命題論理と素イデアル定理

藤田 博司*

2012 年 3 月 31 日
関西すうがく徒のつどい

数理論理学と他分野の交流の一端を示す例として命題論理のコンパクト性とその周辺の話題を紹介します. 会場配布用のレジュメではスペースの都合上定義くらいしか書けませんが, ここでは枚数やらなにやら一切気にせずに好きなだけ書きます.[*1] そのためヘタをすると饒舌ぎみになるかもしれません. なにせそういうものなので, とくに 10 ページ以降は, 通読しようなんざ思わなくてもいいです. あと, この文書についてのご質問ご意見は電子メールで `academia@tenasaku.com` まで, あるいはツイッターで `@tenapi` までお気軽にどうぞ!!

1　命題論理のコンパクト性

論理というからには構文論・意味論・証明論の三点セットでお届けするのが筋なのだろうが, 本稿ではもっぱら古典論理の意味論を扱い, 構文論は補足のセクションで必要最小限を述べるにとどめ, 証明論に至ってはまったく扱わない.[*2]

1.1　古典命題論理の意味論はつまらない

命題変数 p, q, r,... を論理記号 $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$ で (しかるべき構文規則にしたがって) 結合した表現を (命題論理の) **論理式** (propositional formula) という. このセクションでは論理式をあらわすメタ変数として A, B, C,... を用い, 論理式の集合をあらわすメタ変数として $\mathit{\Gamma}$, $\mathit{\Delta}$, $\mathit{\Theta}$,... を用いる. また命題変数の全体の集合を $\mathbb{P}$ と書く.

ふたつの特別な記号 $\top$ と $\bot$ を用意する. これらは $\top$ が真, $\bot$ が偽という**真理値** (truth value) の記号である. 《真とはなにか》というようなことはここでは考えない. つまり, さしあたっては $\top$ と $\bot$ は指定された二つのものだというだけでその意味内容は問わない.

定義 1.1. 命題変数への真偽のわりあてのことを**解釈** (interpretation) という. つまり, 解釈とは任意の写像 $I : \mathbb{P} \to \{\top, \bot\}$ のことである. ◀

すべての命題変数に $\top$ (真) または $\bot$ (偽) をわりあてることで, 論理式の値 (真理値) も定まる. そのためには, 各論理記号の真理表 (truth table) によって真理値を論理式のなりたちに添って計算してゆけばよい. す

* 愛媛大学大学院理工学研究科

*1 というか, 言及する可能性があることをひとまず全部書いてみないと, 実際に何をしゃべるか決められないのです.

*2 また, 《真理とはなにか》とか《言説が真であるための条件とは》とか《そもそも真理と虚偽の区別一般の可能性の条件はなに?》というような問題も扱わないし, 「おいおい, そんなことで論理学と言えるのかい」という疑問にも答えません. そうした問いの重要性を否定するつもりもありませんが, さしあたり考慮の外に置くほかないのです.

なわち, まず命題記号そのものの真理値は I でわりあてられた $\top$ または $\bot$ の値であるものとする. あとは, すでに真理値の求まった論理式 A と B を論理記号で結合して新しい論理式を作るさいに, 次の表

		$\wedge$	$\vee$	$\to$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

	$\neg$
$\top$	$\bot$
$\bot$	$\top$

によって新しい論理式の真理値が定まるものとする. たとえば論理式 A が $(p \wedge q) \vee (\neg q)$ だった場合, その真理値 $[\![A]\!]_I$ は次の表のようにして計算される:

$I(p)$	$I(q)$	$[\![p \wedge q]\!]_I$	$[\![\neg q]\!]_I$	$[\![A]\!]_I$
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$

この計算規則に則り, さらに $\top$ と $\bot$ をそれぞれ真と偽だとみなすことによって, はじめて $\wedge$ や $\vee$ や $\to$ に《かつ》や《または》や《ならば》の意味が与えられる. ここでもしも $\top$ と $\bot$ の意味をとり違えて $\top$ が偽で $\bot$ が真をあらわすと思えば $\vee$ が《かつ》で $\wedge$ が《または》の意味をもつことになってしまう.

命題論理の論理式の意味論といっても, ここで扱うのは, このように単純な規則にのっとった計算にもとづくものである.

1.2 充足可能性・整合性

定義 1.2. 論理式 A と解釈 I について $[\![A]\!]_I = \top$ であるとき, I は A を**充足する**(to satisfy) という. 解釈 I が論理式の集合 Γ を充足するというのは, Γ に属するすべての論理式を I が充足することをいう. そのような解釈が少なくとも一つ存在するなら Γ は**充足可能**な集合であるという. ◀

定義 1.3. 論理式の集合 Γ が**整合的** (consistent) であるとは, Γ の任意の有限部分集合が充足可能であることをいう. ◀

あきらかに, 充足可能な集合は整合的である. その逆はどうか...?

論理式の集合 Γ が充足可能であるかどうかという問題は, **整合性を保ったまま Γ を極大な集合へと拡大できるか**, と言い替えてもよい. このことを説明しよう.

まず, 論理式の集合 Γ が充足可能だったとしよう. 解釈 I が Γ を充足していたとして,

$$\Gamma^* = \{ A : [\![A]\!]_I = \top \}$$

とおこう. Γ^* は解釈 I によって充足される論理式全体であるからこれも充足可能, したがって整合的である.

論理式 A が Γ^* に属さないときは, $[\![A]\!]_I = \bot$ したがって $[\![\neg A]\!]_I = \top$ だから $\neg A$ が Γ^* に属しているはずである. ということは, Γ^* を真に含む論理式の集合 $\Theta \supsetneq \Gamma^*$ は, ある論理式 A とその否定 $\neg A$ の両方を含むことになる. $\{A, \neg A\}$ は充足可能ではないから, そのような Θ は整合的でない.

つまり, 充足可能な集合 Γ は,

(m1) 論理式の集合 $\varGamma^*$ は $\varGamma$ を含む;
(m2) $\varGamma^*$ は整合的である;
(m3) $\varGamma^*$ を真に含む論理式の集合はどれも整合的でない

という意味で極大な整合的集合 $\varGamma^*$ へと拡大できることになる.

逆に, $\varGamma$ を含み極大な整合的集合 $\varGamma^*$ が存在したとしよう. つまり (m1)–(m3) が成立しているものとしよう. すると, そのような $\varGamma^*$ は自分自身を充足する解釈を唯一つ定めることが次のようにしてわかる.

補題 1.4. 論理式の集合 $\varGamma^*$ は条件 (m2) と (m3) をみたすとする. このとき, 任意の論理式 A と B について次のことが成立する

(m4) $A \notin \varGamma^* \Leftrightarrow \neg A \in \varGamma^*$;
(m5) ($A \in \varGamma^*$ かつ $B \in \varGamma^*$) $\Leftrightarrow A \wedge B \in \varGamma^*$;
(m6) ($A \in \varGamma^*$ または $B \in \varGamma^*$) $\Leftrightarrow A \vee B \in \varGamma^*$;
(m7) ($A \notin \varGamma^*$ または $B \in \varGamma^*$) $\Leftrightarrow A \to B \in \varGamma^*$.

証明 セクション 8. ◀

いま, 解釈 $I : \mathbb{P} \to \{\top, \bot\}$ を

$$I(p) = \top \ \Leftrightarrow \ p \in \varGamma^*$$

によって定めれば, (m4)–(m7) によって $[\![A]\!]_I = \top \Leftrightarrow A \in \varGamma^*$ となる. このとき I は $\varGamma^*$ を充足する解釈になっている. またこの同値性から, 先ほどと同様の議論により, I は $\varGamma^*$ を充足するただ一つの解釈である.

こうして, 論理式の集合 $\varGamma$ を充足する解釈をみつけることは, とりもなおさず $\varGamma$ を極大整合的集合へと拡大することである.

1.3 いかにして極大化するか

論理式の整合的な集合 $\varGamma$ が与えられたとしよう.

◆可算の場合: 命題変数の集合 $\mathbb{P}$ が可算集合である場合, 論理式全体の集合も可算集合となるから, すべての論理式を

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

と一列にリストアップできる. まず $\varGamma_0 = \varGamma$ とする. $\varGamma_n$ が定まったら $\varGamma_n \cup \{A_n\}$ が整合的かどうかチェックし, 整合的であるなら $\varGamma_{n+1} = \varGamma_n \cup \{A_n\}$ とする. $\varGamma_n \cup \{A_n\}$ が整合的でなければ $\varGamma_{n+1} = \varGamma_n \cup \{\neg A_n\}$ とする. この要領で

$$\varGamma_0 \subset \varGamma_1 \subset \cdots \subset \varGamma_n \subset \cdots$$

をどんどん作っていって,

$$\varGamma^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} \varGamma_n$$

とおく. 確かめるべきことがふたつある.

補題 1.5. 論理式の集合 $\varGamma^*$ は整合的である.

