ の内側や $\to$ の左辺に出現しないようにしておく.

冠頭形の式の先頭にある量化子の並びに,

$$\cdots(\exists v_0)(\exists v_1)\cdots[\cdots v_0 \cdots v_1 \cdots]$$

のように $\exists$ が 2 つ続くところがあれば,

$$\cdots(\exists v)\cdots[\cdots(v)_0\cdots(v)_1\cdots]$$

のようにひとつにまとめることができる. ただしこの書き換えによって, $[\cdots]$ の部分に有界な量化子が余分に必要になる可能性がある. 同様に

$$\cdots(\forall v_0)(\forall v_1)\cdots[\cdots v_0 \cdots v_1 \cdots]$$

を

$$\cdots(\forall v)\cdots[\cdots(v)_0\cdots(v)_1\cdots]$$

と書き換えることができる. (このときも $[\cdots]$ に有界な量化子を追加する必要がある.) いずれにせよ, このようにして, すべての算術式は

$$\begin{array}{lll} & (\exists v_0)(\text{有界な式}) \quad (\exists v_0)(\forall v_1)(\text{有界な式}) \quad \cdots \\ \text{有界な式} & \\ & (\forall v_0)(\text{有界な式}) \quad (\forall v_0)(\exists v_1)(\text{有界な式}) \quad \cdots \end{array}$$

のように, 有界な式の前に型 0 の $\exists$ と $\forall$ が交代しながらつく形の式のどれかと同値 (標準的な解釈のもとで真偽が一致) ということになる. これらの式を, 先頭についた量化子の種類と, 交代する量化子の数によって,

$$\begin{array}{lll} & \Sigma^0_1 \text{ 式} \quad \Sigma^0_2 \text{ 式} \quad \cdots \\ \Sigma^0_0\text{式} = \Pi^0_0\text{式} & \\ & \Pi^0_1 \text{ 式} \quad \Pi^0_2 \text{ 式} \quad \cdots \end{array}$$

のように呼ぶ. たとえば $\alpha = \beta$ を意味する $(\forall n)(\alpha(n) = \beta(n))$ は Π^0_1 式だし, "あるところから先ずっと $\alpha(n) = 0$" を意味する $(\exists m)(\forall n)(n > m \to \alpha(n) = 0)$ は Σ^0_2 式である.

算術式によって $\mathbf{A}_2$ 上で定義されるような集合を <u>算術的集合</u> という. より詳しくいうと, Σ^0_n 式 $\varphi(x_0, \ldots, x_{k-1}, \alpha_0, \ldots, \alpha_{\ell-1})$ (ここに列挙した以外には自由な変数がないものとして) によって,

$$(*) \qquad A = \{\, (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^k \times (\omega^\omega)^\ell : \mathbf{A}_2 \models \varphi(\vec{x}, \vec{\alpha}) \,\}$$

と定義できるような, $\omega^k \times (\omega^\omega)^\ell$ の部分集合 A を, <u>Σ^0_n 集合</u> という. <u>Π^0_n 集合</u> についても同様に定める. A を定義する $(*)$ 式がパラメータを含まない点が重要である. パラメータを許さないので, 各 n につき Σ^0_n 集合や Π^0_n 集合は可算個しかないことになる. もちろん, 算術的集合も可算個しかない.

1.7　Δ^0_n 集合, とくに Δ^0_1 集合

ある集合が, Σ^0_n 集合であると同時に Π^0_n 集合である, という場合も考えられる．そのような集合のことを Δ^0_n 集合という．(注意: Δ^0_n 式などというものはない.)

とくに重要なのが Δ^0_1 集合である．Δ^0_1 集合 A は, 有界式 ψ と θ によって,

$$(\triangle) \qquad (\vec{x},\vec{\alpha}) \in A \iff \mathbf{A}_2 \models (\exists y)\psi(\vec{x},y,\vec{\alpha}) \iff \mathbf{A}_2 \models (\forall y)\theta(\vec{x},y,\vec{\alpha})$$

とあらわされる．ψ と θ は有界な式だから, 個別の $(\vec{x},\vec{\alpha})$ が与えられたとき, ひとつひとつの y に対しては, $\psi(\vec{x},y,\vec{\alpha})$ あるいは $\theta(\vec{x},y,\vec{\alpha})$ が成立しているか否かは有限回の手続きで調べることができる．そこで, $\psi(\vec{x},y,\vec{\alpha})$ または $\neg\theta(\vec{x},y,\vec{\alpha})$ が成立するような y が見つかるまで $y = 0, 1, 2, \ldots$ と探索を続ければ, 見つかった y が ψ か $\neg\theta$ かどちらを満たすかによって $(\vec{x},\vec{\alpha}) \in A$ か $(\vec{x},\vec{\alpha}) \notin A$ かが判定できる．この手続きが必ず有限回のステップで停止することを, $(\triangle)$ 式は保証してくれる．すなわち, Δ^0_1 集合は, 有限回のステップで確実に要素の所属関係を判定する手続きをもつ．(ただし, 手続き終了までの所要時間は事前には見積れない．0.3 秒で終わるかもしれないし 5 億年かかるかもしれない.)

自然数の Δ^0_1 集合というのは, recursive な集合, Turing-Computable な集合というのと同値になる．そこで, Δ^0_1 集合であることが, 有限ステップで確実に終わる判定手続をもつ集合であるための必要十分条件であろうと考えられている．

1.8　算術的階層

算術的集合を Σ^0_n, Π^0_n に分類し, さらに Δ^0_n というクラスを定義した．ここで, Σ^0_n 式 ϕ に含まれない変数 v を使って, $(\forall v)(\phi)$ を考えると, これは ϕ と同値な Π^0_{n+1} 式だし, 同じようなムダな量化子を, 量化子の並びの先頭ではなく並びの最後に付け加えると Σ^0_{n+1} 式ができる．したがって,

$$\Sigma^0_n, \Pi^0_n \subset \Delta^0_{n+1}$$

である．また, 定義から当然のことに

$$\Delta^0_n \subset \Sigma^0_n, \Pi^0_n$$

である．これらの包含関係は, いずれもイコールでない真の包含である．(ただし, そのことの証明には, あとでいう“普遍集合” を必要とする.) こうして, 算術的集合のすべてを, 次の階層に分類したことになる:

$$\begin{array}{ccccccc} & \Sigma^0_1 & & \Sigma^0_2 & & \Sigma^0_3 & \cdots \\ \Delta^0_1 & & \Delta^0_2 & & \Delta^0_3 & & \\ & \Pi^0_1 & & \Pi^0_2 & & \Pi^0_3 & \cdots \end{array}$$

1.9 算術的でない式の標準形

型 1 の量化子を含む式を冠頭形にすると, 一般には, 型 0 と型 1 の量化子が混在することになる. しかし,

$$\cdots(\forall n)(\exists\alpha)\cdots[\cdots\ n\ \cdots\ \alpha(t)\ \cdots]$$

は, 各 n ごとにそのような α のひとつを α_n として選んでから, $\alpha(\langle n,k\rangle)=\alpha_n(k)$ となるような α を考えれば,

$$\cdots(\exists\alpha)(\forall n)\cdots[\cdots\ n\ \cdots\ \alpha(\langle n,t\rangle)\ \cdots]$$

と同値である. (ここでは, 標準モデル $\mathbf{A}_2$ で ω^ω の要素についての可算選択公理が成立していると仮定していることになる.) これの双対として, 少し奇妙に思えるが,

$$\cdots(\exists n)(\forall\alpha)\cdots[\cdots\ n\ \cdots\ \alpha(t)\ \cdots]$$

は

$$\cdots(\forall\alpha)(\exists n)\cdots[\cdots\ n\ \cdots\ \alpha(\langle n,t\rangle)\ \cdots]$$

と同値である. また,

$$\cdots(\exists n)(\exists\alpha)\cdots[\cdots\ n\ \cdots\ \alpha(t)\ \cdots],$$
$$\cdots(\forall n)(\forall\alpha)\cdots[\cdots\ n\ \cdots\ \alpha(t)\ \cdots]$$

は, それぞれ

$$\cdots(\exists\alpha)\cdots[\cdots\ \alpha(0)\ \cdots\ \alpha(t+1)\ \cdots],$$
$$\cdots(\forall\alpha)\cdots[\cdots\ \alpha(0)\ \cdots\ \alpha(t+1)\ \cdots]$$

と同値である. このようにして, 型 0 の量化子を内側へ移動または除去できて, すべての式は算術式の前に型 1 の量化子がいくつかついた形に整理できる. このとき,

$$\cdots(\exists\alpha_0)(\exists\alpha_1)\cdots[\cdots\alpha_0(t_0)\cdots\alpha_1(t_1)\cdots]$$

を

$$\cdots(\exists\alpha)\cdots[\cdots\alpha(\langle 0,t_0\rangle)\cdots\alpha_1(\langle 1,t_1\rangle)\cdots]$$

とするように, 続けて出現する同じ種類の量化子を一つにまとめることができる.

こうして, すべての式は,

$$\begin{array}{llll} & (\exists\alpha_0)(\text{算術式}) & (\exists\alpha_0)(\forall\alpha_1)(\text{算術式}) & \cdots \\ \text{算術式} & & & \\ & (\forall\alpha_0)(\text{算術式}) & (\forall\alpha_0)(\exists\alpha_1)(\text{算術式}) & \cdots \end{array}$$

のように, 算術式の前に型 1 の $\exists$ と $\forall$ が交代しながらつく形の式のどれかと同値ということになる. 算術式を分類したときと同様に, これらの式を, 先頭についた量化子の種類と, 交代する量化子の数によって,

$$
\begin{array}{lll}
 & \Sigma^1_1\text{ 式} \quad \Sigma^1_2\text{ 式} \quad \cdots \\
\Sigma^1_0\text{式} = \Pi^1_0\text{式} & \\
 & \Pi^1_1\text{ 式} \quad \Pi^1_2\text{ 式} \quad \cdots
\end{array}
$$

のように呼ぶ.

こうして分類された式はさらに整理して標準形を求めることができる. たとえば型 1 の量化子の一番内側のものが $\exists$ である場合を考えると,

$$\cdots(\exists\alpha)(\exists n)\cdots[\cdots n\cdots\alpha(t)\cdots]$$

は

$$\cdots(\exists\alpha)\cdots[\cdots\alpha(0)\cdots\alpha(t+1)\cdots]$$

と同じだし,

$$\cdots(\exists\alpha)(\forall m)(\exists n)\cdots[\cdots m\cdots n\cdots\alpha(t)\cdots]$$

は, 各 m に, そのような n を対応させる関数 β を考えて

$$\cdots(\exists\alpha)(\exists\beta)(\forall m)\cdots[\cdots m\cdots\beta(m)\cdots\alpha(t)\cdots]$$

と同値, したがって,

$$\cdots(\exists\alpha)(\forall m)\cdots[\cdots m\cdots\alpha(\langle 0,m\rangle)\cdots\alpha(\langle 1,t\rangle)\cdots]$$

と同値ということになる. このようにして, 算術式の前に並んだ型 1 の量化子のうち最も内側のものが $\exists$ であるなら, そのあとの算術式としては Π^0_1 式だけを考えればよい. 同様に, 一番内側の型 1 の量化子が $\forall$ であるなら, そのあとの算術式は Σ^0_1 式であると仮定してよい.

こうして, 二階算術のすべての式は,

$$
\begin{array}{ll}
 & (\exists\alpha_0)(\forall n)(\text{有界な式}) \quad (\exists\alpha_0)(\forall\alpha_1)(\exists n)(\text{有界な式}) \quad \cdots \\
\text{算術式} & \\
 & (\forall\alpha_0)(\exists n)(\text{有界な式}) \quad (\forall\alpha_0)(\exists\alpha_1)(\forall n)(\text{有界な式}) \quad \cdots
\end{array}
$$

という標準形のどれかと同値である.

1.10 解析的な集合

二階算術の式によって $\mathbf{A}_2$ 上でパラメータを使わずに定義されるような集合を解析的な集合[1]という. とくに, Σ^1_n 式 $\varphi(x_0,\ldots,x_{k-1},\alpha_0,\ldots,\alpha_{\ell-1})$ に

[1] “解析的な集合” は, 古典記述集合論で $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合を意味する用語として定着した “解析集合” と混同しやすいので注意が必要だ. このノートでは, 混乱を避けるため, $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合のことを “解析集合” とは呼ばないことにする. また, “解析的な集合” という言葉も, 避けられれば避けることにする.

よって (ここに列挙した以外には自由な変数がないものとして),

$$(**)\qquad A = \{\ (\vec{x}, \vec{\alpha}) \in \omega^k \times (\omega^\omega)^\ell : \mathbf{A}_2 \models \varphi(\vec{x}, \vec{\alpha})\ \}$$

と定義できるような, $\omega^k \times (\omega^\omega)^\ell$ の部分集合 A を, Σ^1_n 集合 という. Π^1_n 集合 についても同様に定める. Σ^1_n であると同時に Π^1_n でもあるような集合のことを Δ^1_n 集合 という. ここでも, A を定義する $(**)$ 式がパラメータを含まない点が重要である. したがって, 解析的集合も可算個しかない.

解析的な集合は

$$\begin{array}{ccccccc} & \Sigma^1_1 & & \Sigma^1_2 & & \Sigma^1_3 & \cdots \\ \Delta^1_1 & & \Delta^1_2 & & \Delta^1_3 & & \\ & \Pi^1_1 & & \Pi^1_2 & & \Pi^1_3 & \cdots \end{array}$$

という階層 (解析的階層) に分類される.

1.11 射影集合

構造 $\mathbf{A}_2$ 上で, パラメータを含んだ二階算術の式で定義できる集合のことを 射影集合 という. 射影集合は, 定義に用いられた式 (標準形) に対応して, $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ 集合, $\boldsymbol{\Pi}^1_n$ 集合 $\boldsymbol{\Delta}^1_n$ 集合に分類できる (太文字に注意!). すなわち, 射影集合は

$$\begin{array}{ccccccc} & \boldsymbol{\Sigma}^1_1 & & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 & & \boldsymbol{\Sigma}^1_3 & \cdots \\ \boldsymbol{\Delta}^1_1 & & \boldsymbol{\Delta}^1_2 & & \boldsymbol{\Delta}^1_3 & & \\ & \boldsymbol{\Pi}^1_1 & & \boldsymbol{\Pi}^1_2 & & \boldsymbol{\Pi}^1_3 & \cdots \end{array}$$

という階層 (射影階層) に分類される. また, パラメータを含んだ算術式で定義できる集合をも, 定義に用いられた算術式に対応して分類して,

$$\begin{array}{ccccccc} & \boldsymbol{\Sigma}^0_1 & & \boldsymbol{\Sigma}^0_2 & & \boldsymbol{\Sigma}^0_3 & \cdots \\ \boldsymbol{\Delta}^0_1 & & \boldsymbol{\Delta}^0_2 & & \boldsymbol{\Delta}^0_3 & & \\ & \boldsymbol{\Pi}^0_1 & & \boldsymbol{\Pi}^0_2 & & \boldsymbol{\Pi}^0_3 & \cdots \end{array}$$

という階層を考える. これは有限レベルのボレル集合の階層と一致する.

1.12 位相構造との関係

実は, $\boldsymbol{\Sigma}^0_1$ 集合 (パラメータつきの Σ^0_1 式で定義されるような, $\omega^k \times (\omega^\omega)^\ell$ の部分集合) というのは, $\omega^k \times (\omega^\omega)^\ell$ の 開 部分集合というのと一致する. 同様に $\boldsymbol{\Pi}^0_1$ 集合というのと閉集合というのは同じことである. 太字の階層 $\boldsymbol{\Sigma}^p_n$, $\boldsymbol{\Pi}^p_n$, $\boldsymbol{\Delta}^p_n$ (ただし, $p \in \{0, 1\}$, $n \in \omega$) を定義するためだけなら, だからここまで延々議論したような面倒な手続きはいらない. ここでは, そうした古典的な流儀での定義を復習する.

まず, ω には離散位相を入れる. そして, ω^ω は可算個の ω のコピーの直積集合とみなして, 直積位相を入れる. この ω^ω 上の位相は, 列 $\{\alpha_i\}_{i\in\omega}$ が与えられたときに,

$$(\forall n)(\forall^\infty i)[\,\alpha_i(n) = \alpha(n)\,]$$

となることをもって α_i が α に収束するとみなす位相だと言ってもいいし, また, 距離関数

$$d(\alpha, \beta) = \frac{1}{\min\{\, n < \omega : \alpha(n) \neq \beta(n)\,\} + 1}$$

によって誘導される位相と言ってもいい. この距離は完備であり, ω^ω はこの距離のもとで可分完備距離空間, したがってポーランド空間となる. $\omega^k \times (\omega^\omega)^\ell$ の位相は, この ω と ω^ω の位相の直積位相である.

さて, 古典的な定義では, この位相の意味での開集合の全体を $\mathbf{\Sigma}^0_1$, 閉集合の全体を $\mathbf{\Pi}^0_1$ とし, 以下帰納的に, $\mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$ を $\mathbf{\Pi}^0_n$ 集合の可算列の和集合になる集合の全体, $\mathbf{\Pi}^0_{n+1}$ を $\mathbf{\Sigma}^0_n$ 集合の可算列の共通部分になる集合全体, と定義してゆく. したがって, $\mathbf{\Sigma}^0_2$ とは位相空間論でいう F_σ のことであり, $\mathbf{\Pi}^0_2$ とは G_δ のことである.

つぎに, $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合とは $\omega^k \times (\omega^\omega)^{\ell+1}$ の閉部分集合を $\omega^k \times (\omega^\omega)^\ell$ へ射影した集合であり, $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合はその補集合. 以下帰納的に, $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合の射影が $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ 集合, その補集合が $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 集合というぐあいに, 射影集合の階層が定義される.

この方法によれば, 射影集合の階層を一般のポーランド空間で定義でき, ω^ω 上の射影集合の理論の大部分が一般のポーランド空間で成立する.

1.13 なんでこんな定義なのか

われわれの二階算術の言語を使う定義と古典的な定義は同等である. ではなぜ, われわれはあんなシチメンドクサイ定義をしたのか.

その理由は, 「集合論そのものには, 標準的な解釈が, ありそうで, ない」ということだ. 集合論には標準的な解釈がない (あるいは標準的な解釈の候補がたくさんありすぎる) ので, 二階算術の標準モデルである $\mathbf{A}_2$ の正体が, 実はどんな集合論の universe で考えているのかに依存してしまう. ある universe での射影集合が, 別の universe に行って見直すと, 集合としてはてんでわけのわからんトンチンカンなものになってしまう可能性もあるのだ. [2]

いっぽう, 二階算術の言語そのものは有限なオブジェクトの集まりであって, (有限性の意味が変わってしまう超準モデルでもない限り) 集合論の universe の選び方には依存しない. 同じ二階算術の式で定義される集合が universe ごとに存在することになるので, 集合としては別物であっても, 同じ式で定義されているという点に注目して, それらを同一視したい場合もある. その場合に

[2] たとえば, ハリントンの [2] の結果を参照. イェックの旧版 [3] はこのハリントンの定理の紹介 (Lemma 44.10) で締めくくられたものだが, 2003 年の新版 [4] では割愛されてしまった.

は, モノの集まりとしての集合よりも, それを定義する式のほうを実体と思っていることになる.

この, 定義する式に注目して, 異なる universe の間で異なるオブジェクトを (定義の一致に注目して) 同一視することは, 無条件にはうまくいかない. ではどういう条件のもとでうまくいくのか (同じ式の意味内容が複数の universe のあいだで一致するのか), というのが, 絶対性の問題 というわけだ.

