## 1．グラフが 2 次元のルベーグ不可測集合となるような加法的函数の存在証明

方針: 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ のグラフが可測集合であれば, その 2 次元測度はゼロである．これは函数の一価性とフビニの定理からすぐにわかる．そこで, 以下では平面上の正測度のコンパクト集合すべてとグラフが交わるような加法的函数の存在を示す．そうすると, そのような函数のグラフは正の 2 次元ルベーグ外測度をもち、ルベーグ不可測となる.

連続体の濃度 $\mathfrak{c}$ を, その濃度をもつ順序数のうち最小のものと同一視しよう.

平面上のルベーグ測度が正であるようなコンパクト集合すべてを数えあげる列 $\langle P_i : i<\mathfrak{c}\rangle$ を考える．各 $P_i$ の X 軸への射影 $\mathrm{pr}.P_i\subset\mathbb{R}$ は, 1 次元ルベーグ測度が正のコンパクト集合となるから, 連続体の濃度を有する.

超限帰納法を用いることとし, 番号 $i<\mathfrak{c}$ の段階を考える．それに先立つ各 $j<i$ について, 実数 $x_j$ と $y_j$ が既に選ばれているものとする．集合 $\{x_j : j<i\}$ が生成する $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $M_i$ と書くことにすると, $M_i$ の濃度は $\mathfrak{c}$ 未満であるから, $(\mathrm{pr}.P_i)\setminus M_i\neq\emptyset$ である．そこで $x_i\in(\mathrm{pr}.P_i)\setminus M_i$ となるように $x_i$ を選び, $\langle x_i,y_i\rangle\in P_i$ となるように $y_i$ を選ぼう.

すべての $i<\mathfrak{c}$ についてこのように $x_i$ と $y_i$ を選び終えたとしよう．集合 $\{x_i : i<\mathfrak{c}\}$ を $E$ と書くことにしよう．$E$ は $\mathbb{Q}$ 上一次独立であり, $\mathbb{R}$ の $\mathbb{Q}$ 上の部分ベクトル空間

$$M=\bigcup_{i<\mathfrak{c}} M_i$$

の基底となっている．そこで函数 $h:M\to\mathbb{R}$ を各 $i$ で $h(x_i)=y_i$ となるような $\mathbb{Q}$-線形写像として (一意的に) 定めることができる．さらに $E$ を $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{R}$ の基底へと拡大することによって, $h$ を $\mathbb{R}$ 全体の $\mathbb{Q}$-線形写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ に拡大できる.

こうして得られた函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ は 各 $i<\mathfrak{c}$ につき $\langle x_i,f(x_i)\rangle\in P_i$ をみたすから, そのグラフは ルベーグ測度が正のコンパクト集合すべてと交わり, したがって測度が正のすべての可測集合と交わる．このことは $f$ のグラフの外測度が正であることを意味する．いっぽう, 函数の一価性から, グラフの内測度はゼロである．こうして $f$ のグラフがルベーグ不可測であることが示された.

**2. グラフが 2 次元のルベーグ可測集合であるような不連続加法的函数の存在証明**

実数の全体 $\mathbb{R}$ を有理数の全体 $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみなし, ゼロでない線形汎関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Q}$ を考えよう. このようなものの存在は, 選択公理を用いて示すことができる. このとき $f$ は加法的函数で, 正比例函数ではないから不連続である. $f$ の値域は $\mathbb{Q}$ に一致するから グラフは直積集合 $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ に含まれることになる. $\mathbb{R}\times\mathbb{Q}$ は 2 次元のルベーグ零集合なので, $f$ のグラフもルベーグ零集合であり, 可測集合である.

2011 年 9 月 7 日

ゼルプスト殿下 こと 藤田 博司