証明 集合 $\mathit{\Gamma}^*$ の有限部分集合 $\mathit{\Delta}$ が任意に与えられたとする．番号 n を十分大きくとれば $\mathit{\Delta} \subset \mathit{\Gamma}_n$ となるので, 各 $\mathit{\Gamma}_n$ が整合的であることをチェックすればいい．数学的帰納法でやる．$n = 0$ のときは仮定から $\mathit{\Gamma}$ が整合的で $\mathit{\Gamma}_0 = \mathit{\Gamma}$ であるからよい．つぎに帰納法の仮定として $\mathit{\Gamma}_k$ が整合的だったとしよう．$\mathit{\Gamma}_{k+1}$ を作るには $\mathit{\Gamma}_k$ に A_k または $\neg A_k$ を追加するわけだが, $\neg A_k$ が追加されるのは $\mathit{\Gamma}_k \cup \{A_k\}$ が整合的でない場合であった．$\mathit{\Gamma}_k \cup \{A_k\}$ が整合的でないとすると, なにか有限部分集合 $\mathit{\Delta}' \subset \mathit{\Gamma}_k$ を $\mathit{\Delta}' \cup \{A_k\}$ が充足不可能になるようにとれる．$\mathit{\Gamma}_k$ は整合的なのだからその有限部分集合 $\mathit{\Delta} \cup \mathit{\Delta}'$ は充足可能で, これを充足する解釈 J がとれる．ところがこの解釈 J が $\mathit{\Delta}' \cup \{A_k\}$ を充足しない．J は $\mathit{\Delta} \cup \mathit{\Delta}'$ を充足するのに $\mathit{\Delta}' \cup \{A_k\}$ を充足しないというのだから, つまり A_k を充足しないわけで, $[\![A_k]\!]_J = \bot$ したがって $[\![\neg A_k]\!]_J = \top$ である．このとき J は $\mathit{\Delta} \cup \{\neg A_k\}$ を充足する．この $\mathit{\Delta}$ は $\mathit{\Gamma}_k$ の任意の有限部分集合だったので, $\mathit{\Gamma}_k \cup \{\neg A_k\}$ は整合的である．こうして $\mathit{\Gamma}_k \cup \{A_k\}$ または $\mathit{\Gamma}_k \cup \{\neg A_k\}$ の少なくとも一方は整合的となる．このことから $\mathit{\Gamma}_{k+1}$ も整合的である．◀

補題 1.6. 論理式の集合 $\mathit{\Gamma}^*$ を真に含む論理式の集合は整合的でない．つまり, $\mathit{\Gamma}^*$ は極大である．

証明 任意に論理式 A が与えられたとしよう．この A は全論理式のリスト

$$A_0, A_1, A_2, \ldots$$

のどこかに登場するはずだ．それが A_n だったとしよう．すると $A_n \in \mathit{\Gamma}_{n+1}$ または $\neg A_n \in \mathit{\Gamma}_{n+1}$ の, 少なくとも一方が成立する．したがって, $\mathit{\Gamma}^*$ には A かその否定 $\neg A$ のいずれかが必ず属している．とくに, $A \notin \mathit{\Gamma}^*$ だったら $\neg A \in \mathit{\Gamma}^*$ のはずであるから, $\mathit{\Gamma}^* \cup \{A\}$ は充足不可能な有限集合 $\{A, \neg A\}$ を含むことになって, もはや整合的でない．◀

◆可算でない場合: $\mathbb{P}$ が不可算集合である場合には, 論理式の全体も不可算になる．このような場合に, 可算の場合と同様の, 各ステップで論理式をひとつずつ処理しつつ集合拡大していく論法を, 利用できるだろうか.

そのためには, 不可算個の論理式を一列に並べて, “まだ処理されていない論理式のうち先頭にあるもの” がどの段階でも常にただ一つ決まる状態を実現しないといけない．これは集合論の言葉でいえば, **論理式の全体を整列させて, 超限帰納法をもちいる**ということである．このことは

すべての集合が整列順序づけ可能である

という《ツェルメロの整列定理》(Ernst Zermelo’s Wellordering Theorem), ひいてはあの《選択公理》(the Axiom of Choice) の力を借りるということである.

また, 整合性が有限部分集合の振舞いに注目して定義されていることを利用して,《ツォルンの補題》(Zorn’s Lemma) を引用して極大整合的集合の存在を保証するというやり方が, こんにちでは主流になっている.

このようにして $\mathbb{P}$ が可算集合のときはほぼ構成的に, またそうでないときはツォルンの補題の力を借りて, 次の定理が証明される.

定理 1.7. (命題論理のコンパクト性) 命題論理の論理式の整合的な集合は充足可能である．◀

次節で, このことをまた別の観点から見てみよう.

2 ストーン位相

解釈全体の集合は写像の集合 ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ であるが, この節ではこれを $\mathscr{X}$ と書くことにする．この集合 $\mathscr{X}$ に論理式の真理値によって定まる位相を入れて位相空間にしてしまう.

定義 2.1. 論理式 A に対してそれを充足する解釈の全体を N_A と書く:

$$N_A = \{ I \in \mathcal{X} : [\![A]\!]_I = \top \}. \blacktriangleleft$$

すると, 真理値の定義によって, 論理記号の論理演算と集合の演算の対応がつくことになる:

補題 2.2. 任意の論理式 A と B について

(1) $N_A \cap N_B = N_{A \wedge B}$;
(2) $N_A \cup N_B = N_{A \vee B}$;
(3) $\mathcal{X} \setminus N_A = N_{\neg A}$. ◀

定義 2.3. 解釈の集合 $U \subset \mathcal{X}$ が次の条件をみたすとき, これを (ストーン位相の) **開集合**とよぶ: 任意の要素 $I \in U$ に対してある論理式 A が存在して $I \in N_A \subset U$ となる. ◀

補題 2.4. 定義 2.3 の意味での開集合について次のことが成立する:

(O1) $\mathcal{X}$ 全体と空集合は開集合;
(O2) ふたつの開集合の共通部分はまた開集合;
(O3) 開集合からなる任意の集合族の和集合はまた開集合. ◀

つまり, 定義 2.3 のとおりに開集合という言葉の意味を定めることで $\mathcal{X}$ が位相空間になる. この位相空間では, 開集合とはつまり N_A の形の集合の和集合のことである. 補題 2.2 により, N_A の補集合もまた開集合であるから, 各 N_A は開集合であると同時に閉集合でもある **開閉集合** (clopen set) である.

さて, 論理式の集合 $\varGamma$ を充足する解釈の全体を $\mathcal{F}_\varGamma$ と書けば

$$\mathcal{F}_\varGamma = \bigcap_{A \in \varGamma} N_A$$

であるが, 各 N_A は閉集合でもあったから, $\mathcal{F}_\varGamma$ は閉集合である. 定義により

$$\varGamma \text{ が充足可能 } \Leftrightarrow \mathcal{F}_\varGamma \neq \emptyset$$

である. では $\varGamma$ が整合的であることはどのように表現されるだろうか.

集合 $\varGamma$ から有限個選んだ論理式 $A_0, \ldots, A_n$ を同時に充足する解釈とは $N_{A_0} \cap \cdots \cap N_{A_n}$ の共通要素ということだから, $\varGamma$ が整合的であるということを, 集合族 $\{ N_A : A \in \varGamma \}$ から任意に有限個選んだメンバーが必ず空でない共通部分をもつこと, と言いかえてもよい.

この「任意の有限部分が共通要素をもつ」という条件を集合族の**有限交叉性** (finite intersection property) と呼ぶ. そこで,

$$\varGamma \text{ が整合的 } \Leftrightarrow \text{ 集合族 } \{ N_A : A \in \varGamma \} \text{ は有限交叉性をもつ.}$$

この読み替えによって, 「論理式の整合的な集合は充足可能である」という命題論理の性質を, ストーン位相空間 $\mathcal{X}$ の位相的性質の言葉で表現できる.

定理 2.5. 位相空間 $\mathcal{X}$ はコンパクトである. すなわち, $\mathcal{X}$ の閉集合の有限交叉性をもつ集合族は共通要素をもつ. ◀

補題 2.6. 空間 $\mathcal{X}$ の任意の閉集合 F に対して, F に属する解釈すべてが充足する論理式の全体を Γ とすると $F = \mathcal{F}_\Gamma$ が成立する.

証明 定義から次の等式が成立する:

$$\Gamma = \{\, A : F \subset N_A \,\}.$$

だから $F \subset \mathcal{F}_\Gamma$ となることはすぐわかる. いっぽう, 補集合 $\mathcal{X} \setminus F$ が開集合であることから, I が F に属さないとすれば, ある論理式 A について

$$I \in N_A \subset \mathcal{X} \setminus F$$

が成立する. このとき $F \subset N_{\neg A}$ より $\neg A \in \Gamma$ である. ところが $[\![A]\!]_I = \top$ より $[\![\neg A]\!] = \bot$ で I は $\neg A$ を充足しない. したがって $I \notin \mathcal{F}_\Gamma$ である. したがって $\mathcal{F}_\Gamma \subset F$ が成立する. ◀

さて, 空間 $\mathcal{X}$ の閉集合からなる有限交叉性をもつ集合族 $\{\, F_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ が与えられたとしよう. 各 F_λ に対し補題 2.6 に述べたように

$$\Gamma_\lambda = \{\, A : F_\lambda \subset N_A \,\}$$

と定め, それら全部の和集合 $\Gamma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \Gamma_\lambda$ を考える.

補題 2.7. 上のように定められた論理式の集合 Γ は整合的である.

証明 有限個の論理式 $A_0, \ldots, A_n \in \Gamma$ が任意に与えられたとする. すると $A_0 \in \Gamma_{\lambda_0}, \ldots, A_n \in \Gamma_{\lambda_n}$ となるように添字 $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ がとれる. $\{\, F_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ は有限交叉性をもつので, $F_{\lambda_0} \cap \cdots \cap F_{\lambda_n}$ の共通要素 I がある. Γ_λ の定義から $F_{\lambda_0} \subset N_{A_0}, \ldots, F_{\lambda_n} \subset N_{A_n}$ であるから $I \in N_{A_0} \cap \cdots \cap N_{A_n}$ であり, I は $A_0, \ldots, A_n$ を同時に充足する解釈である. ◀

定理 1.7 により, 論理式の集合 Γ は充足可能である. そこで Γ を充足する解釈をとれば, それが集合族 $\{\, F_\lambda : \lambda \in \Lambda \}$ の共通要素ということになる. こうして定理 2.5 が証明できた.

いまは命題論理のコンパクト性から $\mathcal{X}$ のコンパクト性を導いたが, 逆に $\mathcal{X}$ のコンパクト性がわかっていれば, 論理式の整合的な集合 Γ について, 開閉集合の有限交叉性をもつ族 $\{\, N_A : A \in \Gamma \,\}$ の共通要素の存在がいえて Γ が充足可能とわかる. このように, $\mathcal{X}$ のコンパクト性は命題論理のコンパクト性の別表現になっている.