こうして, 射影集合のような定義可能なオブジェクトについて議論し, しかも強制法などのツールで複数の universe の間を行ったりきたりするような場合[3]には, いま扱っているのは集合論の変数が意味する内容としての集合そのものなのか, あるいはそれを定義している式 (とパラメータなどのデータ) なのかという点について, 一応ハッキリさせておく必要がある. このノートにおいて, われわれが二階算術の言語を強く意識する形で射影集合を定義した理由の ひとつ は, そこにある. (もうひとつの理由は, そうしないとあとでいうギャンディ位相の議論ができないからだ.)

1.14 相対化

二階算術の標準モデル $\mathbf{A}_2$ 上で, パラメータを使わずに定義できる集合を解析的な集合といい, パラメータを使って定義可能な集合のことを射影集合と呼んだ. このことは, 射影集合は解析的な集合の “切り口” として得られる, ということを意味する. たとえば, Σ^1_n 式 θ によって

$$A = \{ \langle \vec{n}, \vec{\alpha}, \beta \rangle \in \omega^k \times (\omega^\omega)^{\ell+1} : \mathbf{A}_2 \models \theta(\vec{n}, \vec{\alpha}, \beta) \}$$

のように定義された解析的な集合 A があったとき, $\beta \in \omega^\omega$ を固定して,

$$A_\beta = \{ \langle \vec{n}, \vec{\alpha} \rangle \in \omega^k \times (\omega^\omega)^{\ell+1} : \langle \vec{n}, \vec{\alpha}, \beta \rangle \in A \}$$

を考えると, 一つの射影集合が得られることになる. この射影集合 A_β は, β をパラメータとして Σ^1_n 式 θ によって定義されているので, $\Sigma^1_n(\beta)$ 集合 と呼ばれる. すべての Σ^1_n 集合は, このように Σ^1_n 式に何かのパラメータを “代入” した結果として得られるので,

$$\mathbf{\Sigma}^1_n = \bigcup_{\beta \in \omega^\omega} \Sigma^1_n(\beta)$$

ということになる. Π^1_n, Δ^1_n, Σ^0_n, Π^0_n, Δ^0_n についても同様だ. パラメータが一個で十分である理由はつぎのとおり.

$$\theta(\boldsymbol{\vec{n}}, \boldsymbol{\vec{\alpha}}, \boldsymbol{\beta_0}, \ldots, \boldsymbol{\beta_{r-1}})$$

と複数のパラメータが必要なようでも, $\boldsymbol{\beta_i(t)}$ の形の変数の出現を, すべて $\boldsymbol{\beta(\langle i, t \rangle)}$ に書き換えた式

$$\theta'(\boldsymbol{\vec{n}}, \boldsymbol{\vec{\alpha}}, \boldsymbol{\beta})$$

[3]われわれの考えたいのはそういう場合のことですよね

を考え, パラメータ β として

$$\beta(n) = \begin{cases} \beta_i(j) & n = \langle i, j \rangle,\ i < r \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

を使って θ' によって定義される式を考えればよいわけだ.

そこで, $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ 集合はすべて Σ^1_n 集合の切り口として得られることになる. このことを利用して, すべての Σ^1_n 集合について成立する命題を証明してから, 切り口の性質を考えることによって, すべての $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ 集合について成立する命題を導き出す, という論法が考えられることになる. この方法を <u>相対化の方法</u> といい, 目的となる $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ 集合についての命題に対して, Σ^1_n に限定された命題をその lightface 版とか effective 版とかいう. 逆に Σ^1_n 集合に関する命題にパラメータを代入した結果として得られた $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ に関する命題は, もとの命題の boldface 版という.

射影集合に関する命題でも, 実際の証明では, その lightface 版を証明している場合が多い. (しかし, こういう話は実例を見てから聴かないと, ピンとこないでしょうなあ.)

1.15 普遍集合

すべての $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ 集合が, 適当な Σ^1_n 集合の切り口として得られると言った. ところが実は, 母体となる Σ^1_n 式をいろいろ変えなくても, あるひとつの Σ^1_n 集合の切り口として, すべての $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$ 集合が得られる. このことを, ここで説明する.

Γ を, Σ^0_n, Π^0_n, Σ^1_n, Π^1_n のどれかとしよう. $\omega^{k+1} \times (\omega^\omega)^\ell$ の部分集合 U が Γ 集合で, しかも $\omega^k \times (\omega^\omega)^\ell$ の任意の Γ 部分集合が, ある自然数 $e \in \omega$ について

$$U_e = \{\ \langle \vec{n}, \vec{\alpha} \rangle : \langle e, \vec{n}, \vec{\alpha} \rangle \in U\ \}$$

という形で得られるとする. このような集合 U は <u>普遍 Γ 集合</u> と呼ばれる. また, これの boldface 版として, $\omega^k \times (\omega^\omega)^{\ell+1}$ の部分集合 U が $\boldsymbol{\Gamma}$ 集合で, また $\omega^k \times (\omega^\omega)^\ell$ の任意の $\boldsymbol{\Gamma}$ が, ある $\gamma \in \omega^\omega$ について

$$U_\gamma = \{\ \langle \vec{n}, \vec{\alpha} \rangle : \langle \vec{n}, \gamma, \vec{\alpha} \rangle \in U\ \}$$

という形で得られるならば, このような集合 U は <u>普遍 $\boldsymbol{\Gamma}$ 集合</u> と呼ばれる.

boldface 版の普遍集合の存在証明はそれほど難しくない. "自然数 s は 有限列 $(\alpha(0), \ldots, \alpha(r-1))$ のコードである" ということを記述する Σ^0_1 式が存在するので, いまそれを仮に "$s = \alpha \restriction r$" と書けば,

$$\langle \gamma, \alpha \rangle \in U \iff (\exists n)(\exists r)[\ \gamma(n) = \alpha \restriction r\ ]$$

と定義される U は Σ^0_1 集合で, ω^ω の $\mathbf{\Sigma}^0_1$ 集合 (=開集合) はすべて U_γ の形に書ける．この要領で, $\omega^{k+1}\times(\omega^\omega)^\ell$ に対する普遍 $\mathbf{\Sigma}^0_1$ 集合 $U\subset\omega^{k+1}\times(\omega^\omega)^{\ell+1}$ を作っておいて,

$$\langle\vec{n},\gamma,\vec{\alpha}\rangle\in V \iff (\exists i)[\,\langle\vec{n},i,\gamma,\vec{\alpha}\rangle\notin U\,]$$

と V を定義すれば, これが普遍 $\mathbf{\Sigma}^0_2$ 集合になる．以下同様にして, 普遍 $\mathbf{\Sigma}^0_n$ 集合を作れば, その補集合は普遍 $\mathbf{\Pi}^0_n$ 集合である．また, $\omega^k\times(\omega^\omega)^{\ell+1}$ に対する普遍 $\mathbf{\Sigma}^0_1$ 集合 $U\subset\omega^k\times(\omega^\omega)^{\ell+2}$ から,

$$\langle\vec{n},\gamma,\vec{\alpha}\rangle\in V \iff (\exists\beta)[\,\langle\vec{n},i,\gamma,\vec{\alpha},\beta\rangle\notin U\,]$$

と定義すれば, これが普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合になる．同じ式の U のところに普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合を代入すれば V として普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ 集合が得られ, その補集合として, 普遍 $\mathbf{\Pi}^1_{n+1}$ 集合が得られることになる．この方法で得られる普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合は, それ自身としてはパラメータなしで定義された Σ^1_n 集合である．

lightface 版の普遍集合の存在証明はこれよりずっと難しい．最初の普遍 Σ^0_1 集合の存在証明さえできてしまえば, あとは boldface 版と同じなのだが, その普遍 Σ^0_1 集合の存在証明が問題だ．Recursion theory を知っている人には,

$$\langle e,\vec{n},\vec{\alpha}\rangle\in U \iff \{e\}(\vec{n},\vec{\alpha})\downarrow$$

と定義した U は普遍 Σ^0_1 集合だ, と言えばそれで済む．だが, $\{e\}$ なんて知らないという人には, これでは何の説明にもならない．

lightface 版の普遍集合の存在は, 二階算術の普遍 Σ^0_1 式の存在ということに帰着する．ここで $\varphi(e,\vec{n},\vec{\alpha})$ が <u>普遍 Σ^0_1 式</u> であるとは, まずそれ自身が Σ^0_1 式であり, また, 任意の Σ^0_1 式 $\theta(\vec{n},\vec{\alpha})$ に対してうまく $e\in\omega$ を選んで

$$\mathbf{A}_2\models(\forall\vec{n})(\forall\vec{\alpha})[\,\theta(\vec{n},\vec{\alpha})\leftrightarrow\varphi(e,\vec{n},\vec{\alpha})\,]$$

となるようにできる, という意味だ．ここでは, e がいわば式 θ の "番号" になっているわけで, 式にその文法上の構成を反映した番号を割り当てる "ゲーデル数化" あるいは "メタ数学の算術化" の方法で, 普遍式は構成されることになる．これをやりだすと, 1 回や 2 回の講義では終わらないので, ここでは, <u>普遍 Σ^0_1 式が存在する</u>, ということを確認して先へ進もう.[4]

普遍集合の存在からの帰結として, $\mathbf{\Pi}^1_n$ でない $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合が存在する．その証明は, 典型的な対角線論法だ.[5]

いま, $U\subset(\omega^\omega)^2$ を普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合として,

$$P=\{\,\alpha:\langle\alpha,\alpha\rangle\in U\,\}$$

[4]メタ数学の算術化については, よい参考文献がたくさんある．たとえば [1] とか [11] とか.

[5]数学基礎論や集合論をやっている限り, 対角線論法の "呪縛" からは, どうしても逃れようがないものらしい.

とおくと, これは $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合である. この P がもしも $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合であったなら, その補集合 $R = \omega^\omega \setminus P$ は $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合だから, ある γ について $R = U_\gamma$ となるが, このとき,

$$\gamma \in R \iff \langle \gamma, \gamma \rangle \in U \iff \gamma \in P \iff \gamma \in \omega^\omega \setminus R$$

となって矛盾である. したがって, P は $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合ではない. このように, $\mathbf{\Pi}^1_n$ でない $\mathbf{\Sigma}^1_n$ が存在するのだから, 普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_n$ は決して $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合にはならない.

さきほどの boldface 版普遍 $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合が実はパラメータなしで定義されていて Σ^1_n 集合になっていたことを思い出そう. これによって, (boldface) $\mathbf{\Pi}^1_n$ でない (lightface) Σ^1_n 集合が存在する, ということがわかったことになる.

同じ論法で, 初等的な代入操作のもとで閉じていて普遍集合をもつような集合のクラスは補集合をとる操作のもとでは閉じていないことがわかる. また, 補集合に関して閉じた Δ^0_n や Δ^1_n あるいはその boldface 版の普遍集合, 算術的集合全体のクラスの普遍集合, 射影集合全体のクラスの普遍集合などが存在しないことがわかる. 算術的な式すべてを表現する Π^1_1 式なら存在するが, それ自身は決して算術的にならないわけだ.

1.16 完備集合

普遍集合と密接に関連した概念に $\boldsymbol{\Gamma}$-完備集合というものがある. ω^ω の部分集合 C が, "すべての $\boldsymbol{\Gamma}$ 集合はなんらかの連続写像による C の逆像である" という性質をもつときに, この C は <u>$\boldsymbol{\Gamma}$-困難である</u> という. これは奇妙な用語だが, 計算量理論の $\boldsymbol{NP}$-困難性という概念に由来するネーミングだ. $\boldsymbol{\Gamma}$-困難な $\boldsymbol{\Gamma}$ 集合のことを <u>$\boldsymbol{\Gamma}$-完備集合</u> という.

Remark. $\boldsymbol{NP}$-complete の訳語として "$\boldsymbol{NP}$-完全" が定着している現状を鑑みれば, ここでの用語も $\boldsymbol{\Gamma}$-完全集合とすべきだ, という意見が聴講者から出た. まことにもっともな意見だ. そういえば論理学の completeness だって完全性だし. しかし, 始めからそういうふうに講義したらしたで, 「それって perfect set の訳語と紛らわしいね」と言われたに違いない. 計算量理論で perfect set を扱う機会はなさそうだから, $\boldsymbol{NP}$-完全は $\boldsymbol{NP}$-完全でいいのだが, 記述集合論だとそうはいかない. かといって, 完備とか complete という用語の意味だって, ひととおりではない. 難しいものだ.

ところで, 《complete》は単に「あるべきものがひととおりある」という意味の言葉であり, いっぽうの《perfect》は「まったく非のうちどころがない」という, もっとよいニュアンスの言葉だ. だから《perfect》に日本語を当てるとしたら, 「完璧」が最適だ. 数学のテクニカルタームとしておいそれと使える言葉ではない. たかが「孤立点のない閉集合」ごときに perfect という語を使ってしまったカントールがそもそも悪かったのではないかと思う.

多くの完備集合の実例がケクリスの本 [5] に紹介されている. ここでは一番重要な一つだけを紹介する. 各 $\alpha \in \omega^\omega$ に対して, ω 上の二項関係 $\leq_\alpha$ を

$$i \leq_\alpha j \iff \alpha(\langle i, j \rangle) = 0$$

と定義する．そして，

$$\mathbf{LO} = \{\ \alpha \in \omega^\omega : (\omega, \leq_\alpha)\ \text{は全順序}\ \}$$
$$\mathbf{WO} = \{\ \alpha \in \omega^\omega : (\omega, \leq_\alpha)\ \text{は整列順序}\ \}$$

と定める．このとき $\mathbf{WO}$ は $\mathbf{\Pi}^1_1$-完備集合である．

あとの節で，もう一つの重要な $\mathbf{\Pi}^1_1$-完備集合の例を (証明つきで) 紹介する (定理 5)．

2 ショケのゲーム

概要. この節では二階算術の議論からいったん離れて位相空間論と密接に関わる話をします．この節の最後に述べる命題 2.8 は，あとで Σ^1_1 にかんする完全集合定理 (定理 10) の証明に応用されます．

位相空間 X の開集合系を $\mathcal{O}$ とし，$\mathcal{B}$ をこの空間 X の任意の開基とする．ゲーム $\mathcal{G}(X, \mathcal{B})$ とは次のような無限ゲームである．

$$\begin{array}{lccccccc} (\text{先手}) & U_0 & & U_1 & & U_2 & \cdots \\ (\text{後手}) & & V_0 & & V_1 & & \cdots \end{array}$$

のように交互に $\mathcal{B}$ に属する空でない開集合を選ぶ．それぞれの集合はそれまでに選ばれた集合に含まれるものでなくてはならない: $U_0 \supset V_0 \supset U_1 \supset V_1 \supset \cdots$．このルールのもとですべての自然数 n について U_n と V_n が選ばれたとして，$\bigcap_{n<\omega} U_n = \emptyset$ であれば先手の勝ち，そうでなければ後手の勝ちとする．

また，これを少し変形したゲーム $\mathcal{G}^+(X, \mathcal{B})$ を考える．

$$\begin{array}{lccccccc} (\text{先手}) & x_0, U_0 & & x_1, U_1 & & x_2, U_2 & \cdots \\ (\text{後手}) & & V_0 & & V_1 & & \cdots \end{array}$$

今度は，先手が U_n の他にその要素 x_n をも選ぶ．後手は $x_n \in V_n \subset U_n$ を満たす V_n を選ぶ必要がある．他の点は $\mathcal{G}(X, \mathcal{B})$ と同じである．

命題 2.1. 任意の位相空間 X において，$\mathcal{G}^+(X, \mathcal{B})$ の必勝法の有無は開基 $\mathcal{B}$ の取り方によらない．すなわち，$\mathcal{G}^+(X, \mathcal{B})$ に先手の必勝法があることと $\mathcal{G}^+(X, \mathcal{O})$ に先手の必勝法があることとは同等である．後手の必勝法についても同様．また，$\mathcal{G}(X, \mathcal{B})$ についても同じことがいえる． □

そこで，今後は開基を明記することなく $\mathcal{G}(X)$ とか $\mathcal{G}^+(X)$ と書くことにしよう．

定義 2.2. ゲーム $\mathcal{G}(X)$ に後手の必勝法があるような空間 X をショケ空間 (Choquet space) という．また，ゲーム $\mathcal{G}^+(X)$ に後手の必勝法があるような空間 X を強ショケ空間 (strong Choquet space) という． □

命題 2.3. (Choquet) 完備距離空間は強ショケ空間である. 局所コンパクトなハウスドルフ空間は強ショケ空間である.

[**証明**] (X,d) を完備距離空間として $\mathcal{G}^+(X)$ の後手の必勝法を述べる. 先手が (x_n, U_n) を選んだら, 後手は距離 d に関する開球 $B(x_n, \rho_n)$ を, $\overline{B(x_n, \rho_n)} \subset U_n$, $0 < \rho_n < 2^{-n}$ となるように選び, $V_n = B(x_n, \rho_n)$ とすればよい. そうすれば先手が選ぶ x_n は (先手がルールに従うかぎり) 必然的にコーシー列となり, d の完備性によってある点 x に収束する. このとき 点列 $\{x_n\}$ の第 n 項よりあとはすべて $B(x_n, \rho_n)$ に含まれるから, $x \in \bigcap_{n<\omega} \overline{B(x_n, \rho_n)} \subset \bigcap_{n<\omega} U_n$ となる. だからこれは後手の必勝法である.

X が局所コンパクトなハウスドルフ空間のときには, 先手が (x_n, U_n) を選んだあとに後手は $x_n \in V_n \subset \overline{V_n} \subset U_n$ かつ $\overline{V_n}$ がコンパクトとなるように V_n を選べばよい. □

命題 2.4. 強ショケ空間はショケ空間である. □

定義 2.5. 空でない meager な開集合の存在しない空間 (ベールのカテゴリ定理の成立する空間) のことを ベール空間 (Baire space) という. □

命題 2.6. (Choquet) ショケ空間はベール空間である.

[**証明**] X がベール空間でなければ $\mathcal{G}(X)$ に先手の必勝法があることを示す. そうすると, 一つのゲームに先手と後手の必勝法が両方存在するはずはないので, X はショケ空間ではないことがわかる. O が空間 X の空でない meager な開集合だとする. 可算個の nowhere dense な閉集合 F_n を, $O \subset \bigcup_{n<\omega} F_n$ となるようにとる. ゲーム $\mathcal{G}(X)$ において, 先手はまず $U_0 = O$ とし, それ以後は $U_{n+1} = V_n \setminus F_n$ と選べば, これが必勝法となる. □

Remark. 正則位相空間 X がベール空間であるためには, $\mathcal{G}(X)$ に先手の必勝法がない ことが必要かつ十分である. また, 距離づけ可能な強ショケ空間は完備に距離づけ可能である. (Choquet) これに関連しては, ケクリスのテキスト [5] の第 8 節を参照すること.

命題 2.7. 空間 X と Y が (強) ショケ空間であれば, 直積空間 $X \times Y$ も (強) ショケ空間である. □

ベール空間については, 上のことは一般に成立しない.

命題 2.8. X をハウスドルフで孤立点のないショケ空間とする. 直積空間 $X \times X$ の megaer な部分集合 E に対して, X の部分集合 C で, $(\forall x, y \in C)[\, x \neq y \implies (x,y) \notin E\,]$ をみたし, 連続な全単射 $\varphi : C \to 2^\omega$ をもつものが存在する.

