これは発表内容の準備のためのノートであり，PCのスライド，Web公開用資料，配布用ハンドアウトのいずれでもなくそれらの元型になるものです。

ハンドアウト：A4 1枚に定義と結果をまとめる。
スライド：それプラス証明のあらすじ
Web資料：全体を清書

この順でつくる。

（ここへ書けなかった命題論理の実際もWeb資料や話に含めるべきか…）
50分にまとめるにはかなりきちんと題材を選ばないとな… ともあれ…

命題論理のコンパクト性と素イデアル定理

命題変数 $p, q, r, \ldots$ を論理記号 $\wedge, \vee, \to, \neg$ で結合した表現を，(命題論理の) 論理式という．$A, B, C, \ldots$ を論理式をあらわす記号（メタ変数）として用いる．また，$\Gamma, \Delta, \Theta, \ldots$ を，論理式の集合をあらわす記号として用いる．命題変数の全体の集合を $\mathbb{P}$ と書く．

すべての命題変数に真（$\top$）偽（$\bot$）の値をわりあてることで，論理式の値（真理値）は決まる．そのためには，各論理記号の真理表によって，真理値を論理式のなりたちに添って計算していけばよい．そこで，$\mathbb{P}$ から $\{\top, \bot\}$ への写像のことを「解釈」ということにする．解釈 $I : \mathbb{P} \to \{\top, \bot\}$ は各論理式の真偽はそれをもとに計算される．
このあたりは多項式環のギロンに類比されよう．

$I(p)$	$I(q)$	$[\![p \wedge q]\!]_I$	$[\![\neg q]\!]_I$	$[\![A]\!]_I$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

たとえば A が $(p \wedge q) \vee \neg q$ だった場合
$[\![A]\!]_I$ は $I(p)$ と $I(q)$ によって上のように"計算"できる．

$[\![A]\!]_I$ ← 解釈 I のもとでの論理式 A の真理値

$[\![A]\!]_I = \top$ となる解釈 I は A を充足するといわれる．
集合 Γ にぞくするすべての論理式を充足する解釈は"Γ を充足する解釈"とよばれる．
Γ を充足する解釈が少なくともひとつ存在：Γ は充足可能

Γが充足可能なら，Γの部分集合もすべて充足可能．

Γが整合的 $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ Γの有限部分集合はすべて(個別に)充足可能．

あきらかに充足可能ならば整合的．逆はどうか．

Γを，極大な整合的集合Γ^*に拡大すること：

(1) $\Gamma^* \supseteq \Gamma$

(2) Γ^*は整合的

(3) $A \notin \Gamma^* \Rightarrow \Gamma^* \cup \{A\}$は整合的でない．　つまり$\Gamma^*$より大きな整合的集合は存在しない．

ひとまず，そのようなΓ^*が見つかったものとすると，Γ^*を充足する解釈がただひとつ自然に定まる，

というのも…

(4) $A \notin \Gamma^* \Leftrightarrow \neg A \in \Gamma^*$

(5) $A \in \Gamma^*$かつ$B \in \Gamma^* \Leftrightarrow A \wedge B \in \Gamma^*$

(6) $A \in \Gamma^*$または$B \in \Gamma^* \Leftrightarrow A \vee B \in \Gamma^*$

(7) $A \notin \Gamma^*$または$B \in \Gamma^* \Leftrightarrow A \to B \in \Gamma^*$

あとでちゃんと書く．
Web版レジュメは詳細にかくが，スライドでは(4)のみ．

となることがわかり，それによって$\mathcal{I}^*: \mathbb{P} \to \{\mathrm{T}, \bot\}$を $\mathcal{I}(p) = \mathrm{T} \Leftrightarrow p \in \Gamma^*$ と定めれば，

$[\![A]\!]_{\mathcal{I}^*} = \mathrm{T} \Leftrightarrow A \in \Gamma^*$がなりたち，$\mathcal{I}^*$は$\Gamma^*$にぞくする論理式(だけ)をすべて充足するから．