こんどは位相空間 $\mathcal{X}$ についてもう少し調べてみよう. 空間 $\mathcal{X}$ は集合としては ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ であり, これは $\{\top, \bot\}$ という二元集合のコピーの直積集合と考えることができる. いま $\{\top, \bot\}$ には離散位相を与え, ${}^{\mathbb{P}}\{\top, \bot\}$ にはその直積位相を与えたとしよう. 一般の直積位相についてはサブセクション 5.2 で論じる.

定義 2.8. 解釈 $I : \mathbb{P} \to \{\top, \bot\}$ と命題記号の有限集合 $s \subset \mathbb{P}$ に対して, s 上で I と一致する解釈の全体を $U_s(I)$ と書く:

$$U_s(I) = \{\, J : \mathbb{P} \to \{\top, \bot\} : J(p) = I(p) \quad (p \in s) \,\}. \quad ◀$$

補題 2.9. 解釈の集合 $W \subset \mathcal{X}$ が直積位相の開集合であるための必要十分条件は, 任意の $I \in W$ についてある有限集合 $s \subset \mathbb{P}$ が存在して $U_s(I) \subset W$ となることである. ◀

補題 2.10. 各有限集合 $s \subset \mathbb{P}$ と解釈 I について, $U_s(I)$ はストーン位相の開集合である.

補題 2.11. 各論理式 A について, N_A は直積位相の開集合である.

この二つの補題により,

定理 2.12. 解釈の空間 $\mathcal{X}$ 上のストーン位相は直積位相と一致する. ◀

当初われわれは $\mathcal{X}$ のストーン位相に命題論理の意味論という観点に傾いた意味づけをしていたが, 実はそれは表面上のことであり, 実際にはストーン位相は位相空間論的に最も自然な直積位相にほかならず, われわれの位相空間 $\mathcal{X}$ は命題変数の全体 $\mathbb{P}$ を添字集合とする一般カントール空間なのだった.

3 環の素イデアル

整数や多項式のように演算できるシステム, 足し算と引き算と掛け算ができるシステムのことを環 (かん) と呼ぶ. 環とイデアルの定義はサブセクション 6.1 を参照. 以下, 環と言ったら乗法の単位元 1 をもつ可換な環のことだとする.

定義 3.1. 環 R の自明でないイデアル A が

$$a \notin A,\ b \notin A \ \Rightarrow\ ab \notin A \qquad (a, b \in R)$$

をみたすとき, **素イデアル**[*3] (prime ideal) と呼ばれる. ◀

素イデアルのイメージをつかむには整数の環 $\mathbb{Z}$ での例を考えるのがよい. サブセクション 6.1 で言ったとおり, $\mathbb{Z}$ のイデアルはある数の倍数全体の集合になるが, 整数 a の倍数全体のなすイデアルが素イデアルになるためには, a が素数であることが必要かつ十分である. 一般の環では, イデアルがなんらかの要素の倍元全体と一致するとは限らない. そのような状況で整数の環の素数の役割を担うのは, 素数の定義をそのまま引き継いだ《素元》ではなく, むしろ素イデアルのほうだ. このことひとつとっても, 環の理論における素イデアルの重要性はうかがえよう.

実は, **あらゆる環はすくなくともひとつ素イデアルをもつ.** 代数学の普通のコースでは, このことはツォルンの補題を用いた極大イデアルの存在証明のコロラリーとして得られる. ここでは, 直積空間 ${}^R\{0,1\}$ のコンパクト性から環の素イデアルの存在を導く.

定理 3.2. R を単位元をもつ可換な環とする. 離散空間 $\{0,1\}$ の R を添字集合とする直積位相空間 ${}^R\{0,1\}$ がコンパクトであれば, R の素イデアルが存在する.

R の任意の部分集合 A に対して, その特徴関数 $c_A : R \to \{0,1\}$ を, $a \in A$ のとき $c_A(a) = 1$, そうでないとき $c_A(a) = 0$ と定める. 逆に函数 $\xi : R \to \{0,1\}$ に R の部分集合 $\xi^{-1}(\{1\}) = \{\, a \in R : \xi(a) = 1 \,\}$ を対応させることができる. これによって R の部分集合を R から $\{0,1\}$ への写像と, 言い換えれば直積空間 ${}^R\{0,1\}$ の点と, 同一視できる. ${}^R\{0,1\}$ の点 ξ に対応する R の部分集合 $\xi^{-1}(\{1\})$ が R の自明でないイデアルになっているためには,

(1) $\xi(0_R) = 1$;
(2) $\xi(1_R) = 0$;
(3) すべての $r_1, r_2, a_1, a_2 \in R$ について $\xi(a_1) = 0$ または $\xi(a_2) = 0$ または $r_1a_1 + r_2a_2) = 1$

という条件をみたせばよいので, 自明でないイデアルに対応する点の全体は ${}^R\{0,1\}$ の閉集合になっている. この閉集合を $\mathcal{I}$ と書くことにしよう.

*3 《素うどん》は「すうどん」ですが《素イデアル》は「そいである」です.

環 R の要素の任意のペア $a,b\in R$ に対して ${}^R\{0,1\}$ の部分集合 $F_{a,b}$ を

$$F_{a,b}=\left\{\,\xi\in\mathcal{I}\,:\,\xi(a)=1\ \text{または}\ \xi(b)=1\ \textbf{または}\ \xi(ab)=0\,\right\}$$

によって定義する．$F_{a,b}$ は ${}^R\{0,1\}$ の閉集合である．この集合はこのふたつの要素 a と b について

$$a\in A\ \text{または}\ b\in A\ \text{または, どちらでもなければ}\ ab\notin A$$

という条件をみたす自明でないイデアル A 全体のなす集合に対応する．ところが素イデアルとはこの条件をすべての要素 $a,b\in R$ についてみたすような自明でないイデアルのことだったから, 素イデアルの存在を示すためには

$$\bigcap_{a,b\in R}F_{a,b}\neq\emptyset$$

を示せばよい．そしてこのことは, 各 $F_{a,b}$ がコンパクト空間 ${}^R\{0,1\}$ の閉部分集合であることと, 次の補題から直ちにわかる．

補題 3.3. 集合族 $\{\,F_{a,b}\,:\,a,b\in R\,\}$ は有限交叉性をもつ．

証明 有限個の要素 $a_0,\dots,a_m\in R$ と $b_0,\dots,b_n\in R$ が任意に与えられたとして, すべての F_{a_i,b_j} に共通の要素があることを示せばよい．そのために, 部分集合 $S\subset\{\,a_0,\dots,a_m,b_0,\dots,b_n\}$ によって生成されたイデアル A_S を考える．A_S は S の要素の倍元のいくつかの和で書けるような要素の全体:

$$S=\left\{\,r_0s_0+\cdots+r_\ell s_\ell\,:\,r_i\in R\,s_i\in S,\ \ell=0,1,2,\dots\right\}$$

である．集合 S の選びかたは高々有限とおり (2^{m+n+2} とおり以下) である．対応する A_S も全部で有限個しかない．S として空集合をとれば $A_\emptyset$ は $\{0_R\}$ だから自明でないイデアルになっている．だから A_S のうちには自明でないものが少なくともひとつあり, 全部で有限個しかないのだから, それらのうちで他の自明でない A_S に含まれないものが存在する．いま A_{S_0} をそのようなイデアル, ξ をそれに対応する ${}^R\{0,1\}$ の要素としよう．a_i, b_j に対して, もしも $a_i\in A_{S_0}$ または $b_j\in A_{S_0}$ なら $\xi\in F_{a_i,b_j}$ である．そこで $a_i\notin A_{S_0}$ かつ $b_j\notin A_{S_0}$ の場合を考えよう．ra_i+x ($r\in R$, $x\in A_{S_0}$) の形の要素全体は $A_{S_0\cup\{a_i\}}$ であり, これは A_{S_0} より真に大きいから自明なイデアルである．そこで $ra_i+x=1_R$ をみたす $r\in R$ と $x\in A_{S_0}$ がとれる．このとき

$$b_j=b_j(ra_i+x)=ra_ib_j+b_jx$$

より

$$b_j-ra_ib_j=b_jx\in A_{S_0}$$

となる．ところが $b_j\notin A_{S_0}$ だから $ra_ib_j\notin A_{S_0}$ したがって $a_ib_j\notin A_{S_0}$ となる．これを函数 ξ の言葉で言えば, $\xi(a_i)=\xi(b_j)=1$ のとき $\xi(a_ib_j)=1$ であるということだから, $\xi\in F_{a_i,b_j}$ である．こうして, ξ はすべての F_{a_i,b_j} の共通要素であることがわかった．◀

こうして環の素イデアルの存在が位相空間 ${}^R\{0,1\}$ のコンパクト性に帰着された．いっぽう, セクション 7 で示すとおり, ${}^R\{0,1\}$ のコンパクト性はブール代数における超フィルターの存在から導かれる．ところがブール代数における超フィルターの存在は, ブール環における素イデアルの存在の言い換えにすぎない．

4　まとめ

本稿では

- 命題論理のコンパクト性
- 一般カントール空間のコンパクト性
- 可換環の素イデアルの存在
- ブール代数の超フィルターの存在
- ハウスドルフ空間に制限したチコノフの定理

といった数学的命題のそれぞれが, 互いに他の別表現と考えることができ, また, 選択公理のない集合論のもとでは互いに同値な命題となることを確かめた．この同値な命題のことを**素イデアル定理** (Prime Ideal Theorem) と呼ぶ.

数理論理学は数学の論理構造の分析を目的とした論理学の分野として出発したが, それを数学に先立って数学の基礎づけをする営みと考えるよりも, 数学全体のなかにあって他領域と interact する一領域と考えるほうが実り多いだろうと, 筆者は考える. 命題論理と素イデアル定理の絡みあいは, 筆者のそうした考えを支持するひとつの状況証拠である.