[証明] $X \times X$ の可算個の nowhere dense な閉集合 E_n を $E \subset \bigcup_{n<\omega} E_n$ となるようにとる．また $\mathcal{G}(X)$ の後手の必勝法 τ をとる．0 と 1 の有限列 $t \in 2^{<\omega}$ に対応した開集合 $V(t)$ を次のように選ぶ．まず $V(\emptyset) = X$ としよう．次に $U(0)$ と $U(1)$ を空でない開集合で $U(0) \cap U(1) = \emptyset$ かつ $(U(0) \times U(1)) \cap E_0 = \emptyset$ となるものを考える．それから $V(i) = \tau(U(i))$ $(i < 2)$ とする．つぎに, 長さ n の列 $t_0, \ldots, t_{2^n-1} \in 2^{<\omega}$ に対して $V(t_k)$ $(k < 2^n)$ が選ばれたとして, 空でない開集合 $U(t_k^\frown(i))$ $(k < 2^n, i < 2)$ を,

(i) $U(t_k^\frown(i)) \subset V(t_k)$,

(ii) $U(t_k^\frown(0)) \cap U(t_k^\frown(1)) = \emptyset$,

(iii) $k \neq k' \vee i \neq i' \implies (U(t_k^\frown(i)) \times U(t_{k'}^\frown(i'))) \cap E_n = \emptyset$

となるようにとる．そのうえで $V(t_k^\frown(i)) = \tau(U(t_k^\frown(i)))$ と選ぶ．これですべての $t \in 2^{<\omega}$ に対して $V(t)$ が選ばれることが保証される．

τ が $\mathcal{G}(X)$ における後手の必勝法であることから, 任意の無限列 $\alpha \in 2^\omega$ に対して $\bigcap_{n<\omega} V(\alpha \restriction n) \neq \emptyset$ が成立する．この共通部分から $\psi(\alpha)$ をとって $C = \{\psi(\alpha) : \alpha \in 2^\omega\}$ とおき, ψ の逆写像を φ とすれば, C が求める条件をみたす． $\square$

Remark. (1) ここでとくに X が距離づけ可能な空間であるときには, C を 2^ω と同相な完全集合とすることができる．そのためには, $U(t_k^\frown(i))$ を選ぶさいに, その直径が 2^{-n} 以下になるという条件を付け加えればよい．そうすれば, 証明の最後に出てきた ψ は 2^ω から C の上への連続な全単射となる．

(2) 上の命題は, 孤立点のないハウスドルフなショケ空間の濃度は連続体濃度以上であることを導く．このことは, “ショケ空間” を “ベール空間” にまで弱めると, もはや成立しない．たとえば, CH のモデルに ω_2 個のコーエン実数を generic に添加した拡大モデルを考えよう．このモデルにおいては, ω_1 の実数からなるルーシン集合 N (どんな meager 集合とも可算にしか交わらない不可算集合) が存在する．$X = N + \mathbb{Q}$ とおこう．この集合 X もルーシン集合であり meager 集合が必然的に可算集合になるから, ベール空間である．また X は孤立点をもたない．いっぽう, X の濃度 $(= \omega_1)$ は連続体 $(= \omega_2)$ に満たないので, 2^ω との間に全単射をもつような部分集合は含まれない．

3 密度位相

概要． この節の内容はショケ空間の例として提示したもの．命題 2.8 を用いた面白い応用ができるかと期待したけど, いまのところうまくいってません．なかなか一筋縄ではいかないなあ．

3.1 ルベーグの密度定理

数直線上のルベーグ測度を記号 μ であらわす．また, n 次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上のルベーグ測度を μ_n と書くが, 混乱の恐れがないときは, 添字は省略してしまうことがある．

数直線 $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測集合 E が与えられているとしよう. 数直線上の点 x において, 極限値

$$\phi_E(x) = \lim_{\delta \to +0} \frac{\mu(E \cap [x-\delta, x+\delta])}{2\delta}$$

が存在するなら, これを x における E の密度という. 密度 $\phi_E(x)$ が存在するなら, それは 0 以上 1 以下の実数である. $\phi_E(x) = 1$ となる点 x のことを E の密度点という.

定理 1. (ルベーグの密度定理) $\mathbb{R}$ 上の任意の可測集合 E に対して, 適当な零集合 X があって, $E \setminus X$ のすべての点が E の密度点になるようにできる.

この定理の証明には, ヴィタリの被覆定理を必要とする.

定理 2. (ヴィタリの被覆定理) 数直線 $\mathbb{R}$ 上の可測集合 E と, 区間の集まり $\mathcal{V}$ が与えられていて, すべての正の数 ε と E のすべての点 x に対して,

$$I \in \mathcal{V},\ x \in \mathrm{Int}(I),\ \mathrm{diam}(I) < \varepsilon$$

をみたす区間 I がとれるならば (このような $\mathcal{V}$ は E の <u>ヴィタリ被覆</u> であるという), そのとき

$$\mu\left(E \setminus \bigcup_{n\in\omega} I_n\right) = 0$$

をみたすように, $\mathcal{V}$ から <u>互いに交わりのない</u> 可算個の区間 I_n $(n \in \omega)$ をとることができる. □

ここで, $\mathrm{Int}(A)$ は集合 A の内部, $\mathrm{diam}(A)$ は A の "直径" すなわち, A を含む開区間の長さの下限を表す. このヴィタリの被覆定理の証明は残念ながら省略. ルベーグ積分論の教科書 (とくに導関数の理論を述べたもの) を参照.

以下, ヴィタリの被覆定理を使ってルベーグの密度定理を証明する. まず, E が零集合だったら, $X = E$ ととって定理はトリヴィアルとなるので, $\mu(E) > 0$ の場合をやればよい. $\mathcal{I}$ を, 有理開区間全体の (可算) 集合としよう. また, 実数 x を含むような有理開区間の全体を $\mathcal{I}_x$ と書こう.

任意の正の数 ε に対して,

$$P_\varepsilon(I, E) \iff \frac{\mu(I \cap E)}{\mu(I)} < 1 - \varepsilon$$

と定めよう. そして,

$$X_\varepsilon = \{\, x \in E : \forall I \in \mathcal{I}_x \exists I' \in \mathcal{I}_x [\, I' \subset I \wedge P_\varepsilon(I', E)\,]\,\}$$

とおく.

補題 3.1. X_ε は可測集合である.

[証明] $\mathcal{I}$ は可算集合なので,

$$(\forall I \in \mathcal{I})[\, x \notin I \vee (\exists I' \in \mathcal{I})[\, x \in I' \wedge I' \subset I \wedge P_\varepsilon(I, E)\,]$$

をみたす実数 x の全体は $\mathbf{\Pi}^0_2$ 集合である. そして, X_ε はこの集合と E との共通部分だから, 可測集合である. □

補題 3.2. X_ε は零集合である.

[証明] 結論を否定して $\mu(X_\varepsilon) > 0$ であったと仮定しよう. 開集合 O を, $O \supset X_\varepsilon$ かつ $\mu(O \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon \cdot \mu(X_\varepsilon)$ となるようにとる. $x \in X_\varepsilon$ であれば, x を含むどんな区間 I にも, $x \in I' \subset I \cap O$ と $P_\varepsilon(I', E)$ をみたす有理開区間が含まれる. そこで,

$$\mathcal{V} = \{\, I \in \mathcal{I} : I \subset O \wedge P_\varepsilon(I, E)\,\}$$

は, X_ε に対するヴィタリ被覆になっている. ヴィタリの被覆定理により, この $\mathcal{V}$ から互いに交わらない I_n $(n \in \omega)$ をうまくとって $\mu(X_\varepsilon \setminus \bigcup_{n\in\omega} I_n) = 0$ とできる. $O' = \bigcup_{n\in\omega} I_n$ とおこう. すると

$$\mu(O' \cap E) = \sum_{n\in\omega} \mu(I_n \cap E) < (1-\varepsilon) \cdot \sum_{n\in\omega} \mu(I_n) = (1-\varepsilon) \cdot \mu(O').$$

ところが, $\mu(X_\varepsilon \setminus O') = 0$ であることから,

$$\mu(X_\varepsilon) = \mu(X_\varepsilon \cap O') \le \mu(E \cap O') < (1-\varepsilon) \cdot \mu(O') \le (1-\varepsilon)\mu(O).$$

あとは,

$$\begin{aligned}
\mu(O) =& \mu(X_\varepsilon) + \mu(O \setminus X_\varepsilon) \\
<& (1+\varepsilon) \cdot \mu(X_\varepsilon) \\
<& (1+\varepsilon)(1-\varepsilon) \cdot \mu(O) \\
<& \mu(O)
\end{aligned}$$

となって, 矛盾が出る. □

さて, そこで, $X = \bigcup_{\varepsilon>0} X_\varepsilon$ とおこう. このとき $X = X_1 \cup X_{\frac{1}{2}} \cup X_{\frac{1}{3}} \cup \cdots$ となるから X は可算個の零集合の和で, それ自身零集合である.

$x \in E \setminus X$ だったとすると,

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists I \in \mathcal{I}_x\, \forall I' \in \mathcal{I}_x \left[\, I' \subset I \to \frac{\mu(I' \cap E)}{\mu(I')} \ge 1 - \varepsilon \,\right].$$

この I' は x を含む有理開区間だったが, x を内点として含む任意の区間 J に対して, $x \in I' \subset J$ かつ $\mu(I') \ge (1-\varepsilon) \cdot \mu(J)$ をみたす有理開区間 I' が必ずとれるので, もしも J が 上記のような I に含まれていたとすれば

$$\frac{\mu(J \cap E)}{\mu(J)} \ge \frac{\mu(I \cap E)}{(1-\varepsilon)^{-1} \cdot \mu(I)} \ge (1-\varepsilon)^2 > 1 - 2\varepsilon$$

となる．したがって, $x \in E \setminus X$ のとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, x を含むある開区間 I で, I に含まれ x を内点として含むすべての区間 J について

$$\frac{\mu(J \cap E)}{\mu(J)} \geq 1 - 2\varepsilon$$

となるようなものが, 必ずとれる．したがって, このような点 x については $\phi_E(x) = 1$ である．これでルベーグの密度定理が証明された．実際に証明されたことはもうちょっと強く, 次の形になる．

命題 3.3. 数直線 $\mathbb{R}$ 上のルベーグ可測集合 E に対して, 零集合 X がとれて, $E \setminus X$ の任意の点 x と任意の正の数 ε に対して, 次の性質を持つ開区間 I が存在する．I は x を含み, また, I に含まれ x を内部に含む任意の区間 J に対して, 不等式

$$\frac{\mu(J \cap E)}{\mu(J)} \geq 1 - \varepsilon$$

が成立する． $\square$

命題 3.4. 零集合でない可測集合の全体のつくる半順序 (random forcing) は σ-linked である．すなわち, 零集合でない可測集合の全体の族 $\mathbb{B}$ を可算個の部分集合 $\mathbb{B}_n$ $(n \in \omega)$ にわけて,

$$E_1, E_2 \in \mathbb{B}_n \to \mu(E_1 \cap E_2) > 0$$

となるようにできる．

[**証明**] 前の命題において数 ε を $0 < \varepsilon < 1/2$ ととると, 零集合でない任意の可測集合 E に対して,

$$\mu(I \cap E) > \frac{1}{2} \cdot \mu(I) \tag{2.1}$$

をみたす有理開区間 I を, 必ずみつけることができる．そこで, 有理開区間すべてを I_n $(n \in \omega)$ によって数え上げ, I_n について式 (2.1) をみたす可測集合 E の全体のなす族を $\mathcal{B}_n$ とすればよい． $\square$

3.2 密度点の集合

さて, E がルベーグ可測集合であれば, E に属するほとんどすべての実数 x について $\phi_E(x) = 1$ となる, というのがルベーグの密度定理であった．同じことを補集合 $\mathbb{R} \setminus E$ について考えると, E に属さないほとんどすべての実数 x について $\phi_{\mathbb{R}\setminus E}(X) = 1$ となるが, 明らかに, $\phi_{\mathbb{R}\setminus E}(x) = 1 - \phi_E(x)$ なので, $\mathbb{R} \setminus E$ に属するほとんどすべての実数 x について $\phi_E(x) = 0$ である．ここで

$$\Phi(E) = \{\, x \in \mathbb{R} : \phi_E(x) = 1 \,\}$$

とおくと, 上に述べたことから $\mu(E \setminus \Phi(E)) = \mu(\Phi(E) \setminus E) = 0$ となる. したがって, E と $\Phi(E)$ は零集合のイデアル $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ を法として同値である. いま, $\mathcal{N}(\mathbb{R})$ を法として同値であることを $=^*$ であらわすと, $\Phi(E)$ に関連して次のことがわかる. 任意の可測集合 A と B に対して,

(1) $\Phi(A)$ はボレル集合である.

(2) $\Phi(A) =^* A$.

(3) $A =^* B \iff \Phi(A) = \Phi(B)$.

(4) $A \subseteq B$ なら $\Phi(A) \subseteq \Phi(B)$.

(5) $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, $\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(6) $\Phi(\Phi(A)) = \Phi(A)$.

(7) $\Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$.

(8) $A \cap B = \emptyset$ なら $\quad \Phi(A) \cap \Phi(B) = \emptyset$.

可測集合 A と B が測度 μ を法として同値であるためには $\Phi(A) = \Phi(B)$ となることが必要かつ十分である. そこで, $\Phi(A)$ の全体が, 可測集合の全体から μ を法とする同値類の代表元を集めた完全代表系になっている.

補題 3.5. B を正の測度をもつルベーグ可測集合とし, x を $\Phi(B)$ の要素とする. このとき, B に含まれるコンパクト集合 K で, $\mu(K) > 0$ かつ $x \in \Phi(K)$ となるものが存在する.

[**証明**] 正の数 δ_n を次のようにとる.

(i) $\delta_0 > \delta_1 > \delta_2 > \cdots$.

(ii) $\delta_n \leq 2^{-n}$. (ここは $\delta_n \to 0$ となれば何でもよい.)

(iii) $(\forall r)[\, 0 < r < \delta_n \to \mu(B \cap [x - r, x + r])/2r \geq (1 - 2^{-n})\,]$.

そして, 集合 K_n を

(iv) $K_n \subset B \cap (x - \delta_n, x + \delta_n)$.

(v) K_n はコンパクト.

(vi) $\mu(B \cap [x - \delta_n, x + \delta_n] \setminus K_n) < 2^{-n} \cdot \delta_{n+1}$.

となるようにとり, $K = \{x\} \cup \bigcup_{n \in \omega} K_n$ とおく. あきらかに $K \subset B$ である. また, このとき,

(1) <u>K はコンパクトである.</u>

[証明] K から無限個の点からなる部分集合 S を任意に取りだしたら, どれかの K_n に S の点が無限個入るか, あるいは, 無限に多くの K_n に S の点が分散しているか, どちらか一方は必ず成立する. 前者なら (K_n は仮定からコンパクトなので) S は K_n に属する集積点をもち, 後者なら, x が S の集積点の一つとなる. したがって, S は K に属する集積点をもつ.

(2) $x \in \Phi(K)$ である.

[証明] r を δ_0 未満の正の数として, $\delta_{n+1} \le r < \delta_n$ をみたす n を考える. すると,

$$\begin{aligned}
\mu(K \cap [x-r, x+r]) &\ge \mu(K_n \cap [x-r, x+r]) \\
&= \mu(B \cap [x-r, x+r]) - \mu(B \cap [x-r, x+r] \setminus K_n) \\
&\ge \mu(\cap[x-r, x+r]) - \mu(B \cap [x-\delta_n, x+\delta_n] \setminus K_n) \\
&> \mu(\cap[x-r, x+r]) - 2^{-n} \cdot \delta_n \\
&\ge (1-2^{-n}) \cdot (2r) - 2^{-n} \cdot r \\
&= (1-2^{-n}-2^{-(n+1)}) \cdot (2r) \\
&> (1-2^{-(n-1)}) \cdot (2r)
\end{aligned}$$

したがって, $r \to +0$ のとき $\mu(K \cap [x-r, x+r])/2r \to 1$ である. よって $\phi_K(x) = 1$, $x \in \Phi(K)$ となる. □

3.3 密度位相

$A \subset \Phi(A)$ をみたす可測集合 A を開集合の全体として $\mathbb{R}$ 上のひとつの位相が定まる. これを 密度位相 という. 密度位相にかんする表現には接頭語として “μ-” をつけることにしよう.

Remark. μ-開集合であることの定義に μ-可測性の条件を付け加えてしまったけれども, 外測度/内測度を不可測集合に対しても定義できたように, 不可測集合にかんする密度関数の拡張 (外密度/内密度?) も定義できてしかるべきだ. そして, それを用いて μ-開とか μ-閉などを, 可測性を前提とせずに定義するべきだろう. 可測性がその定義からの結果として出てくるのでないと, 密度位相を考える有り難みは薄い.

補題 3.6. 密度位相は通常の位相 (ユークリッド位相) より細かい. つまりユークリッド位相の開集合はすべて μ-開集合である.

[証明] ユークリッド位相は開区間の全体によって生成される位相である. そして, 開区間 (a, b) は $\Phi(\,(a, b)\,) = (a, b)$ をみたすから, μ-開集合である. □

補題 3.7. 可測集合 A について, 密度位相にかんする内部と閉包は,

$$\mathrm{Int}_\mu(A) = A \cap \Phi(A), \quad \mathrm{Cl}_\mu(A) = A \cup (\mathbb{R} \setminus \Phi(\mathbb{R} \setminus A))$$

で得られる．ここで, Int_μ が μ-内部, Cl_μ が μ-閉包である．

[証明]　可測集合 A については $\Phi(A) =^* A$ だから $A \cap \Phi(A) =^* A$ であり, $\Phi(A \cap \Phi(A)) = \Phi(A)$. したがって $A \cap \Phi(A) \subset \Phi(A) = \Phi(A \cap \Phi(A))$ となる．したがって $A \cap \Phi(A)$ は μ-開集合である．また, B を A に含まれる任意の μ-開集合とすれば, $B \subset \Phi(B) \subset \Phi(A)$ であるから $B \subset A \cap \Phi(A)$ となる．　□

補題 3.8. 可測集合 A が密度位相にかんして正則開集合であるためには $\Phi(A) = A$ となることが必要かつ十分である．

[証明]　便宜上 $\Phi'(A) = \mathbb{R} \setminus \Phi(\mathbb{R} \setminus A)$ とおくと, Φ について述べたのと双対的に, 次のことが成立する．

(1′) $\Phi'(A)$ はボレル集合である．

(2′) $\Phi'(A) =^* A$.

(3′) $A =^* B \iff \Phi'(A) = \Phi'(B)$.

(4′) $A' \subseteq B'$ なら $\Phi'(A) \subseteq \Phi'(B)$.

(5′) $\Phi'(\emptyset) = \emptyset$, $\Phi'(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(6′) $\Phi'(\Phi'(A)) = \Phi'(A)$.

(7′) $\Phi'(A \cup B) = \Phi'(A) \cup \Phi'(B)$.

(8′) $A \cup B = \mathbb{R}$ なら　$\Phi'(A) \cup \Phi'(B) = \mathbb{R}$.