(この$\mathcal{I}^*$と一致しない解釈は，Γ^*にぞくする命題記号を少なくともひとつ，充足させ損なうので，Γ^*を充足しない．そこで$\mathcal{I}^*$はΓ^*を充足するただひとつの解釈である)

逆にある解釈$\mathcal{I}$がΓを充足するなら，$\Gamma^* = \{A \mid [\![A]\!]_{\mathcal{I}} = \mathrm{T}\}$をとればこれが$\Gamma$をふくむ極大整合的集合である．まとめると，

Γを充足する解釈をみつけることはとりもなおさずΓを極大整合的集合へと拡大することである！

どうやって極大化するの？

$\mathbb{P}$が可算集合のばあい，論理式の全体も可算集合であり，$A_0, A_1, A_2, \ldots$のように一列にリストアップできる．

そこで，まず$\Gamma_0 = \Gamma$とし，$\Gamma_n \cup \{A_n\}$が整合的なら$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{A_n\}$とし，そうでないなら$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$とする，という要領で，ちょっとづつ拡大していって，$\Gamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Gamma_n$とすればよい($\Gamma_n \cup \{A_n\}$が整合的でないとすると有限な$\triangle \subseteq \Gamma_n$について，$\triangle \cup \{A_n\}$が充足不可能．別の有限な$\textcircled{H} \subseteq \Gamma_n$について，$\triangle \cup \textcircled{H}$は充足可能(∵$\Gamma_n$は整合的)なのでこれを充足する$\mathcal{I}$をとると，$\triangle \cup \{A_n\}$は充足不可能であることから，$[\![A]\!]_{\mathcal{I}} = \bot$，$[\![\neg A]\!]_{\mathcal{I}} = \mathrm{T}$，したがって，$\mathcal{I}$は$\textcircled{H} \cup \{\neg A_n\}$を充足．ここで$\textcircled{H}$は$\Gamma_n$の任意の有限集合だったから，$\Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$が整合的．つづめて言えば，$\Gamma_n$が整合的ならば，$\Gamma_n \cup \{A_n\}$と$\Gamma_n \cup \{\neg A_n\}$のうち，少なくとも一方は整合的である)

$\mathbb{P}$が不可算無限のとき，この論法をつかうには，不可算個の論理式を一列に並べて一度にひとつづつ処理できるようにする，ということが要請される．これは集合論でいう「整列可能性」である．また，整合性が有限集合に注目して定められることから，いわゆる「ツォルンの補題」で極大整合的集合の存在を保証するというやり方が現在では主流になっている．

この部分を，別の観点から，みてみよう…

解釈全体の集合 = $\mathbb{P}$から$\{\top,\bot\}$への写像全体の集合 $\mathbb{P}\{\top,\bot\}$

論理式Aに対して，Aを充足する解釈の全体 $N_A := \{I:\mathbb{P}\to\{\top,\bot\} \mid [\![A]\!]_I = \top\}$ とする．

このとき，$N_A \cap N_B = N_{A\wedge B}$，$N_A \cup N_B = N_{A\vee B}$，$N_A$の補集合 $= N_{\neg A}$ のように，論理式の論理計算と$\mathbb{P}\{\top,\bot\}$の集合算に対応がつく．

めんどくさいので，以下 $\mathfrak{X} = \mathbb{P}\{\top,\bot\}$とおく．部分集合 $\mathfrak{U}\subset\mathfrak{X}$ が 条件
$I\in\mathfrak{U}$ ならばある論理式Aについて $I\in N_A\subset\mathfrak{U}$ をみたしているときに，"$\mathfrak{U}$は開集合"ということにすれば，"開集合の公理"
(O1) $\mathfrak{X}$と空集合は開集合．
(O2) 有限個の開集合の共通部分も開集合．
(O3) 任意個数の開集合からなる集合族の和は再び開集合．
がみたされ，$\mathfrak{X}$は位相空間となる．この位相空間では，閉集合とはN_Aの形の集合の和集合のことであるが，N_Aの補集合が$N_{\neg A}$なので，N_Aは自分も補集合も開集合、つまり"開かつ閉集合" clopen set である．