5　補足 1: 集合と位相の泥縄式ミニコース

本編で用いた用語の説明をする．定理や補題の形でいろいろな事実を述べるが, たいてい基本的なことばかりなので証明はあんまり書かない．

5.1　集合と写像

集合の記号として特に奇妙なものは使っていないつもりだけれども, 念のため復習すると,

- なにかの対象 x が集合 A の要素であることを $x \in A$ と書く．
- また x が集合 A の要素でないことを $x \notin A$ と書く．
- 集合 A と B がイコールであるのはすべての対象 x について $x \in A$ と $x \in B$ が同値であるときである．
- 集合 A の要素がすべて集合 B の要素でもあるとき, $A \subset B$ と書き, A は B の部分集合である, というたとえば自然数の全体 $\mathbb{N}$ は整数の全体 $\mathbb{Z}$ の部分集合であり, また $\mathbb{Z}$ は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合である．
- $A \subset B$ は $A = B$ である場合を排除しない．それどころか, $A = B$ は ($A \subset B$ かつ $B \subset A$) というのと同値である．
- 何か ◎◎◎ という条件をみたす ▲▲▲ の全体のなす集合のことを

  $$\{\, \blacktriangle\blacktriangle\blacktriangle \;:\; ◎◎◎ \,\}$$

  と書く．たとえば数列

  $$1, 2, 4, \ldots, 2^n, \ldots$$

  にあらわれる数全体のなす集合は

  $$\{\, 2^n \;:\; n \in \mathbb{N} \,\}$$

  である．
- 空集合は $\emptyset$ と書かれる．世界でたったひとつの, いかなる要素をもたない集合．
- 二つの集合 A と B があったとき, $A \cap B$ は A と B の共通部分．両者に共通の要素全体である．たとえば

  $$A = \{\, 0, 2, 4, 6, \ldots, 2k, \ldots \},\ B = \{\, 0, 3, 6, 9, \ldots, 3\ell, \ldots \}$$

  のとき (2 で割れて 3 で割れるというのは 6 で割れるということだから)

  $$A \cap B = \{\, 0, 6, 12, \ldots, 6m, \ldots \}$$

  ということになる．
- また $A \cup B$ は A と B の和集合．すなわちどちらか (あるいは両方) の要素になっているもの全体である．たとえば, 整数の全体は偶数の全体と奇数の全体の和集合である．
- 集合を要素とする集合を集合族という．集合 $\mathcal{A}$ のメンバーがすべて固定されたある集合 X の部分集合であるとき, $\mathcal{A}$ のことを X の部分集合族といったりする．

- 集合族 $\mathcal{A}$ のすべてのメンバーに共通に属している要素全体からなる集合を $\mathcal{A}$ の共通部分といい $\bigcap\mathcal{A}$ と書く:
$$\bigcap\mathcal{A} = \{\, x : \text{すべての } A \in \mathcal{A} \text{ について } x \in A \,\}.$$
- また, 集合族 $\mathcal{A}$ のどれか一つ以上のメンバーに属している要素全体からなる集合を $\mathcal{A}$ の和集合といい $\bigcup\mathcal{A}$ と書く:
$$\bigcup\mathcal{A} = \{\, x : \text{ある } A \in \mathcal{A} \text{ について } x \in A \,\}.$$
- 二つの対象 a と b の順序対を $\langle a, b\rangle$ と書く. A の要素と B の要素の順序対の全体を
$$A \times B = \{\, \langle a, b\rangle : a \in A,\ b \in B \,\}$$
と書いて A と B の直積またはデカルト積という.
- 実数の全体, 整数の全体, 自然数の全体をそれぞれ
$$\mathbb{R},\quad \mathbb{Z},\quad \mathbb{N}$$
であらわす.

◆ **写像:** 集合 X から集合 Y への**写像** (mapping) とは, X の要素に対して集合 Y のなんらかの要素を一つ対応させる仕組みのことである. ある写像で特定の $x \in X$ に対応させられる Y の要素はちょうど一つなければならない. 対応する Y の要素が全然ない状況や二つ以上ある状況は許されない. いっぽう, X から Y への写像においては, 一つの Y の要素が複数の X の要素に対応させられるのはいっこうに構わないし, X の要素に対応しない Y の要素があってもかまわない. たとえばの話…

伊予鉄道郊外電車

伊予鉄郊外電車郡中線上り電車の終着駅である松山市駅にたったいま到着した電車に, たとえば 50 人の乗客が乗っているとしよう. ある乗客の上半身と下半身が別の駅から乗ってきて車内で合体したなどというはずはないので, どの乗客もある一つの駅から乗車してきたはずだ. したがって, いまこの電車から降りようとしている 50 人の乗客ひとりひとりに, その乗ってきた駅を対応させると, この 50 人の人の集合 X から伊予鉄道郡中線の駅全体の集合 Y への写像が得られる. 鎌田や地蔵町がしばしばそうであるように誰も乗ってこない駅もあれば, 松前のように複数の人が乗ってくる駅もある.

対応 f が集合 X から Y への写像であるということを $\boldsymbol{f : X \to Y}$ と表記する. 先ほど言ったとおり, これは X の各要素に Y のなんらかの要素を一つ対応させる仕組みを f が与えてくれるという意味であった. f によって X の要素 x に対応させられる Y のただ一つの要素を $f(x)$ と書き, $\boldsymbol{x}$ **における** $\boldsymbol{f}$ **の値**という. 矢印の出発点 X をこの写像の**定義域** (domain) という. ところが集合論の習慣では矢印の向う先にある Y をあまり固定して考えたがらない[*4]. そのせいか, $f : X \to Y$ のときの Y を f の何と呼ぶか, 確立された呼び名がないが, 余域 (codomain) とかターゲット (target) といった呼びかたをする場合がある.

なお, 二つの写像が “等しい” ということをどう考えるかにも, 二つの考え方がある. 集合論においては, f と g の定義域が集合として同じであり, かつまた定義域のすべての要素 x において値 $f(x)$ と $g(x)$ が一致す

[*4] 代数学ではそんなことはなくて, たとえば群なら群の準同型写像がどの群で定義されているのかということ同様, どの群へ向っているのかということにも, 常に注意が払われています.

るとき, $f = g$ ということにする．しかし代数学や圏論などでは, この定義ではターゲットにかんする情報が欠落してしまうことを嫌い, さらにターゲットが一致することまで要求する．たとえば線型写像を行列で表示しようなどと思えば, 行列のサイズにターゲットの情報が反映されるはずだから, どの空間をターゲットと思っているのか, たしかに無視はできない．

◆ **像と逆像:** 写像 $f : X \to Y$ が与えられたとする．部分集合 $A \subset X$ の写像 f による**像** (image) とは, 集合

$$f(A) = \{\, f(x) \,:\, x \in A \,\}$$

のことである．公理的集合論などでは, ある集合の要素がまた部分集合でもあるケースがザラにあるので, 値 $f(x)$ と像 $f(A)$ が同じ記法で表わされているのは, 実はたいへん具合が悪い．そのような場合には, 像を $f[A]$ とブラケット記法で表わしたり **ダブルフック記法** $f``A$ で表記したりする．

写像 $f : X \to Y$ のターゲット Y の部分集合 $B \subset Y$ の f による**逆像** (inverse image) とは, 集合

$$f^{-1}(A) = \{\, x \,:\, x \in X,\ f(x) \in B \,\}$$

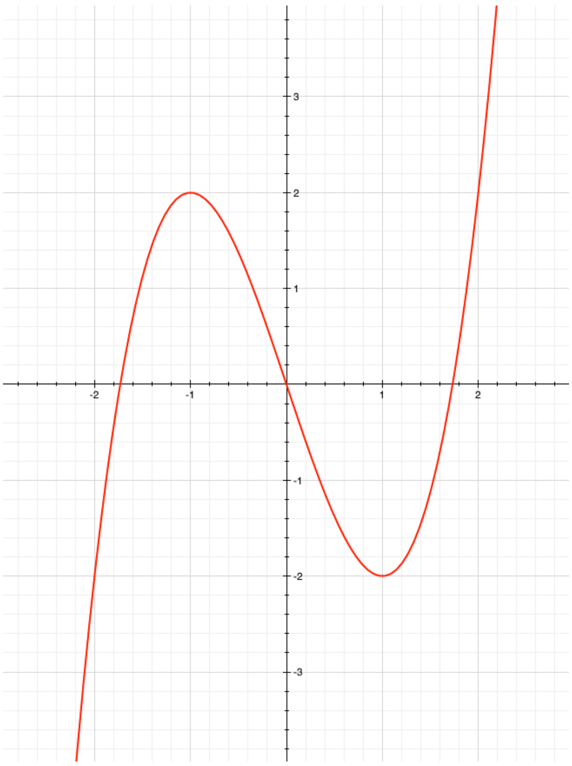
のことである．像の場合と同様, これは $f^{-1}[B]$ とか $f^{-1}``B$ とか書くほうがよいし, 実を言うとあとでいう逆写像を連想させる f^{-1} という記法もよくない．それで $f^{\leftarrow}[B]$ のように書いている本もある．

◆ **全射と単射:** 写像 $f : X \to Y$ による定義域 X の像 $f``X$ のことを f の**値域** (range) とよぶ．値域がターゲット全体であるとき, 写像 f は**全射** (surjection) であるという．ところが先ほど言ったとおり集合論では写像のターゲットを固定して考えない場合が多いので, 全射と言っただけでは何を言っているのかはっきりしない憂いがある．このため, 全射 $f : X \to Y$ のことをまた **Y の上への写像** (mapping *onto* Y) と言ったりする．

さきほど電車の乗客と乗ってきた駅の関係を例にとって述べたとおり, 写像 $f : X \to Y$ によって定義域 X のそれぞれの要素に対応させられるターゲット Y の要素は一つに決めなければならないが, Y の要素に f によって対応する X の要素は複数あってもいいし全然なくてもいい．とくに Y のどの要素にもすくなくともひとつの X の要素が対応する, というのが f が全射ということだった．この場合は Y のひとつの要素に X の要素が複数対応してもいい．

右に掲げるのは $f(x) = x^3 - 3x$ で決まる函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ のグラフだ． 一般に三次式は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への全射を与える．ターゲットの要素のうち $-2 \leq y \leq 2$ をみたす y については, $y = f(x)$ をみたす x が二つ以上存在する．

注: このグラフは iPhone/iPad アプリ Quick Graph で描いたもの．すうがく徒にはおすすめ．iOS ユーザのみなさんはぜひどうぞ．



写像 $f : X \to Y$ でターゲット Y の各要素に決して二つ以上の定義域 X の要素が対応しないなら, f は**単射** (injection) と呼ばれる. つまり

$$x_1 \neq x_2 \text{ ならば } f(x_1) \neq f(x_2)$$

が定義域のすべての要素 x_1 と x_2 について成立することをいう. 単射はまた**一対一の写像** (one-to-one mapping) とも呼ばれる.