このほかに Φ と Φ' の関係についていうと, $\Phi(A)$ は A の密度が 1 の点の全体, $\Phi'(A)$ は A の密度がゼロでない点の全体だから, $\Phi(A) \subset \Phi'(A)$ である．また, $\Phi(A) =^* A =^* \Phi'(A)$ であることから, $\Phi(\Phi'(A)) = \Phi(A)$, $\Phi'(\Phi(A)) = \Phi(A)$ が成立する．

いま, C を μ-閉集合 とすると, $\Phi(C) \subset C$ だから $\mathrm{Int}_\mu(C) = \Phi(C)$ であって,

$$\Phi(\mathrm{Int}_\mu(C)) = \Phi(C \cap \Phi(C)) = \Phi(C) = \mathrm{Int}_\mu(C)$$

とくに, $C = \mathrm{Cl}_\mu(A)$ の場合を考えると,

$$\Phi(\mathrm{Int}_\mu(\mathrm{Cl}_\mu(A))) = \mathrm{Int}_\mu(\mathrm{Cl}_\mu(A))$$

である．ここで, A が μ-正則開集合であるときは $\mathrm{Int}_\mu(\mathrm{Cl}_\mu(A)) = A$ だから $\Phi(A) = A$ となる．

逆に A が $\Phi(A)=A$ を満たしていたら, $\Phi'(A)\supset\Phi(A)=A$ より $\mathrm{Cl}_\mu(A)=\Phi'(A)$ であり,

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}_\mu(\mathrm{Cl}_\mu(A)) &= \mathrm{Int}_\mu(\Phi'(A))\\ &=\Phi'(A)\cap\Phi(\Phi'(A))\\ &=\Phi'(A)\cap\Phi(A)\\ &=\Phi(A)\\ &=A\end{aligned}$$

よって, A は μ-正則開集合である. □

補題 3.9. $\Phi(B)=B$ をみたす集合 B の全体 (μ-正則開集合の全体) が, 密度位相の開基をなす.

[証明] A が μ-開集合で, $x\in A$ のとき, 補題 3.5 により, あるユークリッド・コンパクト集合 K について, $K\subset A$ かつ $x\in\Phi(K)$ が成立する. K はユークリッド閉集合なので, $\Phi(K)\subset K$, したがって, $x\in\Phi(K)\subset A$ が成立する. そこで, $B=\Phi(K)$ とすれば, $\Phi(B)=B$ かつ $x\in B\subset A\cap\Phi(A)$ である. □

Remark. 上記の K はユークリッド・閉集合だから, μ-閉集合である. そこで, この補題の証明での開集合 B は

$$x\in B\subset\mathrm{Cl}_\mu(B)\subset A$$

を満たすようにとれたわけである. これは密度位相が正則 (T_3) であることを意味している.

補題 3.10. 零集合であることと, μ-nowhere dense であること, μ-nowhere dense かつ μ-閉であること, μ-meager であることは一致する. とくに, 密度位相はベール的である.

[証明] 零集合 X は可測集合で, その密度関数 ϕ_X は定数ゼロ, 補集合 $\mathbb{R}\setminus X$ の密度関数 $\phi_{\mathbb{R}\setminus X}$ は定数 1 である. したがって $\Phi(\mathbb{R}\setminus X)=\mathbb{R}$ であり, $\mathbb{R}\setminus X$ は μ-開集合, したがって X は μ-閉集合である. $\Phi(B)$ の形の空でない集合は零集合ではないから, X はこの形の空でない集合を含まない. いいかえれば, X は μ-内点をもたない. よって, 零集合は μ-nowhere dense かつ μ-閉である.

逆に, μ-nowhere dense な集合が零集合になることをいう. X が μ-nowhere dense な集合だったとしよう. D を $X\subset D$ かつ $\mu^*(X)=\mu(D)$ をみたすユークリッド・G_δ 集合とする. もしも $\mu(D)>0$ なら $\Phi(D)\neq\emptyset$ で, これは空でない μ-開集合だから, (X が μ-nowhere dense という仮定により) ある可測集合 A に対して, $\emptyset\neq\Phi(A)\subset\Phi(D)$ かつ $\Phi(A)\cap X=\emptyset$ となる. この

とき $\Phi(A) \cap D$ は $D \setminus X$ に含まれる正の測度をもつ可測集合となるが, これは D の取り方と矛盾する. したがって, $\mu(D) = 0$ である. つまり X は零集合である.

μ-meager な集合は可算個の μ-nowhere dense な集合の和集合になるから, これも零集合である. $\square$

Remark. $\mathbb{R}$ の可算部分集合はすべて零集合であるから, たとえば有理数の全体 $\mathbb{Q}$ のようにユークリッド位相では稠密なものでも, μ-nowhere dense かつ μ-閉である. したがってどんな可算集合は μ-集積点をもたず, 収束点列は自明なもの (定数列) 以外に存在しない. 密度位相でみた数直線はユークリッド位相で見た場合とまるで違って見えることだろう.

補題 3.11. 密度位相に関してベールの性質をもつこととルベーグ可測集合であることとは同値である.

[**証明**] ベールの性質をもつということは, meager 集合全体のなすイデアルを法として正則開集合と同値になるということである. 密度位相に関していうと, μ-正則開集合とは演算子 Φ の不動点になるような集合のことだから, ボレル集合である. そして, μ-meager な集合とは零集合のことである. したがって, μ-ベールの性質をもつ集合は零集合全体のなすイデアルを法としてボレル集合と同値であるから, ルベーグ可測である.

逆に, A をルベーグ可測集合とすると, A と $\Phi(A)$ は零集合全体のなすイデアル (すなわち μ-meager 集合のイデアル) を法として同値である. そして $\Phi(A)$ は μ-正則開集合である. したがって, A は μ-ベールの性質をもつ. $\square$

このように, 密度位相を考えることで, ルベーグ可測性に関する議論をベールの性質に関する議論へと読み替えることができる. 一言でいうと, μ-正則開集合代数は測度ブール代数そのものである.

密度位相は距離づけ可能ではないが, 上に述べたようにベール的である. 実はもっと強く,

定理 3. 密度位相は強ショケ位相である.

[**証明**] $\Phi(B) = B$ をみたす集合 B の全体を $\mathcal{B}$ とし, $\mathcal{B}$ 上のショケのゲームを考える. 先手が B_{2n} を言ったら, 後手は B_{2n} に含まれる正測度の (通常位相の意味で) コンパクトな集合 K_n をとって $B_{2n+1} = \Phi(K_n)$ とすれば,

$$\bigcap_{n\in\omega} B_n \supset \bigcap_{n\in\omega} K_n \neq \emptyset$$

となる. これは後手の必勝法である. したがって密度位相はショケ位相である. さらに, 強い意味のショケのゲームにおいて, 先手が B_{2n} の要素 x_n を指定したときには, 補題 3.?により, 後手は K_n を $x_n \in B_{2n+1} = \Phi(K_n)$ をみたすように選べる. したがって, 後手は強い意味のショケのゲームにおいても必勝法をもつ. $\square$

3.4 密度位相の直積

$\mathbb{R}^2$ における可測集合 E の点 $\langle a,b\rangle$ における密度は

$$\phi_E(a,b)=\lim_{r\to+0}\frac{\mu_2(E\cap([a-r,a+r]\times[b-r,b+r]))}{4r^2}$$

と定義される．この定義からすぐわかるように, 1 次元の可測集合 A と B について, もしも $\phi_A(a)$ と $\phi_B(b)$ が両方とも存在するなら, $\phi_{A\times B}(a,b)$ も存在し, それは $\phi_A(a)\cdot\phi_B(b)$ と一致する．また, $\phi_A(a)$ と $\phi_{A\times B}(a,b)$ が存在し, しかも $\phi_A(a)>0$ である場合には, $\phi_B(b)$ も存在する．

一般に $\phi_{A\times B}(a,b)$ の存在から $\phi_A(a)$ と $\phi_B(b)$ の存在が導かれるかどうかはわからないが, 任意の $r>0$ について

$$\begin{aligned}&\frac{\mu_2(\,(A\times B)\cap([a-r,a+r]\times[b-r,b+r])\,)}{4r^2}\\&=\frac{\mu_1(A\cap[a-r,a+r])}{2r}\cdot\frac{\mu_1(B\cap[b-r,b+r])}{2r}\\&\leq\frac{\mu_1(A\cap[a-r,a+r])}{2r}\end{aligned}$$

であるから, $\phi_{A\times B}(a,b)=1$ であるときには, $\phi_A(a)=1$ となる．

そこで, 直線 $\mathbb{R}$ 上の可測集合 A の密度点の集合を $\Phi_1(A)$, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の可測集合 E の密度点の集合を $\Phi_2(E)$ と書くことにすれば,

$$\Phi_2(A\times B)=\Phi_1(A)\times\Phi_1(B) \tag{3.1}$$

となる．このことから, 直線上の密度位相の直積位相は, 平面上の密度位相に含まれることがわかる．

以下では, 平面 $\mathbb{R}^2$ における 2 次元ルベーグ測度に関する密度位相を μ_2-位相, 直線上の密度位相を μ_1-位相, ふたつの μ_1-位相の $\mathbb{R}^2$ における直積位相を $\mu_{1,1}$-位相と呼んで区別する．式 (3.1) によれば, μ_2-位相は $\mu_{1,1}$-位相を含む．μ_2-位相と $\mu_{1,1}$-位相が一致しないことは次の例からわかる．

命題 3.12. $\mathbb{R}^2$ 上に $\mu_{1,1}$-稠密な零集合が存在する．

[証明] $E=\{\,\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2:x-y\in\mathbb{Q}\,\}$ とおく．E は可算本の直線 $y=x+q$ $(q\in\mathbb{Q})$ の和集合だから零集合である．いま A と B を直線 $\mathbb{R}$ 上の正測度をもつ可測集合だとすると, 差の集合 $A-B$ は区間を含む．このとき $A\times B\cap E\neq\emptyset$ である．したがって, とくに $A=\Phi(A)$, $B=\Phi(B)$ となる場合を考えれば, E が $\mu_{1,1}$-稠密なことがわかる． □

平面の零集合は μ_2-nowhere dense であるから, μ_2-稠密ではない．したがって, μ_2-位相と $\mu_{1,1}$-位相は異なる．この命題の証明で引用された差の集合についての結果の詳細は次のとおりである．

補題 3.13. (シュタインハウスの補題) A と B が $\mathbb{R}$ において正測度をもつルベーグ可測集合であるとき, $A-B$ は区間を含む. 一般に, A と B が $\mathbb{R}^n$ において正測度を持つルベーグ可測集合であるとき, $A-B$ はある n-立方体を含む.

[証明] a と b をそれぞれ A と B の密度点としよう. ルベーグの密度定理の n-次元版により, 正数 δ が定まって, 原点を内部に含み一辺の長さが δ 以下のすべての n-立方体 I について,

$$\mu_n((A-a)\cap I) > \frac{1}{2}\mu_n(I) \quad \text{かつ} \quad \mu_n((B-b)\cap I) > \frac{1}{2}\mu_n(I)$$

が成立する. いま原点を中心として一辺の長さが δ の開 n-立方体 J を考えよう. $\pm\frac{1}{2}\delta$ 未満の範囲で J を少し平行移動しても, 依然として原点は含まれるはずなので,

$$\mu_n((A-a)\cap J) > \frac{1}{2}\mu_n(J),$$
$$|x| < \frac{\delta}{2} \to \mu_n((B-b)\cap J - x) > \frac{1}{2}\mu_n(J)$$

となる (ここで $|x|$ は通常のベクトルの長さではなく, 成分の絶対値の最大値で考えている). このとき, $\mu_n((A-a)\cap(B-b+x)) > 0$ となり, ここから点 y をとると

$$a' = y + a \in A, \quad b' = y + b - x \in B, \quad a' - b' = a - b + x$$

したがって, $A-B$ は $a-b$ を中心として一辺の長さが δ の開 n-立方体を含む. □

命題 3.12 で与えた $\mu_{1,1}$-稠密な零集合は, $\mu_{1,1}$-meager ではある. このことは一般に正しいだろうか? つまり, 零集合はすべて $\mu_{1,1}$-meager であろうか? 答えは否だ.

命題 3.14. $\mathbb{R}^2$ 上に $\mu_{1,1}$-comeager な零集合が存在する. したがってまた, 補集合が零集合となるような (それ自身は零集合でないような) $\mu_{1,1}$-meager 集合が存在する.

[証明] 数直線上には, 稠密でルベーグ測度零の (ユークリッド位相の意味の)G_δ 集合がある. いま D をそのような集合とし, $E = \{\langle x, y\rangle : x - y \in D\}$ とおく. 前の命題と同様に E は $\mu_{1,1}$-稠密であり, また平面のユークリッド位相の意味で G_δ であるから, $\mu_{1,1}$-位相の意味でも G_δ である. どんな位相空間でも, 一般に, 稠密な G_δ 集合は comeager である. 命題の後半は, $\mathbb{R}^2 \setminus E$ を考えればわかる. □

このように, 密度位相におけるベールの性質とルベーグ可測性との直接的な関係は, 密度位相の直積にかんしては失われている. また, $\mu_{1,1}$-位相の正則

開集合代数は測度ブール代数ではない．これは, 二つの random forcing の直積が random forcing と同型にならないという事実に対応しているものと考えられる．

4 ギャンディ位相

概要． いよいよこのレクチャーの主要部分です．古典記述集合論の枠内で述べられる結果に lightface の集合族の理論が応用される様子を味わって下さい．Recursion Theoretic な結果でいくつか《積み残した》ものについては, 次の節で証明を与えます．

ギャンディ位相 $\mathbb{G}_1$ とは, Σ^1_1 を開基として生成される ω^ω 上の位相のことである．容易にわかるように, この位相は T_2 分離公理をみたし, 第 2 可算である．しかし正則ではない (T_3 分離公理をみたさない.) 正則でないことを直接たしかめるのは容易でないが, 互いに交わらないのにボレル集合で分離できない Π^1_1 集合のペアがあることから, ギャンディ位相が正規でないことはわかる．第 2 可算で正則なら正規のはずだから[6], ギャンディ位相は正則でない．この他にも, ギャンディ位相を応用するさいに注意すべき点がいくつかある．

(1) ω^ω の要素 α が ω から ω への Δ^1_1 定義可能な関数であれば, $\{\alpha\}$ は Σ^1_1 集合である (またその逆も正しい)．したがって, ギャンディ位相は無限個の孤立点をもつ．空間に孤立点があることから, この位相を使った強制法 (Gandy forcing) の扱いには注意が必要だ．というのも, 空でない開集合のなす半順序が極小要素を持つからである．

(2) $\omega^\omega \times \omega^\omega$ 上のギャンディ位相 $\mathbb{G}_2$ は, $\omega^\omega \times \omega^\omega$ の Σ^1_1 部分集合の全体で生成された位相であり, ω^ω のギャンディ位相 $\mathbb{G}_1$ の直積位相 $\mathbb{G}_{1,1}$ とは一致しない．$\omega^\omega \times \omega^\omega$ の対角線は Σ^1_1 集合だから $\mathbb{G}_2$ の開集合だが, 直積位相 $\mathbb{G}_{1,1}$ の開集合ではない．このことを forcing の観点から見ると, 次のように言える．後述するように, $\omega^\omega \times \omega^\omega$ 上の Gandy-generic な実数 (のペア) $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ があれば α_0 と α_1 はいずれも ω^ω 上の Gandy-generic な実数である．しかし, α_0 と α_1 の関係は generic とは限らない．たとえば $\alpha_0 = \alpha_1$ となることもありうる．

以下に列挙する 4 つの補題の証明は次のサブセクション 4.1 でおこなう．

補題 4.1. ギャンディ位相は強 Choquet 位相である． □

補題 4.2. A に $A \times \omega^\omega$ を対応させる写像は, $\mathbb{G}_1$ の $\mathbb{G}_2$ への完全埋め込み (complete embedding) である．A に $\omega^\omega \times A$ を対応させる写像についても同様である． □

補題 4.3. $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle$ が M 上 $\mathbb{G}_2$-generic であれば, α_0 および α_1 は M 上 $\mathbb{G}_1$-generic である． □

[6] 正則で Lindelöf ならパラコンパクト, したがって正規．たとえば [12] などを参照．

補題 4.4. O を $\mathbb{G}_1$-開集合, D を O において $\mathbb{G}_1$-comeager な ω^ω の部分集合とするとき, $D \times D$ は $O \times O$ において $\mathbb{G}_2$-comeager である. $\square$

4.1 ギャンディ位相は強ショケ位相である

補題 4.1〜4.4 の証明を与えよう.

[補題 4.1 の証明]

まず, $\omega^\omega \times \omega^\omega$ の部分集合 B が与えられたとき, その <u>射影</u> $\pi(B)$ を

$$\pi(B) = \{ \alpha \in \omega^\omega : (\exists \beta)[\langle \alpha, \beta \rangle \in B] \}$$

と定義する. すると, ω^ω の Σ^1_1 部分集合は $\omega^\omega \times \omega^\omega$ の Π^0_1 集合の射影として得られることになる.

ギャンディ位相 $\mathbb{G}_1$ とは Σ^1_1 部分集合の全体を開基としてとる位相だから, この位相に対応する強い意味のショケのゲームとしては $\mathcal{G}^+(\omega^\omega, \Sigma^1_1)$ を考えればよい. つまり,

$$\begin{array}{llllllll}
(\text{先手}) & \alpha_0, A_0 & & \alpha_1, A_2 & & \cdots & \alpha_n, A_{2n} & & \cdots \\
(\text{後手}) & & A_1 & & A_3 & \cdots & & A_{2n+1} & \cdots
\end{array}$$

で, ルールとしては, (i) 各 A_n は ω^ω の空でない Σ^1_1 集合であること. (ii) 先手は $\alpha_n \in A_{2n}$ かつ $A_{2n} \subset A_{2n-1}$ となるように A_{2n} と α_n を選ぶこと. (iii) 後手は $\alpha_n \in A_{2n+1}$ かつ $A_{2n+1} \subset A_{2n}$ となるように A_{2n+1} を選ぶこと. 以上の三つを課す. これらのルールがすべてのターンで守られたとした上で, $\bigcup_{n<\omega} A_n = \emptyset$ なら先手の勝ち, $\bigcup_{n<\omega} A_n \neq \emptyset$ なら後手の勝ちと判定する.

このゲーム $\mathcal{G}^+(\omega^\omega, \Sigma^1_1)$ の後手の必勝法を与えよう.

まず, 先手が A_0 と α_0 を選んだら, $A_0 = p(B_0)$ となるような Π^0_1 集合 $B_0 \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ を考え, β^0_0 を $\langle \alpha_0, \beta^0_0 \rangle \in B_0$ となるようにとる. そして,

$$A_1 = \pi(B_0 \cap (N(\alpha_0 \restriction 1) \times N(\beta^0_0 \restriction 1)))$$

という A_1 を返す.

先手が $\alpha_1 \in A_2 \subset A_1$ となる A_2 と α_1 を選んだら, $A_2 = \pi(B_1)$ をみたすような Π^0_1 集合 $B_1 \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ を考え, β^1_1 を $\langle \alpha_1, \beta^1_1 \rangle \in B_1$ となるようにとる. また, $A_2 \subset A_1$ なので, β^0_1 を, $\langle \alpha_1, \beta^0_1 \rangle \in B_0 \cap (N(\alpha_0 \restriction 1) \times N(\beta^0_0 \restriction 1))$ となるようにとれる. そして,

$$\begin{aligned}
A_3 = \pi(& B_0 \cap (N(\alpha_1 \restriction 2) \times N(\beta^0_1 \restriction 2))) \\
& \cap \pi(B_0 \cap (N(\alpha_1 \restriction 2) \times N(\beta^1_1 \restriction 2)))
\end{aligned}$$

という A_3 を返す.