さて，論理式の集合Γを充足する解釈全体の集合を$\mathfrak{X}_\Gamma$とすれば，$\mathfrak{X}_\Gamma = \bigcap_{A\in\Gamma} N_A$である．各$N_A$は閉集合でもあったから，$\mathfrak{X}_\Gamma$も閉集合である．$\Gamma$が充足可能とは，$\mathfrak{X}_\Gamma\neq\emptyset$ということにほかならない．では$\Gamma$が整合的ということは？
Γから有限個とった$A_0,A_1,\cdots,A_n$を同時にみたす解釈Iとは，$N_{A_0}\cap N_{A_1}\cap\cdots\cap N_{A_n}$のメンバーのことだから，$\Gamma$が整合的であるということを，集合族$\{N_A \mid A\in\Gamma\}$から任意に有限個えらんだメンバーは必ず空でない共通部分をもつ：$[\forall n\in\omega\ \forall A_0,\cdots,A_n\in\Gamma,\ N_{A_0}\cap N_{A_1}\cap\cdots\cap N_{A_n}\neq\emptyset]$ということである．このような(任意の有限部分族が空でない共通部分をもつ)集合族のことを 有限交叉性をもつ集合族という．そこで，

論理式の集合Γが整合的 $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{X}$の部分集合の族$\{N_A \mid A\in\Gamma\}$が有限交叉性をもつ．

この読みかえによって，「整合的なら充足可能」という命題論理の性質は，「有限交叉性をもつ閉集合族は共通要素をもつ」という位相空間の性質(コンパクト性)に翻訳されることになる．(少しはしょった言い方だが許)

ここで述べた$\mathfrak{X}$の位相は，$\mathbb{P}$を添字集合とする，離散空間$\{\top,\bot\}$の直積位相に一致する．
(まず，N_Aは，Aにあらわれる有限個の命題変数への真偽のわりあてを指定することで決まるので，直積位相の開集合である．逆に直積位相を生成する，有限個の$p_0,\cdots,p_n$への真偽のわりあてで決まる解釈の集合は，各p_kまたは否定$\neg p_k$を$\wedge$で結んだ論理式AについてのN_Aに一致する．)

$K^{\{0,1\}}$の形の位相空間のことを一般カントール空間という．「整合的なら充足可能」という命題論理の性質は，一般カントール空間のコンパクト性を別の言葉で言いあらわしたもの，ということになる．そこでこの性質は命題論理のコンパクト性と呼ばれる．

論理のコンパクト性：整合的(有限部分がすべて充足可能)な論理式の集合は充足可能

命題論理のコンパクト性が一般カントール空間のコンパクト性という位相空間論の言葉に翻訳されるのをみてきた．　実は，選択公理を除いた集合論にこれらのうち一方を公理として追加したら他方が証明できる，という意味で両者は"同値"である．つぎは環論の言葉に~~直して~~書きかえてみよう…

単位元をもった可換な環Rを考えよう.(定義を復習すること), Rの部分集合$A \subset R$は, $A \neq \emptyset$で
$a_1, \dots, a_n \in A, r_1, \dots, r_n \in R \Rightarrow r_1 a_1 + \dots + r_n a_n \in A$ をみたすとき, Rのイデアルとよばれる.
たとえば, 整数の環で偶数の全体とか10の倍数の全体(ある決まった数がゼロの数全体)
などはイデアルの例である. R全体と$\{0\}$を自明なイデアルといいそれ以外を自明でない(自明でない)イデアルという.