写像 $f : X \to Y$ が全射でありかつ単射でもある, という状況を考えよう. このときは, Y のあらゆる要素 y に対して $y = f(x)$ をみたす X の要素 x があり (f が全射だから), しかもそのような x は二つ以上ない (f が単射だから). つまり Y の各要素 y に $y = f(x)$ をみたすただ一つの X の要素 x を対応させることができ, この対応が Y から X への写像になる. この写像を $f^{-1} : Y \to X$ とあらわして ***f* の逆写像** (inverse of f) と呼ぶ. 全単射 f とその逆写像のあいだには, あきらかに

$$\text{すべての } x \in X \text{ について } f^{-1}(f(x)) = x$$
$$\text{すべての } y \in Y \text{ について } f(f^{-1}(y)) = y$$

となっている. 全単射 f の逆写像 f^{-1} も全単射で, そのまた逆写像 $(f^{-1})^{-1}$ は f に一致する.

◆ **写像の合成と恒等写像:** 集合 X から Y への写像 $f : X \to Y$ と Y から第三の集合 Z への写像 $g : Y \to Z$ が与えられているとき, X の要素 x に Z の要素 $g(f(x))$ を対応させる写像が考えられる. これを $g \circ f$ と書いて写像 f と g の**合成** (composition) 写像という. $g \circ f$ と先に働くはずの f のほうが右にくるのは少々まぎらわしいが, $(g \circ f)(x)$ と $g(f(x))$ の対応を尊重したためなのだろう.

二つめの写像 g のターゲット Z からさらに三つめの写像 $h : Z \to W$ があれば, 二度めの乗り継ぎをして $x \in X$ に $h(g(f(x)))$ を対応させる写像が得られるが, 合成の定義から言ってこれは $h \circ (g \circ f)$ の x における値でもありまた $(h \circ g) \circ f$ の x における値でもある. このことから**写像の合成の結合律**

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

が得られる.

すべての集合 X は各要素にその要素自身を対応させる **恒等写像** (identity mapping) という特別な写像をもっている. 恒等写像を表わすのに, $\mathrm{id}_X : X \to X$ と書いたり, $1_X : X \to X$ と書いたりする. 恒等写像の特徴はそれが写像の合成にさいして単位元のように振舞うところにある. つまり任意の写像 $f : X \to Y$ について

$$f \circ 1_X = f, \qquad 1_Y \circ f = f$$

となるわけだ. 全単射 $f : X \to Y$ と逆写像 f^{-1} との関係は恒等写像を使って, あたかもにおける逆元のように

$$f^{-1} \circ f = 1_X, \qquad f \circ f^{-1} = 1_Y$$

と書ける. (もちろん, 群論との類似は偶然ではない.)

◆ **直積集合と選択公理:** ふたつの対象 a と b があったときこれらをペアにした**順序対** (ordered pair) $\langle a, b \rangle$ を考えることがよくある.[*5] 順序対で大事なのは $\langle a, b \rangle$ の左側の成分が a で右側の成分が b と, 左右の順も考

[*5] 公理的集合論では順序対を表わすのにこのようにトガッたカッコを使うことが多いのです. それ以外の分野では順序対も丸いカッコで (a, b) と書くのが一般的ですが, そうでなくても “(” と “)” のコンビは, 開区間やらなんやかや, あちこちに露出しすぎです. たまには休ませてあげないと, しまいにはお互い, 何が何やらわからなくなりそうです.

慮するところ．同じ対でも集合 $\{a,b\}$ で実現される無順序対とは, そこが大きく違う．そこで

$$\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle \iff a=b$$
$$\langle a,b\rangle = \langle c,d\rangle \iff a=c \text{ かつ } b=d$$

となっている．順序対については, 集合論では

$$\langle a,b\rangle = \bigl\{\{a\},\{a,b\}\bigr\}$$

と定義するとか, 二項関係や写像も一般に順序対の集合と考えるとか, いろいろ固有の流儀があるのだけど, ここではそのあたりにはあまり深入りせず, どうやって実現するか (順序対の実装?) はともかく, 二つのものを順序対にする方法が与えられているとしよう．

集合 A の要素と集合 B の要素をそれぞれ左と右に入れて作った順序対の全体を $A\times B$ と書いて, A と B の**直積** (direct product) あるいは**デカルト積** (cartesian product) という:

$$A\times B = \bigl\{\,\langle a,b\rangle \,:\, a\in A,\ b\in B\,\bigr\}.$$

デカルト積という名は, 平面上で直交する 2 直線を使って平面上の点を二つの数 x と y の対で表示することを思いついた, あのデカルトに由来すると言われている．二つの集合の直積ができれば, それの繰り返しで有限個の集合の直積

$$A_0\times A_1\times\cdots\times A_n$$

を考えることができる．細かいことを言えば, この書き方では, たとえば $A\times B\times C$ とは $A\times(B\times C)$ のことか $(A\times B)\times C$ のことかという問題が発生するのだが, $\langle a,\langle b,c\rangle\rangle$ を見て $\langle\langle a,b\rangle,c\rangle$ を作ったりまたその逆をいったりすることはほとんど自明な操作なので, 実際にそのことが面倒のタネになる場面というのはあまり考えられない．

このとおり, 有限個の集合の直積はあまり問題がなさそうだ．では無限の直積はどうだろうか．

ある集合 Λ の各要素 $\lambda\in\Lambda$ に, 集合 X_λ が対応しているとしよう．このようなとき**添字つき集合族** (indexed family) $\langle\,X_\lambda \,:\, \lambda\in\Lambda\rangle$ が与えられたといい, Λ をこの集合族の**添字集合** (index set) という[*6]．この添字つき集合族 $\langle\,X_\lambda \,:\, \lambda\in\Lambda\rangle$ のメンバー全部の共通部分と和集合をそれぞれ

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{ と } \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

であらわす．前者はすべての X_λ にもれなく属する共通の要素の全体．後者はどれか一つ以上の X_λ に属する要素の全体というわけだ．

添字集合 Λ を定義域とし和集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ をターゲットとする写像 x が添字つき集合族 $\langle\,X_\lambda \,:\, \lambda\in\Lambda\rangle$ に対する**選択写像** (choice function) であるとは,

$$\text{すべての } \lambda\in\Lambda \text{ について } x(\lambda)\in X_\lambda$$

が成立していることをいう．そして, $\langle\,X_\lambda \,:\, \lambda\in\Lambda\rangle$ に対する選択写像の全体のなす集合を $\langle\,X_\lambda \,:\, \lambda\in\Lambda\rangle$ の**直積**といい

$$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$$

[*6] 形式上は添字つき集合族はもちろん添字集合 Λ を定義域とし,《どこか》をターゲットとする写像なのですが, その《どこか》を明示するのが難しく, かつ, がんばって明示したところでたいして御利益がありません．集合論において写像のターゲットを明確にする習慣がないのには, そういう事情もあるのです．もちろん値域は集合論でも重要なのですが．

であらわす.

ここで $X_\lambda = \emptyset$ となる因子がひとつでもあれば直積 $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ も空になる. ではそれ以外の場合はどうか, つまりすべての λ について $X_\lambda \neq \emptyset$ であった場合に必ず $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$ となるだろうか. 各 X_λ から要素 $x(\lambda) \in X_\lambda$ を取ってきて写像 $x : \Lambda \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ を作ればいいという話なのだが, なにしろ写像であるためには Λ に対応する要素 X_λ を一つに決めねばならず, Λ が無限集合で各 X_λ が二つ以上の要素をもつ場合には, あらかじめなんらかの仕掛けがある特別ラッキーな場合を別にすれば, 無限回の選択を完了させることはできそうにない. それでも

$$\text{すべての } X_\lambda \text{ が空でない限りその積 } \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \text{ も空ではない}$$

というのは自然なことであると思われるので, 集合論においては, この主張自体をひとつの公理として受けいれている. この主張, あるいはそれと同値な次の主張を選択公理 (Axiom of Choice) という:

選択公理: 集合族 $\mathcal{A}$ が $\emptyset \notin \mathcal{A}$ をみたすとき, 写像 $s : \mathcal{A} \to \bigcup \mathcal{A}$ を

$$\text{すべての } A \in \mathcal{A} \text{ について } s(A) \in A$$

なるようにとれる. ◀

選択公理は, 集合についての基礎概念から導出されたりあるいは逆にそれらと矛盾したり, という性質のものではない. 公理的集合論においても他の公理と独立である (だからこそ公理として仮定されている.) 抽象的な数学においては選択公理がないと困ることも多いのだが, いろいろの事情でことさらに選択公理を仮定しない集合論を展開することもある.*7

◆順序構造とツォルンの補題: 順序関係についていろいろの用語の定義.

☆ 集合 X 上の**二項関係** (binary relation) とは, 二つの要素 $a, b \in X$ について $a\mathbf{R}b$ が成立するかしないかが決定する, なにかそういうトリキメ $\mathbf{R}$ のこと.

☆ すべての $a \in X$ について $a\mathbf{R}a$ をみたす二項関係 $\mathbf{R}$ は**反射的** (reflexive) であるという. たとえば数の大小関係 $\leqq$ は反射的.