先手が A_{2n} と α_n を選んだとき, B_n を $\pi(B_n)=A_{2n}$ となるようにとり,

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha_n, \beta_n^0 \rangle &\in B_0 \cap (\ N(\alpha_{n-1}\restriction n) \times N(\beta_{n-1}^0 \restriction n)\ ) \\
\langle \alpha_n, \beta_n^1 \rangle &\in B_1 \cap (\ N(\alpha_{n-1}\restriction n) \times N(\beta_{n-1}^1 \restriction n)\ ) \\
&\vdots \\
\langle \alpha_n, \beta_n^{n-1} \rangle &\in B_1 \cap (\ N(\alpha_{n-1}\restriction n) \times N(\beta_{n-1}^{n-1} \restriction n)\ ) \\
\langle \alpha_n, \beta_n^n \rangle &\in B_n
\end{aligned}
$$

となるように, β_n^0, β_n^1,...,β_n^n をとる. そして, A_{2n+1} を,

$$
\begin{gathered}
\pi(\ B_0 \cap (N(\alpha_n \restriction n+1) \times N(\beta_n^0 \restriction n+1))\ ) \\
\pi(\ B_1 \cap (N(\alpha_n \restriction n+1) \times N(\beta_n^1 \restriction n+1))\ ) \\
\vdots \\
\pi(\ B_{n-1} \cap (N(\alpha_n \restriction n+1) \times N(\beta_n^{n-1} \restriction n+1))\ ) \\
\pi(\ B_n \cap (N(\alpha_n \restriction n+1) \times N(\beta_n^n \restriction n+1))\ )
\end{gathered}
$$

の共通部分とする.

このとき,

$$
\begin{gathered}
\alpha_0 \restriction 1 \subset \alpha_1 \restriction 2 \subset \alpha_2 \restriction 3 \subset \cdots \\
\beta_0^0 \restriction 1 \subset \beta_1^0 \restriction 2 \subset \beta_2^0 \restriction 3 \subset \cdots \\
\beta_1^1 \restriction 2 \subset \beta_2^1 \restriction 3 \subset \beta_3^1 \restriction 4 \subset \cdots \\
\vdots
\end{gathered}
$$

となるので, $\{\alpha_i\}_{i\in\omega}$ と $\{\beta_i^n\}_{n\le i\in\omega}$ はすべてコーシー列である. それらの極限値 $\alpha_\infty = \lim_{i\to\infty}\alpha_i$, $\beta_\infty^n = \lim_{i\to\infty}\beta_i^n$ を考えよう. $i \ge n$ のとき $\langle \alpha_i, \beta_i^n \rangle \in B_n$ であり, B_n は Π_1^0 集合, したがって閉集合であるから, $\langle \alpha_\infty, \beta_\infty^n \rangle \in B_n$ ということになる. したがって, $\alpha_\infty \in \pi(B_n) = A_{2n}$ となり. $\bigcap_{n<\omega} A_n \ne \emptyset$ であることがわかる. したがって, ここで述べた後手の戦略は必勝法である. こうして補題 4.1 は証明された. □

[補題 4.2 および 4.3 の証明]

完備埋め込みの条件を復習しておこう. 半順序 P から Q への写像 c が, (i) $p \le_P p' \to c(p) \le_Q c(p')$, (ii) $p \perp_P p' \leftrightarrow c(p) \perp_Q c(p')$, (iii) すべての $q \in Q$ に対してうまく $\bar{q} \in P$ をとって, $p \le_P \bar{q}$ のとき必ず $c(p)$ と q が Q において両立可能となる. という三つの条件をみたすときに, $c : P \to Q$ は完備埋め込み写像 (complete embedding) というのだった.

補題 4.2 でいう写像 $A \mapsto A \times \omega^\omega$ がこのうち (i) と (ii) をみたすことはほとんど明らかであろう．また, $\omega^\omega \times \omega^\omega$ の空でない Σ^1_1 部分集合 B が与えられたとき, $A = \pi(B)$ とすれば, これはもちろん Σ^1_1 で, $A' \subset A$ かつ $A' \neq \emptyset$ となる任意の A' について $(A' \times \omega^\omega) \cap B \neq \emptyset$ となる．したがってこの対応は (iii) をみたし, 完備埋め込み写像である．これが補題 4.2 の主張であった．

補題 4.3 は, 補題 4.2 と, 完備埋め込み写像に関するよく知られた結果 (たとえば [6, Theorem7.5 (p.220)]) からすぐにわかることである． □

Remark. ここで, $\mathbb{G}_1 \times \mathbb{G}_1$ から $\mathbb{G}_2$ への, $\langle A_0, A_1 \rangle \mapsto A_0 \times A_1$ という対応を考える．もしもこれが完備埋め込み写像になっていたら, 後の議論がずいぶん簡単になるのだが, 残念ながらこの対応は完備埋め込み写像ではない．それは,

$$B = \{ \langle \alpha, \alpha \rangle \in \omega^\omega \times \omega^\omega : \alpha \notin \Delta^1_1 \}$$

と定義すればわかる．B は対角線上の Δ^1_1 定義可能でない要素の全体だ．B は Σ^1_1 である．($\because$ Δ^1_1 定義可能な実数全体の集合は可算な Π^1_1 集合である — 5.26) もしも $A_0 \times A_1$ が B と交わるなら, A_0 も A_1 も不可算集合である．($\because$ Δ^1_1 定義可能でない要素を含む Σ^1_1 集合は完全集合を含む — 定理 10) そこで, $\alpha_0 \in A_0$, $\alpha_1 \in A_1$, $\alpha_0 \neq \alpha_1$ という二つの要素をとれる．そこで, この 2 点を分離する (普通の位相での) 基本開集合, たとえば $\alpha_0(n-1) \neq \alpha_1(n-1)$ となる n に対する $N(\alpha_0 \restriction n)$ と $N(\alpha_1 \restriction n)$ を考えて, $A'_0 = A_0 \cap N(\alpha_0 \restriction n)$, $A'_1 = A_1 \cap N(\alpha_1 \restriction n)$ とおくと, $A'_0 \cap A'_1 = \emptyset$ であるから $(A'_0 \times A'_1) \cap B = \emptyset$ である．

[補題 4.4 の証明]

D_n は O において $\mathbb{G}_1$-稠密な $\mathbb{G}_1$-開集合で $D \supset \bigcap_{n<\omega} D_n$ をみたすものとする．このとき, $O \times D_n$ および $D_n \times O$ は $O \times O$ において $\mathbb{G}_2$-稠密な $\mathbb{G}_2$-開集合である．そして

$$D \times D \supset \bigcap_{n<\omega} (O \times D_n) \cap \bigcap_{n<\omega} (D_n \times O)$$

となる． □

4.2 シルヴァーの定理

ギャンディ位相の応用例として, $\mathbf{\Pi}^1_1$ 同値関係にかんするシルヴァーの定理を証明する．

定理 4. (Silver) $E \subset \omega^\omega \times \omega^\omega$ は $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合で, ω^ω 上の同値関係になっているものとする．このとき, (a) ω^ω は可算個の E-同値類に分割されるか, あるいは (b) ある完全集合 $C \subset \omega^\omega$ について, $\alpha, \beta \in C \wedge x \neq y \to \langle \alpha, \beta \rangle \notin E$ となる．つまり, どの 2 要素も E-同値でないような完全集合がある． □

この定理は見かけ上まったく古典記述集合論の範囲内の命題である．しかしながら, 古典記述集合論の方法での証明は見つかっていなくて, シルヴァー

自身による煩雑な強制法による証明と, ハリントンによるギャンティ位相を用いた証明しか, いまのところ知られていない. そしてハリントンの証明がエレガントであるので, もはやシルヴァーの原論文の証明を省みる人はいない. 以下, このハリントンの証明を, イェックのテキスト [4, Section 32] の内容をもとに紹介する. 途中で effective な記述集合論における recursion-theoretic な結果を何度か引用する必要がある. それについては, 後の節で証明を与える.

以下, E がパラメータなしで Π^1_1 集合であったと仮定して議論する. 一般の場合はこの特別な場合の証明から, 相対化によって得られる.

どの $\mathbb{G}_1$-近傍も単一の E-同値類に含まれることがないような ω^ω の要素の全体を H とする:

$$\alpha \in H \iff (\forall A \in \Sigma^1_1)[\, \alpha \in A \to (\exists \beta \in A)[\, \langle \alpha, \beta \rangle \notin E\,]\,] \tag{1}$$

補題 4.5. H は Σ^1_1 集合である.

[**証明**] この補題が証明全体のなかでいちばん “難しい” ところだ. まず, ある E-同値類 E_γ が空でない Σ^1_1 集合 A を含むなら,

$$\alpha \in E_\gamma \iff (\forall \beta)[\, \beta \in A \to \langle \alpha, \beta \rangle \in E\,]$$

なので, E_γ は γ をパラメータとして必要としない Π^1_1 定義をもつ. したがってこのとき, lightface 版分離定理 (命題 5.25) により, ある Δ^1_1 集合 B について $A \subset B \subset E_\gamma$ が成立する. そこで, H の定義 (1) の $\forall A \in \Sigma^1_1$ は, $\forall B \in \Delta^1_1$ と書き換えてよい:

$$\alpha \in H \iff (\forall B \in \Delta^1_1)[\, \alpha \in B \to (\exists \beta \in B)[\, \langle \alpha, \beta \rangle \notin E\,]\,] \tag{2}$$

問題はこの右辺の $\forall B \in \Delta^1_1$ という量化だが, これは次のように考える.

実は ω^ω の Δ^1_1 集合すべてを数え上げる Π^1_1 式がある. 詳しくいうと, ω の部分集合 W と $\omega \times \omega^\omega$ の部分集合 B^+ と B^- で,

(i) W, B^+, B^- はいずれも Π^1_1 集合である.

(ii) $e \in W$ のとき, $(\forall \alpha)[\, \langle e, \alpha \rangle \in B^+ \leftrightarrow \langle e, \alpha \rangle \notin B^-\,]$ である. このとき切り口 B^+_e と B^-_e はいずれも Δ^1_1 集合である.

(iii) ω^ω の Δ^1_1 式はすべてある $e \in W$ に対する B^+_e (同じことだが $\omega^\omega \setminus B^-_e$) として得られる.

という 3 つの条件をみたすようなものが存在する (補題 5.27). そこで, 式 (2) は

$$\alpha \in H \iff (\forall e)[\, (e \in W \wedge \alpha \in B^+_e) \to (\exists \beta)[\, \beta \notin B^-_e \wedge \langle \alpha, \beta \rangle \notin E\,]\,] \tag{3}$$

と書ける．この右辺の式は Σ^1_1 になる． □

もしも $H=\emptyset$ であるなら, ω^ω のどの要素も, 単一の同値類に含まれるようなある $\mathbb{G}_1$-近傍に含まれることになる．つまり, どの $\alpha\in\omega^\omega$ の同値類 E_α も, 空でない Σ^1_1 集合を含む．このとき上に述べたように E_α は Π^1_1 集合となるが, そのようなものは高々可算個しかありえない．これはシルヴァーの定理の (a) の場合に相当する．

そこで, ここからは $H\neq\emptyset$ と仮定して, シルヴァーの定理の (b) を導くことにする．

補題 4.6. どの同値類 E_α に対しても $E_\alpha\cap H$ は $\mathbb{G}_1$-meager である．

[証明] E_α は $\mathbf{\Pi}^1_1$ であるから, 通常の位相より細かい任意の位相にかんしてベールの性質をもつ．したがって $\mathbb{G}_1$ にかんしてベールの性質を持つ．$E_\alpha\cap H$ も $\mathbb{G}_1$ にかんしてベールの性質を持つから, もしもそれが $\mathbb{G}_1$-meager でなかったら, ある空でない Σ^1_1 集合 A において $\mathbb{G}_1$-comeager であるはずだ．このとき補題 4.4 により $(E_\alpha\cap H)\times(E_\alpha\cap H)$ は $A\times A$ において $\mathbb{G}_2$-comeager となる．

もしも $A\times A\not\subset E$ であれば $(A\times A\setminus E)\cap((E_\alpha\cap H)\times(E_\alpha\cap H))$ は空でないということになるが, ここから要素 $\langle\beta,\gamma\rangle$ がとれたら $\langle\beta,\gamma\rangle\notin E$, $\langle\beta,\alpha\rangle\in E$, $\langle\alpha,\gamma\rangle\in E$ となるから E が同値関係であるという前提と矛盾する．いっぽう, $A\times A\subset E$ であれば, A は単一の E 同値類に含まれる空でない Σ^1_1 集合ということになり, H の定義から $A\cap H=\emptyset$ であるが, $(E_\alpha\cap H)\times(E_\alpha\cap H)$ が $A\times A$ において $\mathbb{G}_2$-comeager で, $A\times A$ 自身は meager ではないので, これもありえない．

$E_\alpha\cap H$ が $\mathbb{G}_1$-meager でないと仮定すると矛盾が生じるので, 補題は証明された． □

補題 4.7. E は $H\times H$ において $\mathbb{G}_{1,1}$-meager である．

[証明] これは前の補題とクラトフスキ&ウラムの定理[7]による． □

補題 4.8. H には $\mathbb{G}_1$-孤立点がない．

[証明] α が H の $\mathbb{G}_1$-孤立点だったとしたら, ある Σ^1_1 集合 A について $A\cap H=\{\alpha\}$ となる．ところが H 自身も Σ^1_1 なのだから, この α は ω^ω 全体の $\mathbb{G}_1$-孤立点で, $\{\alpha\}$ が α の $\mathbb{G}_1$-近傍になっている．これはもちろん単一の E-同値類に含まれるから, $\alpha\notin H$ となり矛盾する． □

定理の証明を完成させるために, あとは, 命題 2.8 を適用し, 多少の追加の考察をすればよい．命題 2.8 の空間 X として $\mathbb{G}_1$-位相で考えた集合 H をと

[7]たとえば [5, Subsection 8.K] や [9, Chapter 15] を参照．

り, ここでの $E \cap (H \times H)$ を命題 2.8 での meager 集合 E と思えば, 互いに関係 E にない点ばかりからなる集合 C と, $\mathbb{G}_1$-連続な全単射 $\varphi : C \to 2^\omega$ が得られる.

さて, ここでちょっと命題 2.8 の証明を思い出そう. いまの文脈では, 考えている空間は ω^ω に通常の位相をより細かくした新しい位相を入れたものだ, そのため, 命題 2.8 の証明にあらわれた開集合 $U(t)$ を作るときに, 通常の距離の意味で $U(t)$ の直径が $2^{-\mathrm{lh}(t)}$ 以下になるという付帯条件をつけても, べつだん問題はない. いま, すべての $t \in 2^{<\omega}$ に対して $U(t)$ をそのようにとってあったとすると, 2^ω の要素 α と β が $\alpha \restriction n = \beta \restriction n$ を満たすときには, 対応する x_α と x_β は通常の距離の意味で 2^{-n} 以内に近づいているわけであるから, 命題の主張する連続全単射 $\varphi : C \to 2^\omega$ は ω^ω の通常の位相の意味で逆連続でもあり, C は通常の位相の意味で 2^ω と同相になっている. したがって, C は (通常の位相の意味で) 完全集合である. これがシルヴァーの定理の (b) で主張していることであった. □

5 Π^1_1 の理論

概要. ボレル集合のコード化の話を書きかけたのだけど, その前に Π^1_1 集合の理論を十分に展開しておいたほうがよいと気づきました. ここでは ω 上の整礎的な木の分析から Π^1_1 集合の構造の理論を展開します. この節の内容が, ギャンディ位相を応用する際のバックグラウンドとなります.

5.1 木

集合 X の要素の有限な列の全体のことを $X^{<\omega}$ と書く. ここでいう有限は長さゼロも含む. 長さゼロの列を空集合と同一視して $\emptyset$ と書く. 有限列 s の長さを $\mathrm{lh}(s)$ と書く. 有限列 s の後ろに別の有限列 t を連結した列を $s^\frown t$ と書く. この演算は $X^{<\omega}$ 上の結合的な演算で, $\emptyset$ はその単位元になっている. 有限列 s と t のあいだに $\mathrm{lh}(s) \leq \mathrm{lh}(t)$ かつ $s = t \restriction \mathrm{lh}(s)$ という関係があるときに, $s \subset t$ と書き, s は t の <u>始切片</u>(initial segment) である, t は s の <u>拡大</u>であるという.

定義 5.1. 集合 X 上の <u>木</u>(tree) とは, $X^{<\omega}$ の空でない部分集合 T で,

$$s \in T \to (\forall i < \mathrm{lh}(s))[\, s \restriction i \in T \,]$$

となるもの, すなわちどの要素の始切片もまた要素になるような集合のことをいう. □

定義 5.2. 集合 X 上の木 T の <u>無限経路</u>(infinite path) とは,

$$(\forall n \in \omega)[\, f \restriction n \in T \,]$$

をみたすような無限列 $f \in X^\omega$ のことである． $\square$

定義 5.3. 木 T の要素のことを T の 節(node) という．有限列 s の後に一つだけ要素を付け加えて延長した列のことを s の 後続者(successor) という．木 T の節 s の後続者で T に属するものの全体を $\mathrm{succ}_T(s)$ と書く．s が T の節で, s のいかなる後続者も T の節にならないとき, (つまり $s \in T \wedge \mathrm{succ}_T(s) = \emptyset$ のとき) s は T の 終端節(terminal node) だという．T の終端節全体の集合を $\mathrm{tn}(T)$ と書く． $\square$

定義 5.4. 集合 X 上の木 T と有限列 $s \in X^{<\omega}$ に対して,

$$T/s = \{\, t \in X^{<\omega} : s^\frown t \in T \,\}$$

とおく． $\square$

$s \notin T$ ならば $T/s = \emptyset$ で面白くないが, $s \in T$ のときは T/s も X 上の木となる．あきらかに $T = T/\emptyset$ である．

5.2 整礎的な木

定義 5.5. 無限経路をもたない木のことを 整礎的(wellfounded) な木という． $\square$

補題 5.6. T を集合 X 上の整礎的な木, S を T の空でない部分集合とするとき, T の節 s で

$$s \in S \wedge (\forall t \in T)[\, t \supsetneq s \to t \notin S \,]$$

をみたすものが存在する．(このような節 s は, S の中に子孫がいないという意味で, S において極小であるといわれる.)

[証明] 極小な要素を持たない空でない集合 S があったとしたら, $s_0 \in S$ を任意にとって, それを真に拡大する $s_1 \in S$ をとり, それをまた真に拡大する s_2 をとり, そのようにどこまでも繰り返していけて,

$$s_0 \subsetneq s_1 \subsetneq s_2 \subsetneq \cdots \subsetneq s_i \subsetneq \cdots$$

という系列が得られるが, ここで $f = \bigcup_{i<\omega} s_i$ とすると, f が T の無限経路となって T が整礎的という仮定と矛盾する． $\square$

Remark. 補題 5.6 の証明には 従属選択の公理(Axiom of Dependent Choice:DC) が用いられている．X が整列可能な集合であれば DC は必要ないが, 一般にはこれを避けることができない．従属選択の公理とは次の命題である: X が空でない集合で, $R \subset X \times X$ が

$$(\forall x \in X)(\exists y \in X)[\, \langle x, y \rangle \in R \,]$$

をみたすとしたら, 無限列 $f \in X^{\omega}$ を

$$(\forall n < \omega)[\, \langle f(n), f(n+1) \rangle \in R\,]$$

となるようにとれる.

補題 5.6 から次のことがわかる. 整礎的な T の節の任意の性質 P について, 《節 s のすべての後続者が性質 P をもつ》ことを仮定して《節 s が性質 P をもつ》を導くことができるなら, それで《T のすべての節は性質 P をもつ》が証明できることになる. これを示すには, T の節のうち性質 P をもたないものの全体を S として補題 5.6 を適用すればよい.