RのイデアルAが, $ab \in A \Leftrightarrow (a \in A$ または $b \in A)$ をみたすとき, 素イデアルとよばれる.
整数の環の素イデアルは素数の倍数全体のことであり, 多項式の環では既約多項式に対応する. このように素イデアルは環論において基本的かつ重要な役割をはたす.
一般カントール空間のコンパクト性から素イデアルの存在を導こう...
単位元をもつ可換環Rを添字集合として, 一般カントール空間$Y = {}^R\{0,1\}$を考える.
RのイデアルAは, $a \in A \Leftrightarrow c_A(a) = 0$, という写像$c_A : R \to \{0,1\}$と同一視することで, 空間$Y$の点とみなすことができる. Yの点$\xi \in Y$がイデアル(自明でない)に対応するためには,
$\xi(0) = 0, \xi(1) = 1, \forall a_1, a_2, r_1, r_2 \in R \left(\xi(a_1) = \xi(a_2) = 0 \Rightarrow \xi(r_1 a_1 + r_2 a_2) = 0\right)$をみたせばよいので,
Rの自明でないイデアルの全体は, Yの閉集合になっている. Yは一般カントール空間なので, 仮定によりコンパクト. Rの自明でないイデアルの全体$\mathcal{U}$は, その閉部分集合として, これまたコンパクト位相空間をなす.

環の要素$a \in R$に対して, $F_a := \{\xi \in \mathcal{U} \mid \xi(a) = 0 \vee \forall b (\xi(b) = 1 \Rightarrow \xi(ab) = 1)\}$
とおく. F_aはYの閉部分集合である. $\{F_a \mid a \in R\}$は有限交叉性をもつ.(証明...)
$\bigcap_{a \in R} F_a \neq \emptyset$が$Y$のコンパクト性から導かれる. この共通部分の要素に対応するイデアルは素イデアルになっている.
(命題論理の言葉では?)
可換の素イデアルの存在から"ブール代数の超フィルターの存在"が導かれる. 超フィルターの存在は"コンパクトなハウスドルフ空間の直積はまたコンパクト"という, ハウスドルフ空間に制限した千コノフの定理を導き, したがって一般カントール空間のコンパクト性を導く.

$\{F_a \mid a \in R\}$の有限交叉性の証明: $S \subset R$を任意の有限集合とする. Sにふくまれるいくつかの要素で生成されるイデアルは全部で有限個しかない(Sの要素がn個ならSの部分集合は2^n個あり, Sの部分集合の生成するイデアルも2^n個以下). それらのうち, 自明でない極大なものをとろう. それをAとし対応する$\mathcal{U}$の点ξを考える. $a \in S$とする. $a \in A$なら$\xi \in F_a$であることはすぐわかる. $a \in S \setminus A$のときは極大性から$Ra + A$は自明でないイデアルで, $1 \in Ra + A$となる. $1 = ra + x, x \in A$とおう. すると, 任意の$b \in R$について $b = rab + bx$, $b - r(ab) = bx \in A$となり, もしも$b \notin A$なら$ab \notin A$である. よってこのばあいも$\xi \in F_a$で, けっきょく$\xi \in \bigcap_{a \in S} F_a$となり共通部分の要素になっている.

まとめ

命題論理のコンパクト性，一般カントール空間のコンパクト性，可換環の素イデアルの存在，
ブール代数の超フィルターの存在，ハウスドルフ空間に制限したチコノフの定理．これらはお互いに，
他の別表現と考えることができ，また，選択公理のない集合論のもとで互いに同値命題となる．
(この同値な命題のことを，「素イデアル定理」Prime Ideal Theorem とよぶ)

数理論理学を数学に先立ってその基礎づけをするものと考えるより，数学全体の営みの中で，
他領域と interactionする一領域と考えたほうが楽しいかもしれん，というのが
この話の教訓です．

(3月18日)