☆ いかなる $a \in X$ についても $a\mathbf{R}a$ をみたさない二項関係 $\mathbf{R}$ は**非反射的** (irreflexive) であるという. たとえば数の狭義の大小関係 $<$ は非反射的.

☆ いかなる $a, b, c \in X$ についても, $a\mathbf{R}b$ かつ $b\mathbf{R}c$ のとき必ず $a\mathbf{R}c$ となる二項関係 $\mathbf{R}$ は**推移的** (transitive) であるという. 数の大小関係は $\leqq$ も $<$ も推移的.

☆ ふたつの要素 a と b について $a\mathbf{R}b$ のとき必ず $b\mathrm{R}a$ ともなる二項関係は**対称的** (symmetric) であるという. 数の大小関係は $\leqq$ も $<$ も対称的でない. 対象的な関係の例としては, あとでいう位相空間どうしの同相関係や環の同型, 古典幾何でやる図形の合同関係とか相似関係などなどがある.

☆ 反射的かつ推移的かつ対称的であるような二項関係は**同値関係** (equivalence relation) と呼ばれる.

*7 なにしろそのことだけをテーマとしたオフ会が開催されるくらいで, 選択公理について語りだせばキリがありません. くわしくは文献 [1] や [5] などをどうぞ.

☆ 反射的かつ推移的であるような二項関係のことを**擬順序** (quasi-ordering) という．したがってすべての同値関係はまた擬順序でもある．

☆ 二つの要素 a と b が $a\mathbf{R}b$ と $b\mathbf{R}a$ の両方を見たすのは $a = b$ のときに限る，という条件をみたす二項関係 $\mathbf{R}$ は**反対称的** (antisymmetric) であるという．数の大小関係は反対称的．

☆ 反対称的であるような擬順序，すなわち反射的かつ推移的かつ反対称的であるような二項関係のことを**半順序** (partial ordering) という．

☆ 相当関係 (等号) だけが，同値関係であると同時に半順序でもある．

☆ 非反射的かつ推移的な二項関係 $\mathbf{R}$ に対して，

$$a\overline{\mathbf{R}}b \iff a = b \text{ または } a\mathbf{R}b$$

と定義すると，$\overline{\mathbf{R}}$ は半順序になる．逆に半順序 $\mathbf{S}$ に対して

$$a\mathbf{S}'b \iff a \neq b \text{ かつ } a\mathbf{S}b$$

と定義すると，この $\mathbf{S}'$ は非反射的かつ推移的となる．$\mathbf{S}$ から $\mathbf{S}'$ を作る操作は $\mathbf{R}$ から $\overline{\mathbf{R}}$ を作った操作のちょうど逆の操作になっている．これは数の大小の $\leqq$ と $<$ の関係に相当する．この意味で，非反射的かつ推移的な二項関係のことをも半順序と呼ぶことがある．必要とあれば，**反射的半順序**，**非反射的半順序**という言いかたで両者を区別する．

☆ 反射的半順序 $\mathbf{R}$ は，それがさらにすべての二つの要素に順序をつけるなら，つまりすべての $a, b \in X$ について $a\mathbf{R}b$ または $b\mathbf{R}a$ の少なくとも一方が成立するなら，**全順序** (total ordering) と呼ばれる．

☆ 非反射的全順序とはどの二つの要素 a と b についても

$$a\mathbf{R}b \text{ または } b\mathbf{R}a \text{ または } a = b$$

のどれかをみたすような非反射的半順序である．上の三条件のうち二つ以上が同時に成立することはない．

☆ 集合 P 上の二項関係 $\leq$ が (反射的) 半順序であるとき，構造 $(P, \leq)$ をひとつの**半順序集合** (partially ordered set, poset) という．さらに $\leq$ が全順序でもあるならば $(P, \leq)$ は**全順序集合** (totally ordered set) と呼ばれる．

☆ 半順序集合 $(P, \leq)$ の部分集合 $C \subset P$ の任意の二要素が $\leq$ によって比較可能 (すべての $c_0, c_1 \in C$ について $c_0 \leq c_1$ または $c_1 \leq c_0$ の少なくとも一方が成立) であるならば，C を $(P, \leq)$ におけるひとつの**鎖** (chain) とよぶ．

次の命題はハウスドルフの極大原理 (Maximal Principle) と呼ばれ，選択公理と同値な命題であることが知られている:

極大原理: 任意の半順序集合は極大な鎖を含む．ただし C が極大な鎖であるとは，まず C が $(P, \leq)$ における鎖であり，しかもより大きな鎖に含まれない (C を含む鎖は C そのものの他にない) ということである．◀

☆ 選択公理の応用において，ハウスドルフの極大原理で用が足りることが多いが，これをさらに変形したツォルンの補題とタッキーの補題もよく利用される．

☆ 半順序集合 $(P, \leq)$ の部分集合 $S \subset P$ が**上に有界** (bounded above) であるとは, P にある要素 p が存在して

$$\text{すべての } s \in S \text{ について } s \leq p$$

をみたすことである. このような p のことを S の**上界** (upper bound) という. **下に有界** (bounded below) と**下界** (lower bound) も同様に定義される.

☆ 半順序集合 $(P, \leq)$ 要素 m は, 自分より真に大きい要素が存在しないとき, すなわちすべての $p \in P$ について

$$m \leq p \text{ ならば } m = p$$

をみたすとき, $(P, \leq)$ の**極大要素** (maximal element) と呼ばれる.

☆ すべての鎖が上に有界であるような半順序集合のことを**帰納的半順序集合** (inductive poset) と呼ぶ. ツォルンの補題 (Zorn's Lemma) は次の命題である:

ツォルンの補題: 空でない帰納的半順序集合は極大要素をもつ. ◀

☆ 集合 X の 有限 部分集合 s についての任意の性質 $\mathrm{P}(s)$ を考えよう. これに対して, 必ずしも有限でない部分集合 S についての性質 $\mathrm{P}^*(S)$ を

$$\mathrm{P}^*(S) \iff \text{すべての有限な } s \subset S \text{ について } \mathrm{P}(s) \text{ が成立}$$

と定義できる.

たとえば (a) ベクトル空間の部分集合の一次独立性, (b) 半順序集合の部分集合が鎖であること, (c) 確率空間における事象の集合が独立であること, などがそうした性質の例だし, 本論で扱った命題論理の論理式の集合の整合性もまさにそのような例である. このように "任意の有限集合が☆☆☆" という形で定義されるような性質を**有限的な性質** (finitary property) と呼ぶことにしよう. この定義のもとで, タッキーの補題 (Tukey's Lemma) は次のように述べることができる:

タッキーの補題: 集合 X の部分集合の有限的な性質 $\mathrm{P}^*(S)$ を考える. $S \subset X$ を $\mathrm{P}^*(S)$ をみたす任意の集合とすると, $S \subset M$ と $\mathrm{P}^*(M)$ をみたす X の部分集合 M で, 包含関係の意味で極大なものが存在する. ◀

論理式の整合的な集合 Γ を極大整合的集合 Γ^* に拡大する操作などは, このタッキーの補題に訴えるのがもっとも簡明だろう.

☆ ハウスドルフの極大原理, ツォルンの補題, タッキーの補題は互いに同値である. これらはどれも選択公理と同値な命題である.

5.2 位相空間

位相空間についてのいろいろな定義をまとめる. ただし少々杜撰なまとめになってしまった. よりよい参考文献として [2], [3], [7], [8] などがある.

◆ **開集合系としての位相:** まずは型どおり位相空間の定義を述べる.

定義 5.1. 集合族 τ が集合 X 上の**位相** (topology) であるとは, それが次の (O0)–(O3) をみたすことである:

(O0) τ は X の部分集合の集合である;

(O1) 空集合 $\emptyset$ と X 全体は τ のメンバーである;
(O2) A と B が τ のメンバーのとき, その共通部分 $A \cap B$ も τ のメンバーである;
(O3) $\mathcal{S} \subset \tau$ を任意の部分族とし $S = \bigcup \mathcal{S}$ をその和集合とするとき, S は τ のメンバーである. ◀

ここで和集合 $\bigcup S$ というのは

$$x \in S \iff \text{ある } A \in \mathcal{S} \text{ について } x \in A$$

で定められる集合である. 集合族 τ が集合 X 上の位相であるとき, τ のメンバーのことをこの位相の**開集合**という. そこで位相を定めるとはどんな集合を開集合と呼ぶかを決めることである.

◆ **近傍:** ブルバキによる位相空間の定義以来, 位相を定めるというのが, どんな集合を開集合と呼ぶか決めること, つまり開集合の範囲を指定することだと考えられるようになった. しかし, 本来やりたいことは, 各点の近傍を指定すること, 近傍という言葉の意味を定めることのほうではないかと思う.

定義 5.2. 位相空間 (X, τ) の点 $x \in X$ と 集合 $A \subset X$ について, もしも

$$\text{ある開集合 } U \text{ について } x \in U \subset A$$

となっているとき, A は x の**近傍**(neighborhood) であるという. ◀

定義 5.3. 位相空間 (X, τ) における各点 x の近傍の全体を $\mathcal{U}(x)$ と書いてこれを x の**全近傍系**(the full system of neighborhood) あるいは**近傍フィルター**(neighborhood filter) という. ◀

補題 5.4. 近傍フィルターは次の条件 (0)–(5) をみたす:

(0) $\mathcal{U}(x)$ のメンバーは X の部分集合である;
(1) $\mathcal{U}(x)$ は空ではない;
(2) A が $\mathcal{U}(x)$ のメンバーであるなら x は A に属する;
(3) A が $\mathcal{U}(x)$ のメンバーで $A \subset B \subset X$ であれば B も $\mathcal{U}(x)$ のメンバーである;
(4) A と B が $\mathcal{U}(x)$ のメンバーであれば共通部分 $A \cap B$ も $\mathcal{U}(x)$ のメンバーである;
(5) A が $\mathcal{U}(x)$ のメンバーのとき次のような B がとれる: B も $\mathcal{U}(x)$ のメンバーであり, また, B に属するすべての点 y について A は $\mathcal{U}(y)$ のメンバーでもある. ◀

逆にこの (0)–(5) をみたすように $\mathcal{U}(x)$ が各点 $x \in X$ に割り当てられているなら,

$$A \in \tau \iff \text{すべての } x \in A \text{ について } A \in \mathcal{U}(x)$$

によって τ をあとから定めてやることにより, (X, τ) が定義 5.1 の条件をみたして位相空間となる. このとき, もとの $\mathcal{U}(x)$ はこの位相についての x の全近傍系に一致する.