命題 5.7. (bar-induction の原理) T を整礎的な木, $\mathrm{P}(\,\cdot\,)$ を T の節についての任意の述語とするとき,

$$(\forall s \in T)[\, (\forall t \in \mathrm{succ}_T(s))\, \mathrm{P}(t) \to \mathrm{P}(s)\,]$$

から

$$(\forall s \in T)\, \mathrm{P}(s).$$

が導かれる. □

命題 5.8. (bar-recursion の原理) X と Y を集合, T を集合 X 上の整礎的な木とする. $D = \{\, \langle s, f \rangle : s \in T \wedge f : \mathrm{succ}_T(s) \to Y \,\}$ とし, D から Y への写像 G が与えられたとする. このとき, 写像 $F : T \to Y$ で,

$$(\forall s \in T)[\, F(s) = G(s, F \restriction \mathrm{succ}_T(s))\,]$$

をみたすものが, 一意的に存在する.

[**証明**] $\mathrm{P}(s)$ とは, 次の条件をみたすような関数 h が存在するという主張だとする.

(i) $h : \mathrm{dom}(h) \to Y$,

(ii) $\mathrm{dom}(h) \subset T$,

(iii) $s \in \mathrm{dom}(h)$, そして

(iv) $(\forall t \in \mathrm{dom}(h))[\, h(t) = G(t, h \restriction t)\,]$.

このとき, bar-induction によって, すべての $s \in T$ が $\mathrm{P}(s)$ をみたすことが示される. また, そのような h をどのようにとっても $h(s)$ の値が h の取り方によらず定まることも, bar-induction によって示すことができる. そこで, そのような値 $h(s)$ を $F(s)$ と定めればよい. □

bar-recursion の原理によれば, 整礎的な木 T 上には

(rk) $$|s|_T = \sup\{\, |t|_T + 1 : t \in \mathrm{succ}_T(s)\,\}$$

をみたす順序数値の関数 $|\cdot|_T$ が一意的に存在する．これは命題 5.8 において Y を十分大きな順序数とし，

$$G(s,f)=\sup\{\,f(t)+1:t\in\mathrm{dom}(f)\,\}$$

と定義すればよい．

定義 5.9. 整礎的な木 T 上に一意的に存在する，式 (rk) をみたす順序数値関数 $|\cdot|_T$ のことを，T 上の ランク関数(rank function) とよぶ．$|\emptyset|_T$ のことを T の ランク といい，$\|T\|$ と書く． □

整礎的な木のランクはこのあと Π^1_1 の構造を解明するときの強力なツールになる．

補題 5.10. 整礎的な木 T の任意の節 s について $|s|_T=\|T/s\|$． □

補題 5.11. 木 T が整礎的で，ξ が $\xi\le\|T\|$ をみたす順序数のとき，ある $t\in T$ について $\xi=|t|_T$ となる．

[証明] $\xi=\|T\|$ のときは $t=\emptyset$ とすればよいので，以下 $\xi<\|T\|$ と仮定する．$|s|_T>\xi$ をみたす節 s の全体の集合を S としよう．$\emptyset\in S$ なので S は空でない．T は整礎的なので，S の極小な要素 s がとれる．もしもすべての $t\in\mathrm{succ}_T(s)$ について $|t|_T<\xi$ だったら $|s|_T=\sup\{\,|t|_T+1:t\in\mathrm{succ}_T(s)\,\}\le\xi$ となって $s\in S$ と矛盾する．そこである $t\in\mathrm{succ}_T(s)$ について $|t|\ge\xi$ だが，s の極小性より $t\notin S$ なので $|t|_T\le\xi$ でもあり，$|t|_T=\xi$ が成立する． □

定義 5.12. 木 T から T' への写像 φ が，

$$(\forall s,t\in T)[\,s\subsetneq t\to\varphi(s)\subsetneq\varphi(t)\,]$$

をみたすとき，これを 順序保存写像(order preserving mapping) という．(写像が単射であることは要求しない) □

補題 5.13. (i) T' が無限経路をもてば，任意の木 T から T' への順序保存写像が存在する．(ii) もしも T' が整礎的で，T から T' への順序保存写像があれば，T も整礎的で $\|T\|\le\|T'\|$ である．(iii) もしも T と T' がどちらも整礎的で，$\|T\|\le\|T'\|$ であれば，T から T' への順序保存写像が存在する．

Remark. 便宜上，整礎的でない木のランクは ∞ で，これはいかなる順序数よりも大きいと思うことにすれば，補題 5.13 の主張は，T から T' への順序保存写像が存在するためには $\|T\|\le\|T'\|$ となることが必要かつ十分である，とまとめられる．

[証明] (i) f を T' の無限経路だとして，$s\in T$ に対して $\varphi(s)=f\restriction\mathrm{lh}(s)$ とすれば，φ は順序保存写像である．(ii) T から T' への順序保存写像は T の無

限経路を T' の無限経路にうつすから, T' が整礎的なら T も整礎的である. $\varphi : T \to T'$ が順序保存であれば, bar-induction により

$$(\forall s \in T)[\,|s|_T \leq |\varphi(s)|_{T'}\,]$$

が示されるから, とくに $s = \emptyset$ として $\|T\| \leq \|T'\|$ である. (iii) 今度は節 s の長さに関する普通の帰納法で順序保存写像を定義する. 最初に $\varphi(\emptyset) = \emptyset$ とおく. 仮に, $\varphi(s)$ が定められ, $|\varphi(s)|_{T'} \geq |s|_T$ となっていたとすると,

$$\begin{aligned}\sup\{\,|t|_T + 1 : t \in \mathrm{succ}_T(s)\,\} &= |s|_T \\ \leq |\varphi(s)| &= \sup\{|t'|_{T'} + 1 : t' \in \mathrm{succ}_{T'}(\varphi(s))\,\}\end{aligned}$$

であるから, どの $t \in \mathrm{succ}_T(s)$ に対しても, ある $t' \in \mathrm{succ}_{T'}(\varphi(s))$ が $|t|_T \leq |t'|_{T'}$ をみたすことになる. そのような t' のひとつを $\varphi(t)$ と定める. これを繰り返してゆけばよい. $\square$

5.3 集合 WF

定義 5.14. ω 上の木の全体の集合を $\mathbf{TR}$, ω 上の整礎的な木の全体の集合を $\mathbf{WF}$ と書く. これらは $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合とみなす. $\square$

命題 5.15. $\mathbf{TR}$ は $\mathcal{P}(\omega)$ の Π^0_1 部分集合である. $\mathbf{WF}$ は $\mathcal{P}(\omega)$ の Π^1_1 部分集合である. $\square$

補題 5.16. どんな可算順序数 ξ に対しても, ある $T \in \mathbf{WF}$ が $\xi = \|T\|$ をみたす. $\square$

補題 5.17. (比較補題) (i) $\mathcal{P}(\omega)$ 上に, 次の条件をみたす Π^1_1 二項関係 $\leq_\Pi$ と Σ^1_1 二項関係 $\leq_\Sigma$ がある:

$$T' \in \mathbf{WF} \implies (\forall T)[T \in \mathbf{WF} \wedge \|T\| \leq \|T'\| \leftrightarrow T \leq_\Pi T' \leftrightarrow T \leq_\Sigma T'\,].$$

(ii) $\mathcal{P}(\omega)$ 上の次の二項関係 $\leq^*_{\mathbf{WF}}$ と $<^*_{\mathbf{WF}}$ はいずれも Π^1_1 である:

$$\begin{aligned}T \leq^*_{\mathbf{WF}} T' &\iff T \in \mathbf{WF} \wedge [\,T' \notin \mathbf{WF} \vee \|T\| \leq \|T'\|\,] \\ T <^*_{\mathbf{WF}} T' &\iff T \in \mathbf{WF} \wedge [\,T' \notin \mathbf{WF} \vee \|T\| < \|T'\|\,].\end{aligned}$$

[証明] (i) 補題 5.13 の結果によれば, 《T から T' への順序保存写像がある》を $T \leq_\Sigma T'$ とし, 《いかなる $s \in T$ に対しても, T' から T/s への順序保存写像はない》を $T \leq_\Pi T'$ とすればよい.

(ii) $T \leq^*_{\mathbf{WF}} T'$ は $T \in \mathbf{WF} \wedge T \leq_\Pi T'$ と, $T <^*_{\mathbf{WF}} T'$ は $T \in \mathbf{WF} \wedge \neg(T' \leq_\Sigma T)$ と同値になる． □

定理 5. 任意の Π^1_1 集合 $A \subset \omega^\omega$ に対して, Δ^0_1 定義可能な写像 $f : \omega^\omega \to \mathcal{P}(\omega)$ が存在して, $\mathrm{range}(f) \subset \mathbf{TR}$ かつ $A = f^{-1}[\mathbf{WF}]$ となる．任意の $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合 $A \subset \omega^\omega$ に対して, 連続写像 $f : \omega^\omega \to \mathcal{P}(\omega)$ が存在して, $\mathrm{range}(f) \subset \mathbf{TR}$ かつ $A = f^{-1}[\mathbf{WF}]$ となる．したがって, $\mathbf{WF}$ は $\mathbf{\Pi}^1_1$-完備集合である． □

この定理の証明には少しばかり準備が必要だ. Π^1_1 式は Σ^0_1 式に型 1 の $\forall$ をつけたものである．そこでまず Σ^0_1 集合の表現について考える．

二階算術の有界な式 $\varphi(\vec{n}, \vec{\alpha})$ を考える．有界な式の (標準モデル上での) 真偽は, 自然数の算術演算と ω^ω に属する関数の値の参照を有限の回数おこなうことで判定できるのだった．いま, この φ の関数引数 $\alpha_0,\ldots,\alpha_{\ell-1}$ のところに自然数の有限列 $s_0,\ldots,s_{\ell-1}$ を代入して, 同じ判定手続きを実行に移したと考えよう．手続きの実行過程において, 与えられた有限列の長さを超えた入力にかんする関数値の参照が発生したら, それ以降の計算ができないから真偽の判定は不可能だ．いっぽう, もしもそのような大きな入力にかんする関数値の参照が一度も発生しなければ, 判定手続きはあたかも無限列が与えられたと同じように完了し, そのとき結果として得られる真偽値は, $s_0 \subset \alpha_0, \ldots, s_{\ell-1} \subset \alpha_{\ell-1}$ をみたす任意の関数 $\alpha_0,\ldots,\alpha_{\ell-1}$ を φ の関数引数として与えた場合の真偽値と一致するはずだ．

そこで,《φ の関数引数のところに有限列 $s_0,\ldots,s_{\ell-1}$ を代入して真偽値の検証を実行した結果, これらの有限列の長さを超える入力にかんする関数値の参照は一度も発生せずに検証は滞りなく終了し, しかもその検証結果が真であった》という内容を表現する式を考え, これを $\tilde{\varphi}(\vec{n}, \vec{s})$ と書こう．この $\tilde{\varphi}$ も有界な式であり, φ をみてそれに対応する $\tilde{\varphi}$ に書き換える機械的な手続きを (少々煩雑ではあるだろうが) 与えることができる．個々の引数に対する φ の真偽の判定は, 関数引数の有限近似を十分に先の方まで用意しておけばできるはずだから,

$$\mathbf{A}_2 \models (\forall \vec{n})(\forall \vec{\alpha})[\, \varphi(\vec{n}, \vec{\alpha}) \leftrightarrow (\exists m)\tilde{\varphi}(\vec{n}, \vec{\alpha} \upharpoonright m)\,]$$

が成立する．ただし $\vec{\alpha} \upharpoonright m$ は $\alpha_0 \upharpoonright m, \ldots, \alpha_{\ell-1} \upharpoonright m$ という有限列の並びを略記するものである．また, ここでの有限近似の長さ m は, 長ければ長いほどよいので,

$$\tilde{\varphi}(\vec{n}, \vec{\alpha} \upharpoonright m) \to (\forall m' > m)\tilde{\varphi}(\vec{n}, \vec{\alpha} \upharpoonright m')$$

である．つまり, $\tilde{\varphi}$ に喰わせる有限列の長さが長ければ長いほど, $\tilde{\varphi}$ は成立しやすい．

つぎに, Σ^0_1 式 ψ を考える．ψ が有界な式 φ によって $(\exists i)\varphi(i)$ と書かれていたとしよう．すると, この φ に対応する $\tilde{\varphi}$ を考えて

$$\mathbf{A}_2 \models (\forall \vec{n})(\forall \vec{\alpha})[\, \psi(\vec{n}, \vec{\alpha}) \leftrightarrow (\exists i)(\exists m)\tilde{\varphi}(\vec{n}, i, \vec{\alpha} \upharpoonright m)\,]$$

となるが,

$$\tilde{\psi}(\vec{n},\vec{s}) \iff (\exists i < \mathrm{lh}(s_0))\tilde{\varphi}(\vec{n},i,\vec{s})$$

と $\tilde{\psi}$ を定義すると,

$$\mathbf{A}_2 \models (\forall \vec{n})(\forall \vec{\alpha})[\, \psi(\vec{n},\vec{\alpha}) \leftrightarrow (\exists m)\tilde{\psi}(\vec{n},\vec{\alpha}\restriction m)\,]$$

となる (関数の有限近似の長さ m を $i < m$ が成り立つまで延長すればよい). しかも $\tilde{\psi}$ も有界な式である. 以上をまとめると,

補題 5.18. (k,ℓ)-変数の任意の Σ^0_1 式 ψ に対して, $(k+\ell,0)$-変数の有界な式 $\tilde{\psi}$ が存在して,

$$\mathbf{A}_2 \models (\forall \vec{n})(\forall \vec{\alpha})[\, \psi(\vec{n},\vec{\alpha}) \leftrightarrow (\exists m)\tilde{\psi}(\vec{n},\vec{\alpha}\restriction m)\,]$$

かつ

$$\mathbf{A}_2 \models (\forall \vec{n})(\forall \vec{s})[\, \tilde{\psi}(\vec{n},\vec{s}) \to (\forall \vec{t} \supset \vec{s})\tilde{\psi}(\vec{n},\vec{t})\,]$$

となるようにできる. $\square$

この考察から Π^1_1 集合の標準形を求めることができる. A を ω^ω の Π^1_1 部分集合だったとしよう. すると上の補題から, 有界な式 $\tilde{\psi}(a,b)$ によって

$$\alpha \in A \iff (\forall \beta)(\exists m)\,\tilde{\psi}(\alpha\restriction m, \beta\restriction m)$$

と表現でき, しかも,

$$\tilde{\psi}(\alpha\restriction m, \beta\restriction m) \implies (\forall m' > m)\,\tilde{\psi}(\alpha\restriction m', \beta\restriction m')$$

となっている. そこで, いま

$$T = \{\, \langle s,t\rangle \in \omega^{<\omega} \times \omega^{<\omega} : \mathrm{lh}(s) = \mathrm{lh}(t) \wedge \neg\tilde{\psi}(s,t)\,\}$$

とおくと, T は Δ^0_1 定義可能な $\omega \times \omega$ 上の木で,

$$\alpha \in A \iff (\forall \beta)(\exists m)[\, \langle \alpha\restriction m, \beta\restriction m\rangle \notin T\,]$$

となっている. いま, 個々の α に対して

$$\begin{aligned} T(\alpha) &= \{\, t \in \omega^{<\omega} : \langle \alpha\restriction \mathrm{lh}(t), t\rangle \in T\,\} \\ &= \{\, t \in \omega^{<\omega} : \neg\tilde{\psi}(\alpha\restriction \mathrm{lh}(t), t)\,\} \end{aligned}$$

と定義する. 対応 $\alpha \mapsto T(\alpha)$ は, t と α の関係 $t \in T(\alpha)$ が Δ^0_1 定義可能であるという意味において, ω^ω から $\mathcal{P}(\omega)$ への Δ^0_1 写像になっている. そして,

$$\alpha \in A \iff T(\alpha) \in \mathbf{WF}$$

ということになる．これが定理 5 の前半の主張であった．定理の後半は, 相対化により任意の $\Pi^1_1(\gamma)$ 集合が $\Delta^0_1(\gamma)$ 写像による $\mathbf{WF}$ の逆像となること, そして $\Delta^0_1(\gamma)$ 写像が連続であることに注意すればわかる． □ (定理 5)

同様の考察を ω の Π^1_1 部分集合に対しておこなうと, 次のことがわかる．

命題 5.19. ω の任意の Π^1_1 部分集合 a に対して, Δ^0_1 定義可能な ω 上の木の列 $\langle T_n : n \in \omega \rangle$ を与えて,

$$n \in a \iff T_n \in \mathbf{WF}$$

をすべての n について成立させることができる．また, このように定義できる自然数の集合 a は Π^1_1 集合である． □

5.4 クライゼルの一意化定理

この節の残りの部分では, 記述集合論における Recursion Theoretic な結果の代表例をいくつか述べることになる．次の定理はその中でももっとも有用なものの一つである．

定理 6. (クライゼルの一意化定理) $(k+1,\ell)$-変数の任意の Π^1_1 式 $\varphi(\vec{n},i,\vec{\alpha})$ に対して, 次の条件をみたす $(k+1,\ell)$-変数の Π^1_1 式 $\varphi^*(\vec{n},i,\vec{\alpha})$ が存在する:

(i) $(\exists i)\varphi(\vec{n},i,\vec{\alpha}) \leftrightarrow (\exists i)\varphi^*(\vec{n},i,\vec{\alpha})$,

(ii) $(\forall i)[\,\varphi^*(\vec{n},i,\vec{\alpha}) \to \varphi(\vec{n},i,\vec{\alpha})\,]$, かつ

(iii) $(\forall i,j)[\,\varphi^*(\vec{n},i,\vec{\alpha}) \land \varphi^*(\vec{n},j,\vec{\alpha}) \to i=j\,]$.

それぞれの式は $(\forall\vec{n})(\forall\vec{\alpha})[\ldots]$ によって囲まれているものとする． □

Remark. 条件 (i) は, φ が解 i をもつちょうどそのときに φ^* も解を持つこと, 条件 (ii) は, φ^* が φ の解以外の余分な解をもたないこと, 条件 (iii) は, φ^* の解 i が各々の $(\vec{n},\vec{\alpha})$ に対して一意的に定まることを意味している．いいかえれば, φ^* は φ の解のうちからちょうどひとつを選択している．このような φ^* は φ の一意化(uniformization) と呼ばれる．

[証明] どうやって φ の (一般には複数個ある) 解 i のうちから一つを選べばいいだろうか．すぐに考えつくのは, 自然数の整列性から, 最小の解 i を選べばいいということだ．だが, これは必ずしもうまくいかない, というのも, i より小さい数が φ の解では ない ということろが Π^1_1 で書けるとは限らないからである．

定理 5 の標準形を利用すれば, この難点をうまく回避できる．Δ^0_1 定義可能な関数 $f : \omega^{k+1} \times (\omega^\omega)^\ell \to \mathcal{P}(\omega)$ によって,

$$f(\vec{n},i,\vec{\alpha}) \in \mathbf{WF} \iff \varphi(\vec{n},i,\vec{\alpha})$$

となったとしよう．このとき, φ の解 i には順序数 $\|f(\vec{n},i,\vec{\alpha})\|$ が対応する．そこでこの順序数を最小化する i たちのうちから自然数の順序で最小のものをとることにする．そうすると, 自然数 i がそのようなものであることは, 次の 3 つの式で表現できる．

(1) $f(\vec{n},i,\vec{\alpha}) \in \mathbf{WF}$,

(2) $(\forall j)[\,f(\vec{n},j,\vec{\alpha}) \notin \mathbf{WF} \vee \|f(\vec{n},i,\vec{\alpha})\| \le \|f(\vec{n},j,\vec{\alpha})\|\,]$, かつ

(3) $(\forall j < i)[\,f(\vec{n},j,\vec{\alpha}) \notin \mathbf{WF} \vee \|f(\vec{n},i,\vec{\alpha})\| < \|f(\vec{n},j,\vec{\alpha})\|\,]$.