極大整合的集合の性質(4)～(7)の証明．

(4) $\{A, \neg A\}$は充足不可能なので，$\neg A \in \Gamma^*$ならば $A \notin \Gamma^*$である(Γ^*の整合性による)．逆に Γ^*の極大性から，$A \notin \Gamma^*$ならば $\Gamma^* \cup \{A\}$はもはや整合的でないので，Γ^*のある有限部分$\triangle$について $\triangle \cup \{A\}$が充足不可能．いまΘをΓ^*の任意の有限部分として，$\Theta \cup \triangle$を充足する解釈(Γ^*の整合性により存在)Iを考えると，これは$\triangle \cup \{A\}$を充足しないが$\triangle$を充足するので$[\![A]\!]_I = \bot$, $[\![\neg A]\!]_I = \top$となっている．ゆえにこのIは$\Theta \cup \{\neg A\}$を充足する．ΘはΓ^*の任意の有限部分だったから，$\Gamma^* \cup \{\neg A\}$は整合的．したがって極大性より $\neg A \in \Gamma^*$である．

(5) $A \in \Gamma^*$かつ$B \in \Gamma^*$のとき，任意有限部分 $\Theta \subseteq \Gamma^*$に対し $\Theta \cup \{A, B\}$は(Γ^*の整合性より)充足可能である．$\Theta \cup \{A, B\}$を充足する解釈Iについて，$[\![A]\!]_I = [\![B]\!]_I = \top$より$[\![A \wedge B]\!]_I = \top$でもあり，$I$は$\Theta \cup \{A \wedge B\}$を充足する．$\Theta$は任意の有限部分だったから$\Gamma^* \cup \{A \wedge B\}$は整合的で，$\Gamma^*$の極大性により $A \wedge B \in \Gamma^*$となる．逆に，$A \wedge B \in \Gamma^*$のとき任意の有限$\Theta \subseteq \Gamma^*$に対し$\Theta \cup \{A \wedge B\}$は充足可能で，これを充足する解釈$I$について$[\![A \wedge B]\!]_I = \top$より，$[\![A]\!]_I = [\![B]\!]_I = \top$となる．つまり，$I$は$\Theta \cup \{A, B\}$を充足する．$\Theta$は任意の有限集合だったから，$\Gamma^* \cup \{A, B\}$は整合的であり，極大性から$A \in \Gamma^*$かつ$B \in \Gamma^*$となる．

(6) $A \in \Gamma^*$とする．Θを前と同様にとり$\Theta \cup \{A\}$を充足する解釈Iを考えると，$[\![A]\!]_I = \top$より$[\![A \vee B]\!]_I = \top$で，$I$は$\Theta \cup \{A \vee B\}$を充足する．$\Theta$は任意だったので $\Gamma^* \cup \{A \vee B\}$は整合的．極大性から$A \vee B \in \Gamma^*$となる．$B \in \Gamma^*$のときも同様に$A \vee B \in \Gamma^*$となる．逆に$A \vee B \in \Gamma^*$のときも$\Theta \cup \{A \vee B\}$を充足する$I$をとると$[\![A \vee B]\!]_I = \top$より$[\![A]\!]_I = \top$か$[\![B]\!]_I = \top$の少なくとも一方が成立する．どちらになるかは$I$による．しかしもしも$\Gamma^* \cup \{A\}$が整合的でないとすると，(4)より$\neg A \in \Gamma^*$であるから$I$は$\Theta \cup \{A \vee B, \neg A\}$を充足すると仮定してよくて，このとき$[\![A \vee B]\!]_I = \top$, $[\![A]\!]_I = \bot$より$[\![B]\!]_I = \top$である．このことから$\Gamma^* \cup \{A\}$が整合的でなければ$\Gamma^* \cup \{B\}$が整合的であり，$A \in \Gamma^*$でなければ$B \in \Gamma^*$である．

(7) Aのかわりに $\neg A$をもちいて(6)と同様に考えればよい．(証明おわり)