◆ **基本近傍系:** 位相空間論の応用においては, どんな集合を近傍と呼ぶか決めるための目安となる集合族が, 開集合の定義に先立って与えられる場合が多い. ユークリッド空間や距離空間の場合は, それは ε-近傍という形であらわれた. 第 2 章で扱ったストーン位相でも, 同じアイデアを別の形で用いている.

定義 5.5. 位相空間 (X, τ) における**基本近傍系**(a system of basic neighborhoods) あるいは**近傍ベース**(beighborhood base) とは, X の各点 x に集合族 $\mathcal{B}(x)$ を割り当てて

$$\mathcal{U}(x) = \left\{ A \subset X \,:\, \text{ある } B \in \mathcal{B}(x) \text{ について } B \subset A \right\}$$

が成立するようにしたもののことである. ◀

各点の基本近傍系を与えることで位相は定まる. 一番基本的な実数直線の例でみてみよう. 実数直線 $\mathbb{R}$ の通常の位相において, 実数 x の近傍とは, なんらかの正の実数 $\varepsilon > 0$ について開区間 $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ を含むような集合のことである. だからここでは

$$\mathcal{B}(x) = \left\{ (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) : \varepsilon > 0 \right\}$$

によって基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ を定めていることになる. また, 先ほど正の数 ε と言ったところを正整数の逆数 $1/n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ に制限してもよい. つまり,

$$\mathcal{B}'(x) = \left\{ (x - 1/n,\ x + 1/n) : n = 1, 2, \ldots \right\}$$

と定めた $\mathcal{B}'(x)$ も, 同じく実数直線の通常の位相の基本近傍系になる. 一般に基本近傍系のとりかたは一意的ではない. いずれにせよ, 実数直線 $\mathbb{R}$ の部分集合 A について

$$\begin{aligned}
& A \text{ は開集合} \\
\iff & \text{すべての } x \in A \text{ に対して } \varepsilon > 0 \text{ があって } (x-\varepsilon,\ x+\varepsilon) \subset A \\
\iff & \text{すべての } x \in A \text{ に対して正の整数 } n \geq 1 \text{ があって } (x - 1/n,\ x + 1/n) \subset A
\end{aligned}$$

となる.

補題 5.6. 位相空間 (X, τ) における基本近傍系 $\mathcal{B}(x)$ は次の条件をみたす:

- $(0)'$ $\mathcal{B}(x)$ のメンバーは X の部分集合である;
- $(1)'$ $\mathcal{B}(x)$ は空ではない;
- $(2)'$ A が $\mathcal{B}(x)$ のメンバーなら x は A に属する;
- $(3)'$ A と B が $\mathcal{B}(x)$ のメンバーなら $C \subset A \cap B$ をみたす $\mathcal{B}(x)$ のメンバー C がある;
- $(4)'$ A が $\mathcal{B}(x)$ のメンバーのとき $\mathcal{B}(x)$ のメンバー B で次の条件をみたすものがある: どの $y \in B$ についても $\mathcal{B}(y)$ のあるメンバー C が存在して $y \in C \subset A$ となる. ◀

逆になにか集合 X の各要素 x に対して集合族 $\mathcal{B}(x)$ がこの $(0)'$–$(4)'$ をみたすように割り当てられていれば,

$$A \in \tau \iff \text{すべての } x \in A \text{ についてある } B \in \mathcal{B}(x) \text{ が存在して } x \in B \subset A$$

と τ を定めることにより, (X, τ) が定義 5.1 の条件をみたして位相空間となる. このとき, もとの $\mathcal{B}(x)$ はこの位相におけるひとつの基本近傍系になる. たとえば数直線の位相 (あるいは一般に距離空間の位相) は, この方法で与えられる.

◆ **開基:** 実数直線における開区間の全体のように, 代表的な開集合を集めることで位相を定めることもできる.

定義 5.7. 位相空間 (X, τ) において

$$A \text{ が開集合} \iff \text{すべての } x \in A \text{ に対してある } B \in \mathcal{B} \text{ が } x \in B \subset A \text{ をみたす}$$

となる集合族 $\mathcal{B}$ を位相 τ のひとつの**開基**(open basis) という. ◀

この定義により開基 $\mathcal{B}$ のメンバーはかならず開集合になる. たとえば位相 τ そのものは定義によりひとつの開基であるが, これは面白い例ではない. 実数直線 $\mathbb{R}$ の通常の位相では, 開区間の全体が開基をなすほか,

両端が有理数であるような開区間の全体も開基となる. 両端が有理数で長さが $1/n$ ($n = 1, 2, \ldots$) であるような開区間全体に制限してもまだ開基になってくれる. このように, 開基の取り方はひととおりではない.

補題 5.8. 集合族 $\mathcal{B}$ が位相空間 (X, τ) の開基であるとき:

(0)$''$ $\mathcal{B}$ のメンバーは X の部分集合である;
(1)$''$ $\mathcal{B}$ は空ではない;
(2)$''$ $\bigcup \mathcal{B} = X$, すなわち, どの点も少なくともひとつの $\mathcal{B}$ のメンバーに属する;
(3)$''$ A と B が $\mathcal{B}$ のメンバーで $x \in A \cap B$ のとき, $\mathcal{B}$ のあるメンバー C が $x \in C \subset A \cap B$ をみたす. ◀

逆に集合 X にこのような (0)$''$–(3)$''$ をみたす集合族 $\mathcal{B}$ が与えられているとき, 集合族 τ を

$$A \in \tau \iff \text{すべての } x \in A \text{ についてある } B \in \mathcal{B} \text{ が存在して } x \in B \subset A$$

と定めると (X, τ) は定義 5.1 の条件をみたして位相空間となり, もとの集合族 $\mathcal{B}$ はこの位相のもとでひとつの開基となる.

集合に位相を定義して位相空間にすることを "位相を入れる" という. 位相の入れ方として, ここまでに, 開集合系による方法, 近傍フィルターを指定する方法, 基本近傍系を指定する方法, 開基を指定する方法を紹介した. この他にも位相を定義する方法はたくさんあるが, 基本的に, "どんな集合を開集合とよぶか" または "何を点の近傍と呼ぶか" を決めるのが「位相を入れる」ということである.

◆ **内部と境界と閉包:** 点に対する近傍という概念の主客をひっくり返すと, 集合に対する内点という概念になる. 着目するところが違うだけで, 両者が指し示しているのは同じ事態.

定義 5.9. 位相空間 (X, τ) の点 x が集合 $A \subset X$ の**内点** (interior point) であるとは, A が x の近傍であることである. 集合 A の内点全体の集合を A の**内部** (interior) といい, 記号 $\mathrm{Int}\, A$ であらわす. ◀

内点であることと要素であることを混同してしまう人が意外に多い. 点 x が集合 A の内点であるというのは, x 自身が要素であることに加えて, x にじゅうぶん近い点がすべてミチヅレになって A に属しているということである.

定義 5.10. 位相空間 (X, τ) の点 x が集合 $A \subset X$ の**触点** (cluster point) であるとは, x のすべての近傍が A と空でない交わりをもつということである: $U \in \mathcal{U}(x) \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset$. ◀

点 x のいくらでも近くに A の要素が見つかるのだから, x はいわば A という集合の要素の極限になっている. A に "触れている" 点というわけだ. この定義から

補題 5.11. 点 x が A の触点 $\iff$ x は補集合 $X \setminus A$ の内点でない. ◀

定義 5.12. 位相空間 (X, τ) の部分集合 A の触点の全体を A の**閉包** (closure) といい, $\mathrm{Cl}\, A$ とあらわす. ◀

補題 5.13.

$$\mathrm{Int}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Cl}\, A,$$
$$\mathrm{Cl}(X \setminus A) = X \setminus \mathrm{Int}\, A. \quad ◀$$

定義 5.14. 位相空間 (X, τ) の部分集合 A の触点であって内点でない点のことを A の**境界点**という. その全体を $\mathrm{Bd}\, A$ と書いて A の**境界** (border) と呼ぶ. ◀

そこで, A の境界点とはどの近傍も A の点も補集合 $X \setminus A$ の点も両方含むような点のこと:

$$x \in \operatorname{Bd} A \iff \text{すべての } U \in \mathcal{U} \text{ について } U \cap A \neq \emptyset \text{ かつ } U \setminus A \neq \emptyset.$$

ただしこの場合 x 自身は A に属していることもあれば属していないこともありうる. さらにこの同値性から $\operatorname{Bd} A = \operatorname{Bd}(X \setminus A)$ となることがわかる. 境界はまさに A と $X \setminus A$ の境界なのだからこれは順当なことだ.

定理 5.15. 位相空間 (X, τ) の部分集合 A について次の条件は互いに同値:

(1) A は開集合: $A \in \tau$;
(2) A の要素はすべて A の内点: $A \subset \operatorname{Int} A$;
(3) A は A 自身の内部: $A = \operatorname{Int} A$;
(4) A はある集合の内部 $(\exists B)\, A = \operatorname{Int} B$;
(5) A の境界点はどれも A に属さない: $A \cap \operatorname{Bd} A = \emptyset$. ◀

定義 5.16. 自分自身の触点をすべて含む集合のことを**閉集合** (closed set) という. ◀

定理 5.17. 位相空間 (X, τ) の部分集合 A について次の条件は互いに同値:

(1) A は閉集合: $\operatorname{Cl} A \subset A$;
(2) A は A 自身の閉包: $A = \operatorname{Cl} A$;
(3) A はある集合の閉包 $(\exists B)\, A = \operatorname{Cl} B$;
(4) A の境界点はすべて A に属する: $\operatorname{Bd} A \subset A$;
(5) A の補集合 $X \setminus A$ は開集合. ◀

開集合とは補集合が閉集合になる集合のことだ. ということは, どんな集合を閉集合と呼ぶかを指定することによっても, 位相を定めることが可能ということになる. そのときに閉集合全体の族がみたすべき条件は次の補題のとおりである.