そこで, φ^* を次のものにすればよい．ここでの $\le^*_{\mathbf{WF}}$ と $<^*_{\mathbf{WF}}$ は補題 5.17 において定義したものである．

$$(\forall j)[\,f(\vec{n},i,\vec{\alpha}) \le^*_{\mathbf{WF}} f(\vec{n},j,\vec{\alpha})\,] \wedge\ (\forall j < i)[\,f(\vec{n},i,\vec{\alpha}) <^*_{\mathbf{WF}} f(\vec{n},j,\vec{\alpha})\,].$$

f が Δ^0_1 であることから, この式は Π^1_1 である． □

5.5 削減と分離, ススリンの定理

クライゼルの一意化定理からすぐに導かれる次の定理 (の boldface 版) は, 古典記述集合論における代表的な結果であった．

定理 7. (削減定理) A と B を ω^ω 上の Π^1_1 集合とするとき, $A^* \subset A$, $B^* \subset B$, $A^* \cup B^* = A \cup B$, かつ $A^* \cap B^* = \emptyset$ となるような Π^1_1 集合 A^* と B^* が存在する．

[証明] $(i = 0 \wedge \alpha \in A) \vee (i = 1 \wedge \alpha \in B)$ を $\varphi(i,\alpha)$ として定理 6 を適用し, $\varphi^*(0,\alpha)$ となる α の全体を A^*, $\varphi^*(1,\alpha)$ となる α の全体を B^* とすればよい． □

Remark. もちろん, ω^ω という空間の選び方に特に意味があるわけではなく, より広く $\omega^k \times (\omega^\omega)^\ell$ の形の空間で同じ結果が成立する．たとえば ω 上でも成立するわけだ．

ここで「削減」と書いたのは “reduction” のことだ．数学で reduction というと「還元」と訳すことが多いようだけど, この定理には, 何かを何かに還元するというニュアンスはなく, 重複した部分を削ってムダを省くことができると主張しているので, 「削減」と訳すことにした．なんか新聞の政治欄みたいだけど, そういうわけなのでご容赦願います．

削減定理から次のことがわかる．A と B を ω^ω 上の互いに交わりのない Σ^1_1 集合とする．$A' = \omega^\omega \setminus A$ と $B' = \omega^\omega \setminus B$ を削減して, $A^* \subset A'$, $B^* \subset B'$, $A^* \cup B^* = A' \cup B'$, かつ $A^* \cap B^* = \emptyset$ とできるわけだが, このとき A^* と B^* は互いに相手の補集合になっている．そこでこれらは Δ^1_1 集合であって,

$$A \subset B^*,\ B^* \cap B = \emptyset,\ \text{かつ}\ B^* \in \Delta^1_1,$$

すなわち, B^* は A を B から分離する Δ^1_1 集合ということになる.

そこで, 互いに交わりのない Σ^1_1 集合のペアは必ず Δ^1_1 集合によって分離される. これだけでも大したものだが, $\mathbf{WF}$ を用いた Π^1_1 の分析の真価が発揮されるのはここからだ.

定義 5.20. 可算順序数 ξ に対し,

$$\mathbf{WF}_\xi = \{\, T : T \in \mathbf{WF} \wedge \|T\| < \xi \,\}$$

と定義する. □

定義 5.21. Δ^0_1 定義可能な ω 上の整礎的な木のランクの最小上界を ω_1^{CK} と書く:

$$\omega_1^{\mathrm{CK}} = \sup\{\, \|T\| : T \in \mathbf{WF} \cap \Delta^0_1 \,\}. \quad \square$$

Remark. この CK というのは Church と Kleene の頭文字だ.

Δ^0_1 定義可能な木は可算個しかないから, 名前は ω_1 でも, この ω_1^{CK} は可算順序数に過ぎない. ω_1^{CK} にはいろいろな特徴づけがある. Δ^0_1 定義可能な ω の整列順序づけの長さの最小上界も ω_1^{CK} だし, これを Δ^1_1 あるいは Σ^1_1 まで拡げても, また多項式時間で判定できる整列順序づけに制限しても, 出てくる順序数は同じだ. また, 集合論的に見れば, ω_1^{CK} は $(L_\lambda, \in)$ が Δ_0-収集公理をみたす順序数 $\lambda > \omega$ のうち最小のもの, という特徴づけもできる.

補題 5.22. (有界性補題) C を ω^ω 上の Π^1_1 集合とし, $f : \omega^\omega \to \mathcal{P}(\omega)$ を, $C = f^{-1}[\mathbf{WF}]$ をみたすような Δ^0_1 定義可能な写像とする. このとき C に含まれる任意の Σ^1_1 集合 A について

$$\sup\{\, \|f(\alpha)\| : \alpha \in A \,\} < \omega_1^{\mathrm{CK}}$$

が成立する.

[証明] c を ω の Π^1_1 部分集合で Σ^1_1 でないものとする. そのような c が存在することは, 普遍 Π^1_1 集合 $U \subset \omega \times \omega$ の存在からの帰結である. このとき補題 5.19 により, Δ^0_1 定義可能な木の Δ^0_1 定義可能な列 $\langle\, T_n : n \in \omega \,\rangle$ で,

$$n \in c \leftrightarrow T_n \in \mathbf{WF}$$

となるようなものが存在する. いま, 仮に

$$\sup\{\, \|f(\alpha)\| : \alpha \in A \,\} \geq \omega_1^{\mathrm{CK}}$$

となったと仮定して, 補題 5.17 の Σ^1_1 二項関係 $\leq_\Sigma$ を用いると

$$n \in c \leftrightarrow (\exists \alpha \in A)[\, T_n \leq_\Sigma f(\alpha) \,]$$

となって, c が Σ^1_1 になってしまう. □

補題 5.23. $\xi \leq \|T_0\|$ となる任意の整礎的な木 T_0 について, $\mathbf{WF}_\xi$ は $\Delta^1_1(T_0)$ である.

[証明] $\|T_0\| \geq \xi$ より, ある $s \in T_0$ が $\|T_0/s\| = \xi$ をみたす. そこで, はじめから $\|T_0\| = \xi$ だったと仮定しても一般性は損なわれない.

比較補題 (補題 5.17) により,

$$\begin{aligned} T \in \mathbf{WF}_\xi &\iff (\exists s \in T_0)[\, s \neq \emptyset \wedge T \leq_\Pi T_0/s \,] \\ &\iff (\exists s \in T_0)[\, s \neq \emptyset \wedge T \leq_\Sigma T_0/s \,] \end{aligned}$$

となるから, $\mathbf{WF}_\xi$ は $\Delta^1_1(T_0)$ である. □

補題 5.24. 任意の可算順序数 ξ に対して, $\mathbf{WF}_\xi$ はボレル集合である.

Remark. のちほどボレル集合の階層を詳しく分析するさいに, $\mathbf{WF}_\xi$ のボレル集合としてのランクを (大ざっぱにだが) 評価する.

[証明] ξ にかんする超限帰納法で証明する.

$\mathbf{WF}_0$ は空集合である. $\mathbf{WF}_1$ はただ一つの節をもつ木 $\{\emptyset\}$ だけからなる一点集合である. $\mathbf{WF}_2$ は, すべての要素が $\emptyset$ かなんらかの $i \in \omega$ について $\langle i \rangle$ の形をしているような木である. これらはすべて $\mathcal{P}(\omega)$ の閉部分集合になっている. 一般に, 有限の n に対して $\mathbf{WF}_n$ は (すべての節の長さが n 以下であるような木の全体の集合であり) 閉集合であるからボレル集合である.

λ が可算な極限順序数で, $\xi < \lambda$ に対して $\mathbf{WF}_\xi$ はすべてボレル集合だったと仮定する. 極限順序数 λ については $\mathbf{WF}_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} \mathbf{WF}_\xi$ であるから, $\mathbf{WF}_\lambda$ は可算個のボレル集合の和集合ということになり, これもボレル集合である.

$\mathbf{WF}_\xi$ がボレル集合だったと仮定する. このとき,

$$\mathbf{WF}_{\xi+1} = \mathbf{WF}_\xi \cup \{\, T : (\forall s \in T)[\, s \neq \emptyset \to T/s \in \mathbf{WF}_\xi \,] \,\}$$

となっている. 写像 $(s, T) \to T/s$ は連続写像だから, $\mathbf{WF}_{\xi+1}$ も $\mathbf{WF}_\xi$ 同様にボレル集合である. こうして, 超限帰納法によりすべての ξ について $\mathbf{WF}_\xi$ はボレル集合である. □

したがってとくに, $\xi < \omega_1^{\mathrm{CK}}$ のときは, $\mathbf{WF}_\xi$ は Δ^1_1 であるようなボレル集合ということになる. Δ^0_1 定義可能な写像による Δ^1_1 集合の逆像は Δ^1_1 集合になるし, ボレル集合の連続写像による逆像はまたボレル集合になる. このことをもちいると,

命題 5.25. (分離定理) A_0 と A_1 を, 互いに交わらない ω^ω の Σ^1_1 部分集合とする. このとき A_0 は Δ^1_1 であるようなボレル集合 B によって A_1 から分離される:

$$A_0 \subset B,\ B \cap A_1 = \emptyset,\ B \in \Delta^1_1 \cap \mathrm{Borel}.$$

[**証明**] $C = \omega^\omega \setminus A_1$ とおいて, $f : \omega^\omega \to \mathcal{P}(\omega)$ を, $C = f^{-1}[\mathbf{WF}]$ をみたす Δ^0_1 定義可能な写像とする. このとき有界性補題 5.22 により, ある $\xi < \omega_1^{\mathrm{CK}}$ について

$$A_0 \subset f^{-1}[\mathbf{WF}_\xi]$$

となる. この $f^{-1}[\mathbf{WF}_\xi]$ を B とすればよい. □

相対化によって次の定理を得る.

定理 8. (ルーシンの分離定理) 互いに交わらない $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合はボレル集合によって分離される. □

とくに, 二つの $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合が互いに相手の補集合だった場合を考えると,

定理 9. (ススリンの定理) $\mathbf{\Delta}^1_1$ 集合はボレル集合である. □

逆にボレル集合が $\mathbf{\Delta}^1_1$ であることは容易にわかるから, 定理 9 は《ボレル集合とは $\mathbf{\Delta}^1_1$ 集合のことにほかならない》という形で述べることができる.

このススリンの定理こそが, 古典記述集合論の最初のそして最高の Deep な結果であると筆者は考える. $\mathbf{\Sigma}^1_1$ の古典的な定義は, 無理数空間 ω^ω の連続像, あるいは平面の $\mathbf{\Pi}^0_2$ 集合の直線への射影, といったものであった. このように, 可算順序数全体にわたる超限帰納法も "すべての σ-加法族の共通部分" といった超越的な集合論的手法も用いないボレル集合の特徴づけが得られたこと, そしてボレル集合を超える自然な集合のクラスとして $\mathbf{\Sigma}^1_1$ が得られたこと, これらの発見のもったであろうインパクトを評価するためには, かのルベーグ[8]ですら, "ボレル可測でないルベーグ可測集合を実効的に指名 (≒ 式によって定義) することは誰にもできないのではないか" と, 最初は疑っていた, と指摘すれば十分だろうか.

5.6 Δ^1_1 実数, 完全集合定理

概要. ω から ω への Δ^1_1 定義可能な関数全体が ω^ω の Π^1_1 部分集合になることを, クライゼルの一意化定理を用いて導く. ギャンディ位相の方法を用いると, このことか

[8] ボレルに宛てた手紙の中で述べていることによる. この手紙の日本語訳はコンヌ (丸山訳) の『非可換幾何学入門』(岩波書店 1999 年) の第 2 章付録 3 や, 田中尚夫『選択公理と数学』(星雲社 1987 年) の第 2 章 §11 にある. 前者が展開する "非可換幾何学" は, 難しくてよくワカランのではあるが, 従来の "多様体と関数の数学" から "量子空間と作用素代数の数学" へのパラダイム転換を提唱する大理論で, 近年の記述集合論で活発に研究されているボレル同値関係の構造理論が実際に応用される舞台ともなっているようだ.

ら, ススリンの完全集合定理のハリソンによる精密化 “Δ^1_1 定義可能でない要素を含む Σ^1_1 集合は完全集合を含む.” がただちに導かれる.

ω から ω への Δ^1_1 定義可能な関数の全体は可算集合であるから, あきらかにボレル集合であり, したがって $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合である. もちろん, そのことを指摘したところでほとんど意味はない. だが, 次の結果は有意義だ.

命題 5.26. ω から ω への Δ^1_1 定義可能な関数の全体は Π^1_1 である.

[**証明**] $(3,0)$-変数の普遍 Π^1_1 式 $\theta(e,n,i)$ を考える. $\omega\times\omega$ の Π^1_1 部分集合はすべて, ある番号 $e\in\omega$ にかんする $\{\langle n,i\rangle : \theta(e,n,i)\}$ として得られる. とくに, Δ^1_1 定義可能な関数 $\alpha\in\omega^\omega\cap\Delta^1_1$ のグラフはどれも, そのようにして得られることになる:

$$\alpha(n)=i \iff \theta(e,n,i).$$

そこで, θ を i にかんして一意化する Π^1_1 式 θ^* を考える (クライゼルの一意化定理). 関数 $\alpha\in\omega^\omega\cap\Delta^1_1$ のグラフは最初から i に関して一意化されているわけだから,

$$\alpha(n)=i \iff \theta(e,n,i) \iff \theta^*(e,n,i).$$

このような番号 e については, あきらかに

$$(!) \qquad (\forall n)(\exists i)\theta^*(e,n,i)$$

が成立する. 逆に式 (!) をみたすような e については, $\theta^*(e,n,i)$ となるただ一つの i を $\beta(n)$ として $\beta:\omega\to\omega$ を定義すれば,

$$\beta(n)=i \iff \theta^*(e,n,i) \iff (\forall j)[\,\neg\theta^*(e,n,j)\vee i=j\,]$$

だから, β は Δ^1_1 定義可能となる. そこでいま式 (!) をみたす番号 e 全体の集合を F とすれば,

$$\omega^\omega\cap\Delta^1_1=\{\,\beta\in\omega^\omega : (\exists e)[\,e\in F\wedge(\forall n)\theta^*(e,n,\beta(n))\,]\,\}$$

となり, $\omega^\omega\cap\Delta^1_1$ が Π^1_1 集合であることがわかる. □

ここでは証明しないが, 実は $\omega^\omega\cap\Delta^1_1$ は Σ^1_1 集合ではない.

さて, A を ω^ω の Σ^1_1 部分集合だとしよう. もしも A が Δ^1_1 定義可能でない要素を含めば, $A'=A\setminus\Delta^1_1\neq\emptyset$ であり, 命題 5.26 により, A' も Σ^1_1 である. ω^ω 上のギャンディ位相 $\mathbb{G}_1$ でこの A' をみると, 空でなく孤立点のない開部分集合になっているから, 命題 2.8 によって, 2^ω への連続全単射をもつような部分集合を含むが, シルヴァーの定理 (定理 4) の証明の最後に指摘したように, ギャンディ位相を扱っている場合は, その連続全単射を ω^ω の通常の位相にかんして同相写像となるようにできる. こうして, 次の結果が得られる.

定理 10. (Harrison) ω^ω の Σ^1_1 部分集合は, Δ^1_1 定義可能でない要素をひとつでも含めば, 完全集合を含む. □

定理 10 から, 相対化によって, 次の古典的記述集合論の定理を得る.

定理 11. (Suslin) ω^ω の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 部分集合は, 不可算であれば完全集合を含む. □

ここまでは, Δ^1_1 定義可能な実数の数え上げの話だったが, ω^ω 上の Δ^1_1 集合の数え上げも同様にできる. 次の結果はシルヴァーの定理の証明で用いたものだ.

補題 5.27. 次の条件をみたすような $W \subset \omega$ と $B^+, B^- \subset \omega \times \omega^\omega$ が存在する:

(i) W, B^+, B^- はいずれも Π^1_1 集合である.

(ii) $e \in W$ のとき, $(\forall\alpha)[\,\langle e,\alpha\rangle \in B^+ \leftrightarrow \langle e,\alpha\rangle \notin B^-\,]$ である. (このとき切り口 B^+_e と B^-_e はいずれも Δ^1_1 集合である.)

(iii) ω^ω の Δ^1_1 式はすべてある $e \in W$ に対する B^+_e (同じことだが $\omega^\omega \setminus B^-_e$) として得られる.

[**証明**] 式 $\theta(e,\alpha)$ を $(1,1)$-変数の普遍 Π^1_1 式とする. 集合 W を

$$e \in W \iff (\forall\alpha)[\,\theta((e)_0,\alpha) \vee \theta((e)_1,\alpha)\,]$$

と定める. つまり W は, 二つで ω^ω 全体をカバーする Π^1_1 集合のペアの番号全体ということになる. 次に $\varphi(e,i,\alpha)$ を

$$\varphi(e,i,\alpha) \iff [\,\theta((e)_0,\alpha) \wedge i = 0\,] \vee [\,\theta((e)_1,\alpha) \wedge i = 1\,]$$

と定義する. この φ は Π^1_1 式である. そこでこの式を i にかんして一意化した $\varphi^*(e,i,\alpha)$ を考える. そして,

$$\begin{aligned} B^+ &= \{\,\langle e,\alpha\rangle : \varphi^*(e,0,\alpha)\,\} \\ B^- &= \{\,\langle e,\alpha\rangle : \varphi^*(e,1,\alpha)\,\} \end{aligned}$$

とすればよい. □

5.7 Δ^1_1 選択原理

次の定理は, Recurstion Theory の観点からみてたいへん興味深いものであり, 実際, このあとでボレル集合のコード化についての結果を証明するときに役に立つ.

定理 12. 任意の Π^1_1 式 $\varphi(n,\alpha)$ について,

$$(\Delta^1_1\mathrm{AC}) \qquad (\forall n)(\exists\alpha\in\Delta^1_1)\,\varphi(n,\alpha)\to(\exists\langle\alpha_n:n\in\omega\rangle\in\Delta^1_1)(\forall n)\,\varphi(n,\alpha_n)$$

が成立する. φ は 他のパラメータを含んでいてもよい.

Remark. ここで, $\langle\alpha_n:n\in\omega\rangle$ と書いたものは, 形式上は ω^ω の要素 α であり, $m\in\omega$ に $\alpha(\langle n,m\rangle)$ を対応させる関数を α_n と表記している. したがって, $(\Delta^1_1\mathrm{AC})$ の図式は, 正式には, もとの Π^1_1 式 $\varphi(n,\alpha)$ における $\alpha(t)$ の形の項の出現をすべて $\alpha(\langle n,t\rangle)$ で置き換えて (もちろん, 引数になっている t 自身が α を含むならそこでも置換をおこなって) できる別の Π^1_1 式 $\varphi'(n,\alpha)$ についての

$$(\forall n)(\exists\alpha\in\Delta^1_1)\,\varphi(n,\alpha)\to(\exists\alpha_n\in\Delta^1_1)(\forall n)\,\varphi'(n,\alpha)$$

という形の図式である.

