命題 次の条件をみたす函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する.

(a) f は $\mathbb{Q}$ 上の線形写像である;

(b) f は $\mathbb{R}$ からそれ自身への全単射である;

(c) f のグラフは $\mathbb{R}^2$ のルベーグ不可測集合である.

以下, この命題の証明.

連続体濃度 $\mathfrak{c}$ をその濃度をもつ最小の順序数と同一視する. 以下では $\mathfrak{c}$ 未満の順序数をあらわすのに便宜上文字 i や j を使う.

平面上のコンパクト集合のうち 2 次元ルベーグ測度が正であるものをすべて数え上げる列 $\langle P_i : i < \mathfrak{c} \rangle$ を考える.

実数の集合 $E \subset \mathbb{R}$ にが生成する $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間を $[E]$ と書くことにする.

とくに, E が無限集合であれば, $[E]$ の濃度は E の濃度に等しい.

これから, 実数 a_i, b_i, c_i, d_i を順序数 $i < \mathfrak{c}$ に関する超限帰納法で選んでいく. そのさい, 二つの集合

$$\{ a_i, b_i : i < \mathfrak{c} \} \text{ と } \{ c_i, d_i : i < \mathfrak{c} \}$$

がどちらも $\mathbb{Q}$ 上一次独立になるように, また, $\langle a_i, c_i \rangle \in P_i$ となるように選んでいく.

ある順序数 i に先立つ $j < i$ についてはすでに a_j, b_j, c_j, d_j が選ばれているものとして,

$$M_i = \big[\{ a_j, b_j : j < i \} \big]$$
$$N_i = \big[\{ c_j, d_j : j < i \} \big]$$

と定めよう. このとき M_i と N_i の濃度はどちらも $\mathfrak{c}$ 未満である.

平面の部分集合 P_i と実数 x に対して, $(P_i)_x = \{ y \in \mathbb{R} : \langle x, y \rangle \in P_i \}$ としよう. $(P_i)_x$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合である. 次に $(P_i)_x$ の 1 次元ルベーグ測度が正であるような x 全体の集合を A_i としよう. A_i は $\mathbb{R}$ のボレル集合であり, フビニの定理により A_i の 1 次元ルベーグ測度も正である. したがって A_i は連続体の濃度をもつ. また $x \in A_i$ のとき $(P_i)_x$ も連続体の濃度をもつ. そこで, まず

$$a_i \in A_i \setminus M_i$$

となるように a_i を選ぼう. 部分ベクトル空間 M_i に a_i を追加して拡大したベクトル空間 $M_i \oplus \mathbb{Q}a_i$ の濃度も $\mathfrak{c}$ 未満であるから,

$$b_i \in \mathbb{R} \setminus (M_i \oplus \mathbb{Q}a_i)$$

となるように b_i を選ぶことができる. さて $a_i \in A_i$ なので $(P_i)_{a_i}$ も連続体の濃度をもつ. そこで次に

$$c_i \in (P_i)_{a_i} \setminus N_i$$

と選び, また

$$d_i \in \mathbb{R} \setminus (N_i \oplus \mathbb{Q}c_i)$$

と選ぶ. これで超限帰納法の順序数 i の段階での仕事は終わりである. この選びかたによって, $\langle a_i, c_i \rangle \in P_i$ であることが保証されることに注意しよう.

さて, この要領ですべての $i < \mathfrak{c}$ について a_i, b_i, c_i, d_i が選ばれたものとして,

$$S = \{\, a_i : i < \mathfrak{c} \},\quad T = \{\, c_i : i < \mathfrak{c} \}$$

とおこう. S も T も $\mathbb{Q}$ 上一次独立であって, それぞれ部分空間 $[S]$ と $[T]$ の基底になっている. いま $\mathbb{Q}$ 上の線型写像 $h : [S] \to [T]$ を, 各 $i < \mathfrak{c}$ につき $h(a_i) = c_i$ となるように定めよう. これは $[S]$ を $[T]$ の上に同型に写す写像であり, しかもそのグラフはすべての P_i と交わる.

あとはこの線型写像 $h : [S] \to [T]$ を $\mathbb{R}$ 全体の $\mathbb{Q}$ 上のベクトル空間としての自己同型写像に拡大できればよい. a_i と c_i のほかに b_i と d_i を選んだのはそのためで, そのおかげで $[S]$ と $[T]$ それぞれの余次元 (つまり商ベクトル空間 $\mathbb{R}/[S]$ と $\mathbb{R}/[T]$ の次元) が $\mathfrak{c}$ になる. そこで集合 $S' \subset \mathbb{R} \setminus [S]$ と $T' \subset \mathbb{R} \setminus [T]$ を, $S \cup S'$ と $T \cup T'$ がいずれも $\mathbb{Q}$ 上の $\mathbb{R}$ の基底となるようにとれば, S' も T' も連続体の濃度をもつことになる. S' から T' への任意の全単射は同型写像 $h' : [S'] \to [T']$ を引き起し, 先に与えられた $h : [S] \to [T]$ と h' によって, $\mathbb{R}$ 全体の自己同型写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が得られる. f は h の拡張になっているから, そのグラフはすべての $i < \mathfrak{c}$ について P_i と交わる. このことは f のグラフの 2 次元ルベーグ外測度がゼロでないことを意味するが, 函数のグラフが可測であれば, それは零集合になるので, f のグラフはルベーグ不可測集合である.

2011 年 9 月 7 日

ゼルプスト殿下 こと 藤田 博司