

2013年1月26日

定義. 集合 X とその上の二項関係 $\rightarrow \subset X \times X$ からなる構造 (X, \rightarrow) が

【非反射律】 どの x についても決して $x \rightarrow x$ とならない;

【三択律】 どんな二要素 x, y についても必ず $x = y$ か $x \rightarrow y$ か $y \rightarrow x$ のどれか一つが成立し、しかも二つ以上が同時に成立することはない;

という条件をみたすときに、これを**トーナメント**と呼ぶ。□

あきらかに、非反射的全順序はトーナメントだが、ジャンケンのグーチョキパーは推移律をみたさないトーナメントの例になっている。

命題 1. トーナメント (X, \rightarrow) の部分集合 $X' \subset X$ に対して (X', \rightarrow) はまたトーナメントである。□

ただし \rightarrow は X' 上の二項関係としては $\rightarrow \cap (X' \times X')$ と表記せねばならんのかもしれん。

定義. トーナメント (X, \rightarrow) の部分集合 $A \subset X$ が**上半集合**であるとは、 $y \in A$ かつ $x \in X \setminus A$ なる要素 x と y についてつねに $x \rightarrow y$ となることをいうものとする。□

定義. トーナメント (X, \rightarrow) のふたつの要素 x と y が**分離できる**とは、 $x \rightarrow y$ であつて y を含み x を含まぬ上半集合が存在するかまたは $y \rightarrow x$ であつて x を含み y を含まぬ上半集合が存在する場合にいう。どの二要素もこの意味で分離できるようなトーナメントのことを**分離的トーナメント**と呼ぶ。□

全順序集合は分離的トーナメントである。グーチョキパーにおいてはどの二要素も分離できない。

命題 2. 分離的トーナメントの部分集合はまた分離的トーナメントである。□

命題 3. 推移的でないトーナメントはグーチョキパーと同型なトーナメントを含む。

【証明】 推移的でないとすると $x \rightarrow y, y \rightarrow z$ でありながら $z \rightarrow x$ となるような三つの要素 x, y, z が存在するはずだから。□

この命題 2 と命題 3 から

命題 4. 分離的トーナメントは推移的であり、したがって非反射的半順序である。□