[証明] θ^* と F を, 命題 5.26 の証明に登場したのと同じものとする. 仮定より, どの $n\in\omega$ に対しても, つぎのような e が存在する: $e\in F$ であり, この番号に対応して θ^* が定める Δ^1_1 関数 α が $\varphi(n,\alpha)$ をみたす. この条件は

$$e\in F\wedge(\forall\alpha)[\,\varphi(n,\alpha)\vee(\exists m)(\exists i)[\,\theta^*(e,m,i)\wedge\alpha(m)\neq i\,]\,]$$

(つまり, e は Δ^1_1 関数の番号であり, どの関数 α も $\varphi(n,\alpha)$ をみたすか, さもなければ e に対応する Δ^1_1 関数に一致しない) と書ける. この式を $\psi(n,e)$ と書こう. この ψ も Π^1_1 式である. 仮定から $(\forall n)(\exists e)\psi(n,e)$ であるから, これを i にかんして一意化して $\psi^*(n,e)$ を得たとすると,

$$\gamma(n)=i\leftrightarrow\psi^*(n,e)$$

によって Δ^1_1 関数 γ が定められる. このとき

$$(\forall n)\psi(n,\gamma(n))$$

なので,

$$\begin{aligned}\alpha_n(m)=i&\leftrightarrow\theta^*(\gamma(n),m,i)\\&\leftrightarrow(\forall j)[\,\theta^*(\gamma(n),m,j)\to i=j\,]\end{aligned}$$

によって定められる $\langle\alpha_n:n\in\omega\rangle$ も Δ^1_1 であり, これが

$$(\forall n)\varphi(n,\alpha_n)$$

をみたすことになる. $\square$

6　ボレル集合

概要. 聴講者からのリクエストに応えて書き始めたボレル集合のコード化の理論ですが, ちょっと中途半端なものになってしまいました. コード化を定義したら, その次にはぜひとも, 測度や meager イデアルなどとの関係を effective な観点から展開すべきですし, ボレル集合の階層と Δ^1_1 の対応関係などの純粋に Recursion Theoretical な問題もいろいろ出てきます. まあ, それについてはまたの機会に...

ボレル集合のコード化の方法は, ソロヴェイによって, 論文 [10] で初めて定義されたもの. たとえばイェックの [3, 4] でもマンスフィールド& ヴァイトカンプの [7] でも, 同じアイディアをそれぞれの文脈に合わせて少し書き換えて使ってます. このノートで定義する方法は, 見たところこれらとはだいぶ違うけれども, 本質は同じです. こちらのほうがいくぶんわかりやすくなっていると期待しますが.

6.1　ボレル集合の階層

ボレル集合というのは開集合の全体を含む最小の σ-加法族に属する集合のことだ. したがって, 開集合の全体から出発して, 補集合をとる演算と, 可算列の和をとる演算をどんどん繰り返していけば, いずれはボレル集合の全体が得られることになる.

開集合の全体 $\mathbf{\Sigma}^0_1$ から出発して, $\mathbf{\Sigma}^0_1$ に属する集合の補集合の全体 $\mathbf{\Pi}^0_1$, それに属する可算個の集合の和集合の全体 $\mathbf{\Sigma}^0_2$, というぐあいに $\mathbf{\Sigma}^0_n, \mathbf{\Pi}^0_n$ を作っていったとして, それら全体の和 $\bigcup_{n<\omega}\mathbf{\Sigma}^0_n$ はまだ σ-加法族ではない. 対角線的に A_n を $\mathbf{\Sigma}^0_n$ から取ってその和集合 $\bigcup_{n<\omega}A_n$ を考えたら, それがどれかの $\mathbf{\Sigma}^0_n$ に属するアプリオリな理由などないからである. 実際, 1.15 節の結果によれば, 半開区間 $[n, n+1)$ から, $\mathbf{\Pi}^0_{n+1}$ 集合であって $\mathbf{\Sigma}^0_{n+1}$ 集合でないような集合 A_n がとれる. その和 $\bigcup_{n<\omega}A_n$ は $\bigcup_{n<\omega}\mathbf{\Sigma}^0_n$ に属さないボレル集合である.

そこで, $\bigcup_{n<\omega}\mathbf{\Sigma}^0_n$ に属する可算個の集合の和の全体を考えそれを $\mathbf{\Sigma}^0_\omega$ とし, 以下, 補集合と可算和の操作を繰り返して $\mathbf{\Pi}^0_\omega, \mathbf{\Sigma}^0_{\omega+1}, \ldots$ を作っていったとしても, 可算回の繰り返しでは決して σ-加法族に到達できないことがわかる. ボレル集合族全体を生成するためには, 補集合と可算和の操作を ω_1 回反復する必要がある.

定義 6.1. 可算順序数 $\xi \geq 1$ に対して $\mathbf{\Sigma}^0_\xi, \mathbf{\Pi}^0_\xi$ を次のように再帰的に定義する. $\mathbf{\Sigma}^0_1$ は開集合の全体である. $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ は $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ に属する集合の補集合の全体である. また $\xi > 1$ のとき, $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ は $\bigcup_{1\leq\eta<\xi}\mathbf{\Pi}^0_\eta$ に属する可算個の集合の和集合の全体である. □

定義 6.2. $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ と $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ の両方に属する集合の全体を $\mathbf{\Delta}^0_\xi$ とあらわす. □

このとき, $\bigcup_{1\leq\xi<\omega_1}\mathbf{\Sigma}^0_\xi = \bigcup_{1\leq\xi<\omega_1}\mathbf{\Pi}^0_\xi = \bigcup_{1\leq\xi<\omega_1}\mathbf{\Delta}^0_\xi$ であり, これがボレル集合の全体ということになる. また, ξ が有限のときには, 現在の定義と第 1 節で定義した $\mathbf{\Sigma}^0_n$ および $\mathbf{\Pi}^0_n$ の定義と同値になる. 各 $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ および $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ は普遍集合をもち, したがって補集合をとる操作のもとでは閉じていない. そこで,

$$\begin{array}{ccccccccc} & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & \cdots & & \mathbf{\Sigma}^0_\xi & & \cdots \\ \mathbf{\Delta}^0_1 & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & \cdots & \mathbf{\Delta}^0_\xi & & \mathbf{\Delta}^0_{\xi+1} & \cdots \\ & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2 & \cdots & & \mathbf{\Pi}^0_\xi & & \cdots \end{array}$$

は, 後に来る集合族が前の集合族を真に含むという意味で, 真の階層になっている. どのボレル集合 B に対しても, $B \in \mathbf{\Sigma}^0_\xi \cup \mathbf{\Pi}^0_\xi$ となるような ξ のうち最小のものが定まる. その ξ をボレル集合 B の ランク という.

6.2 ボレル集合のコード化

ボレル集合のコード化の方法は, その本質においては一つなのだが, 具体的な記述の仕方に何通りかがある. ここでは整礎的な木を使う方法を紹介する.

コード とは, 次のような三つ組 $c = \langle T_c, I_c, J_c \rangle$ のことである:

(1) T_c は ω 上の整礎的な木である.

(2) I_c は T_c の終端節に自然数を対応づける関数である: $I_c : \mathrm{tn}(T_c) \to \omega$.

(3) J_c は T_c の非終端節に 0 か 1 を対応づける関数である: $J_c : T_c \setminus \mathrm{tn}(T_c) \to 2$.

ただし, 議論を簡単にするため, 自然数の有限列に自然数を割り当てて $\omega^{<\omega} \subset \omega$ とみなし, I_c と J_c を T_c 上だけでなく ω 全体で定義されているものと考える. I_c および J_c の, 本来の定義域の外での値が問題になることは決してない.

気持ちの上では, T_c の終端節に実数の開区間を対応させ, 非終端節には, その節の後続者たち (可算個) が表現しているボレル集合の和集合またはその補集合を対応させる, という方法でボレル集合を表現する. つまり, 次のような bar-recursion を考えている. 数直線 $\mathbb{R}$ を例にとって述べれば,

(4) $s \in \mathrm{tn}(T_c)$ のとき, $B_c(s)$ とは, $\mathbb{R}$ の $I_c(s)$ 番目の有理開区間のことである.

(5) $s \in T_c \setminus \mathrm{tn}(T_c)$ かつ $J_c(s) = 0$ のとき, $B_c(s) = \bigcup_{t \in \mathrm{succ}_T(s)} B_c(t)$ である.

(6) $s \in T_c \setminus \mathrm{tn}(T_c)$ かつ $J_c(s) = 1$ のとき, $B_c(s) = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{t \in \mathrm{succ}_T(s)} B_c(t)$ である.

(7) 空列に対応づけされた集合 $B_c(\emptyset)$ のことを, コード c によって表現されるボレル集合といい, 単に B_c と書く.

このとき T_c の各要素 s に集合 $B_c(s)$ が対応することと, $B_c(c)$ が実際にボレル集合になることは, 《$B_c(s)$ はボレル集合である》という述語に対する bar-induction で確かめられる. 逆にすべてのボレル集合がなんらかのコード

によって表現されることも, ボレル集合としてのランクに関する超限帰納法により, 容易に確かめられるだろう.

例として数直線のボレル集合の場合を述べたが, 以上のようなボレル集合のコード化の手順は $\mathbb{R}$ の特殊性に依存するわけではない. もっと一般に, 可算な開基をもつ位相空間 (第 2 可算空間) で同じように議論ができる. ポーランド空間 X の可算な開基 $\mathcal{B}$ の要素の数え上げ,

$$N_0^X, N_1^X, \ldots, N_i^X, \ldots$$

が与えられたとすれば, コード $c = \langle T_c, I_c, J_c \rangle$ が表現するボレル集合 B_c^X は, 上記 (4)〜(6) において, $\mathbb{R}$ を X, 《$I_c(s)$ 番目の有理開区間》を $N_{I_c(s)}^X$ で置き換ることにより, 同様に定義される.

このように, ボレル集合のコード化そのものは空間を選ばないのではあるが, 以下では, $\mathbb{R}$ や ω^ω のように, 算術的な式とか算術的集合の階層が意味をなすような空間において議論することにしたい. その理由は, これらの空間ではコード化がパラメータなしの Π_1^1 式で表現できるということを証明しておきたいからである.

$\mathbb{R}$ や $\omega^k \times (\omega^\omega)^\ell$ の形の空間では, 基本開集合の数え上げ N_i をうまく選べば, $x \in N_i$ という $i \in \omega$ と x との関係が Σ_1^0 式で記述できる. たとえば数直線の場合, 自然数 i によって, 区間の中点となる有理数の分子と分母と符号と, 区間の幅を表現すればよいので,

$$\left((-1)^{((i)_1)_0} \frac{((i)_0)_0}{((i)_0)_1 + 1} - 2^{-((i)_1)_1},\ \ (-1)^{((i)_1)_0} \frac{((i)_0)_0}{((i)_0)_1 + 1} + 2^{-((i)_1)_1} \right)$$

を $N_i^{\mathbb{R}}$ と定義すればよいわけだ (もちろん, この他にもやり方は何通りもある). そこで, 以下では,

$$x \in N_i^X$$

という i と x との関係が, パラメータなしの Σ_1^0 式で表現されているものと仮定する.

さて, 以上のような長たらしい前置きをした上で, コード化の手続きのきちんとした定義を与えることにする.

定義 6.3. $\mathbf{BC} = \mathbf{WF} \times \omega^\omega \times 2^\omega$ とおく. $\mathbf{BC}$ の要素は <u>コード</u> と呼ばれる. コード c の成分を明示する必要があるときは $c = \langle T_c, I_c, J_c \rangle$ のように書く. □

補題 6.4. $\mathbf{BC}$ は $\mathcal{P}(\omega) \times \omega^\omega \times 2^\omega$ の Π_1^1 部分集合である. □

定義 6.5. 空間 X の点 x と $\mathcal{P}(\omega) \times \omega^\omega \times 2^\omega$ の要素 $c = \langle T_c, I_c, J_c \rangle$ が与えられたとする. 対 $\langle x, c \rangle$ の <u>デコーダ</u>(decoder) とは, 次の条件をみたす関数 $f : \omega \to 2$ のことである.

(8) $s \in \mathrm{tn}(T_c)$ のときは $f(s) = 1 \iff x \in N^X_{I_c(s)}$.

(9) $s \in T_c \setminus \mathrm{tn}(T_c)$ かつ $J_c(s) = 0$ のときは,

$$f(s) = 1 \iff (\exists t \in \mathrm{succ}_{T_c}(s))[f(s) = 1].$$

(10) $s \in T_c \setminus \mathrm{tn}(T_c)$ かつ $J_c(s) = 1$ のときは,

$$f(s) = 1 \iff (\forall t \in \mathrm{succ}_{T_c}(s))[f(s) = 0]. \quad \square$$

補題 6.6. f と x と c にかんする関係《f は対 $\langle x, c\rangle$ のデコーダである》は算術的である. $\square$

一般に, 対 $\langle x, c\rangle$ のデコーダはたくさんありうる. しかしながら,

補題 6.7. $c \in \mathbf{BC}$ で, f と g が対 $\langle x, c\rangle$ のデコーダのとき, $f \restriction T_c = g \restriction T_c$.

[証明] 整礎的な木 T_c 上の bar-induction で証明できる. $\square$

定義 6.8.

$$B^+ = \{\, \langle c, x\rangle : c \in \mathbf{BC} \wedge (\forall f)[\ f \text{ は } \langle x, c\rangle \text{ のデコーダ} \to f(\emptyset) = 1\ ]\,\}$$
$$B^- = \{\, \langle c, x\rangle : c \in \mathbf{BC} \wedge (\forall f)[\ f \text{ は } \langle x, c\rangle \text{ のデコーダ} \to f(\emptyset) = 0\ ]\,\}$$

と定義する. また $c \in \mathbf{BC}$ のとき

$$B_c = \{\, x \in X : \langle c, x\rangle \in B^+ \,\}$$

と定義する. $\square$

補題 6.9. B^+ と B^- はいずれも Π^1_1 である. $\square$

また, 補題 6.7 によりあきらかに

補題 6.10. $c \in \mathbf{BC}$ のとき, 任意の $x \in X$ について,

$$\langle c, x\rangle \in B^+ \iff \langle c, x\rangle \notin B^-$$

となる. したがって, B_c は $\Delta^1_1(c)$ である. $\square$

補題 6.11. $c \in \mathbf{BC}$ のとき, B_c はボレル集合である.

[証明] 整礎的な木 T_c 上の bar-recursion によって, 次のような $\langle\, B(s) : s \in T_c \,\rangle$ が定まる.

(11) $s \in \mathrm{tn}(T_c)$ のときは $B(s) = N^X_{I_c(s)}$.

(12) $s \in T_c \setminus \mathrm{tn}(T_c)$ かつ $J_c(s) = 0$ のときは, $B(s) = \bigcup_{t \in \mathrm{succ}(\ s)} B(t)$.

(13) $s \in T_c \setminus \mathrm{tn}(T_c)$ かつ $J_c(s) = 1$ のときは, $B(s) = X \setminus \bigcup_{t \in \mathrm{succ}(\ s)} B(t)$.

このとき, T_c 上の bar-induction により,

$$x \in B(s) \iff (\forall f)[\, f \text{ は } \langle x, c\rangle \text{ のデコーダ} \to f(s) = 1\,]$$

となる. とくに $B(\emptyset) = B_c$ である. ふたたび, T_c 上の bar-induction により,

(14) $s \in T_c \setminus \mathrm{tn}(T_c)$ かつ $J_c(s) = 0$ のとき $B(s)$ は $\mathbf{\Sigma}^0_{|s|_{T_c}}$ に属する.

(15) $s \in T_c \setminus \mathrm{tn}(T_c)$ かつ $J_c(s) = 1$ のとき $B(s)$ は $\mathbf{\Pi}^0_{|s|_{T_c}}$ に属する.

ということがわかる. したがって, B_c は $J_c(\emptyset) = 0$ か否かに応じて, $\mathbf{\Sigma}^0_{\|T_c\|}$ または $\mathbf{\Pi}^0_{\|T_c\|}$ に属する. □

補題 6.12. 空間 X の任意のボレル集合 B に対して, すくなくともひとつのコード c が $B_c = B$ をみたす.

[証明] これはボレル集合 B のランクにかんする超限帰納法による.

(i) B が $\mathbf{\Sigma}^0_1$ に属するとき:

$$B = \bigcup_{n<\omega} N^X_{\alpha(n)}$$

となるような $\alpha \in \omega^\omega$ が存在する. そこで,

$$T_c = \{\emptyset\} \cup \{\, (n) : n < \omega \,\}$$
$$I_c(\,(n)\,) = \alpha(n)$$
$$J_c(\,\emptyset\,) = 0$$

となる三つ組 $c = \langle T_c, I_c, J_c\rangle$ を考えれば, これはコードであって, $B_c = B$ となる.

(ii) B が $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ に属し, $\xi > 1$ であるとき:

$$B = \bigcup_{n<\omega} A_n$$

で, 各 A_n がより低いランクのボレル集合だったとする. 帰納法の仮定により, $B_{c_n} = A_n$ をみたすコード c_n が存在する. そこで,

$$T_c = \{\emptyset\} \cup \bigcup_{n<\omega} \{\, (n)^\frown s : s \in T_{c_n} \,\},$$
$$I_c(\,(n)^\frown s\,) = I_{c_n}(s), \quad \text{for } s \in \mathrm{tn}(T_{c_n})$$
$$J_c(\,(n)^\frown s\,) = J_{c_n}(s), \quad \text{for } s \in T_{c_n} \setminus \mathrm{tn}(T_{c_n})$$
$$J_c(\emptyset) = 0$$

と定義するとよい.

(iii) B が $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ に属するとき: $X \setminus B$ は $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ に属するので, これに対して上記 (i) または (ii) の構成をし, ただ最後に $J_c(\emptyset)$ だけを 0 から 1 に変更すれば, $X \setminus B$ を表現するコードのかわりに B を表現するコードが得られる. $\square$

こうして, 空間 X のボレル集合すべてが B_c の形をしており, また, この形の集合はすべてボレル集合であることがわかった. コード c の表現するボレル集合 B_c は $\Delta^1_1(c)$ 集合であり, しかも, 証明によって示唆されるとおり, B_c のボレル集合としてのランクと T_c の整礎的な木としてのランクには対応関係がある.

参考文献

[1] Hájek, P. and Pudlák, P., Metamathematics of First-Order Arithmetic, Springer (1993)

[2] Harrington, L.A., *Long projective wellorderings*, Ann.Math.Logic **12** (1977), p.1-24.

[3] Jech, T., Set Theory, 1st ed., Academic Press (1978)/2nd ed., Springer (1997)

[4] Jech, T., Set Theory — the 3rd millenium edition, Springer (2003)

[5] Kechris, A.S., Classical Descriptive Set Theory, Springer (1995)

[6] Kunen, K., Set Theory — An Introduction to Independence Proofs, North-Holland (1980)

[7] Mansfield, R. and Weitkamp, W., Recursive Aspects in Descriptive Set Theory, Oxford (1985)

[8] Moschovakis, Y.N., Descriptive Set Theory, North-Holland (1980)

[9] Oxtoby, J., Measure and Category, 2nd ed., Springer (1980)

[10] Solovay, R.M., *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann.of Math.(2) **92** (1970) p.1-56.

[11] 田中一之, 鹿島亮, 角田法也, 菊池誠, 数学基礎論講義, 日本評論社 (2002)

[12] 森田紀一, 位相空間論, 岩波書店 (1981)

[13] 吉田耕作, 測度と積分 (岩波講座「基礎数学」), 岩波書店 (197?) / 岩波基礎数学選書「現代解析入門」, 岩波書店 (1991) 所収.