補題 5.18. 位相空間 (X, τ) の閉集合について次の (C1)–(C3) が成立する:

(C1) 空集合 $\emptyset$ と X 全体は閉集合である;
(C2) A と B が 閉集合のとき, その和部分 $A \cup B$ も閉集合である;
(C3) $\mathcal{S}$ 閉集合からなる任意の集合族とし $S = \bigcap \mathcal{S}$ をその共通部分とするとき, S はまた閉集合である. ◀

補題 5.19. 内部演算子 Int と閉包演算子 Cl は次の公式をみたす:

(1) $\operatorname{Int} A \subset A,\ \ A \subset \operatorname{Cl} A$;
(2) $\operatorname{Int}(\operatorname{Int} A) = \operatorname{Int} A,\ \ \operatorname{Cl}(\operatorname{Cl} A) = \operatorname{Cl} A$;
(3) $\operatorname{Int}(A \cap B) = (\operatorname{Int} A) \cap (\operatorname{Int} B),\ \ \operatorname{Cl}(A \cup B) = (\operatorname{Cl} A) \cup (\operatorname{Cl}(B)$;
(4) $\operatorname{Int} X = X,\ \ \operatorname{Cl} \emptyset = \emptyset$. ◀

逆に集合 X 上にこれらの条件をみたす集合演算 Int または Cl が定められていれば, そこから開集合系 τ を定義できて, そのとき元の集合演算はこの位相にかんする内部演算子または閉包演算子に一致する.

◆ **連続写像:** 近傍の概念を使って, 二つの位相空間の間の写像の連続性を定義できる.

定義 5.20. 二つの位相空間 (X, τ_X) と (Y, τ_Y) があったとする. 写像 $f: X \to Y$ が X の点 x において連続であるとは, Y の点 $f(x)$ の任意の近傍 U について, 逆像 $f^{-1}(U)$ が X における点 x の近傍になっていることをいう. 定義域のすべての点において連続である写像のことを**連続写像** (continuous mapping) という. ◀

この定義により連続写像の次の特徴づけが得られる. 連続性のこのたいへん簡潔な表現が, 実数直線の場合に古典解析のイプシロン=デルタ法で定義される函数の連続性と同値になるのは, ちょっとした驚きだ.

補題 5.21. 位相空間 (X, τ_X) から (Y, τ_Y) への写像 $f: X \to Y$ について次の条件は互いに同値:

(1) f は連続写像である;
(2) $E \subset Y$ が Y の開集合ならば, その逆像 $f^{-1}(E)$ は X の開集合である;
(3) $F \subset Y$ が Y の閉集合ならば, その逆像 $f^{-1}(F)$ は X の閉集合である. ◀

連続写像について語るべきことはたくさんあるが, ひとまずなにより大事なのは同相性の定義だろう.

定義 5.22. 位相空間 (X, τ_X) から (Y, τ_Y) への写像 $h: X \to Y$ は, 連続写像であり, かつ全単射であって, さらに逆写像 $h^{-1}: Y \to X$ も連続写像であるときに **位相同型写像** (homeomorphism) と呼ばれる. (X, τ_X) から (Y, τ_Y) への位相同型写像があるとき, (X, τ_X) は (Y, τ_Y) に**同相である** (homeomorphic to) という. ◀

これまでに位相空間について定義した概念がすべて位相同型写像によって保たれるので, 同相な位相空間どうしはまったく同じ位相的性質をもつということになる.

たとえば, 実数直線において開区間どうしはたがいに同相である. また直線全体も開区間と同相である. たとえば $\theta \mapsto \tan\theta$ という対応が開区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ から $\mathbb{R}$ への位相同型写像の例になっている. また $t \mapsto e^t$ という対応は, $\mathbb{R}$ から正の実数全体の半直線 $(0, +\infty)$ への位相同型写像であり, その逆写像が $x \mapsto \log x$ である. いっぽう, 開区間と閉区間, 開区間と $[0, 1)$ のような半開区間とは同相でない.

◆ **直積位相:** 二つの位相空間の直積空間は, まあわかりやすい. 有限個の空間の直積もその繰り返しにすぎない. だが無限直積を考えるといろいろ厄介になってくる. 二つの位相空間 (X, τ_X) と (Y, τ_Y) の直積集合 $X \times Y$ において, X の開集合 U と Y の開集合 V の直積集合 $U \times V$ のことを**開矩形** (open rectangle) と呼ぶことにしよう. $X \times Y$ に開矩形の全体を開基として位相を与えたのが $X \times Y$ における**直積位相** $\tau_X \otimes \tau_Y$ である. そこで $A \subset X \times Y$ が直積位相の開集合であるための必要十分条件は, すべての $\langle x, y \rangle \in A$ に対して X における x の近傍 U と Y における y の近傍 V が存在して $U \times V \subset A$ となることである.

直積空間 $(X \times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$ から因子空間 X と Y への**標準射影** (canonical projection) $p_X: X \times Y \to X$ と $p_Y: X \times Y \to Y$ をそれぞれ $p_X(\langle x, y \rangle) = x$ と $p_Y(\langle x, y \rangle) = y$ で定まる写像とする. この標準射影は次の性質をもつ:

定理 5.23. 任意の位相空間 (Z, τ_Z) からの任意の連続写像 $f: Z \to X$ と $g: Z \to Y$ に対して, 連続写像 $h: Z \to X \times Y$ が存在して $f = p_X \circ h$, $g = p_Y \circ h$ となる. そのような h はただ一つに定まる. ◀

$$
\begin{tikzcd}
 & X \\
Z \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"'] & X \times Y \arrow[u, "p_X"'] \arrow[d, "p_Y"] \\
 & Y
\end{tikzcd}
$$

証明は単に $h(z) = \langle f(z), g(z) \rangle$ とするだけで, なんでもないが, 実はこの定理に述べられている性質が $X \times Y$ の直積位相を特徴づけしている:

定理 5.24. 位相空間 (W, τ_W) から連続写像 $q_X : W \to X$ と $q_Y : W \to Y$ があって, 任意の連続写像 $f : Z \to X$ と $g : Z \to Y$ を一意的な $h : Z \to W$ によって $f = q_X \circ h$, $g = q_Y \circ h$ とあらすことができるとする. このとき (W, τ_W) から $(X \times Y, \tau_X \otimes \tau_Y)$ への位相同型写像 $k : W \to X \times Y$ で $q_X = p_X \circ k$, $q_Y = p_Y \circ k$, をみたすものがただ一つ存在する. ◀

このような位相空間の構成を "矢印" つまり連続写像にかんする性質で理解しておくのは, なにかと役に立つ. たとえば, この二つの定理から次のことはすぐにわかる:

補題 5.25. 直積空間 $X \times Y$ と $Y \times X$ は自然な全単射 $\langle x, y \rangle \mapsto \langle y, x \rangle$ によって同相である. 直積空間 $(X \times Y) \times Z$ と $X \times (Y \times Z)$ は自然な全単射 $\langle \langle x, y \rangle, z \rangle \mapsto \langle x, \langle y, z \rangle \rangle$ によって同相である. ◀

だから有限個の位相空間の直積は因子の結合の順序を気にせず

$$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$$

のように書いてしまってかまわない.

次には, 無限個の空間の直積を考える. 位相空間の族 $\{\, (X_\lambda, \tau_\lambda) : \lambda \in \Lambda \}$ が与えられたとしよう. 直積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ に位相を与えて, 各因子空間 X_λ への標準的な射影 $p_\lambda : x \mapsto x(\lambda)$ が連続になり定理 5.23 に類似の性質をもつようにするために, 各因子空間 X_λ の開集合 U の逆像 $p_\lambda^{-1}(U)$ をすべて含む位相のうち一番弱い (開集合が少ない) 位相を選ぶ. それは, 有限個の添字 $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ を選び各 X_{λ_k} における開集合 $U_k \subset X_{\lambda_k}$ を指定して作った

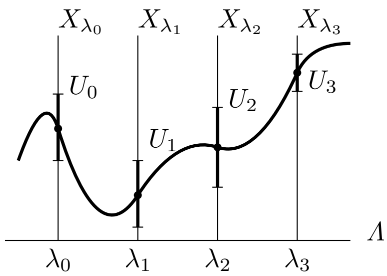
$$p_{\lambda_0}^{-1}(U_0) \cap \cdots \cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_n)$$

の形の集合全体を開基として得られる位相である. すなわち, この位相の意味で集合 $A \subset \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ が点 x の近傍であるのは, 有限個の添字 $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \in \Lambda$ と各 X_{λ_k} $(k = 0, \ldots, n)$ における $x(\lambda_k)$ の近傍 U_k を指定して, すべての $y \in \prod_\lambda X_\lambda$ について

$$y(\lambda_0) \in U_0, \ldots, y(\lambda_n) \in U_n \implies y \in A$$

となるときである. 有限個の添字 $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ のところにだけチェックポイントがあって, それらをもらさず通

過したものはすべて近傍に属するとみなす, そういうイメージだ.



このようにして定められる $\prod_\lambda X_\lambda$ の位相のことを位相空間の族 $\{(X_\lambda, \tau_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ の**直積位相** という. この直積位相のもとでの $\prod_\lambda X_\lambda$ を**直積空間**という. これについては定理 5.23 の一般化が次のように成立する:

定理 5.26. 位相空間 Z から各因子空間への連続写像 $f_\lambda : Z \to X_\lambda$ が与えられたとき, 直積空間への連続写像 $h : Z \to \prod_\lambda X_\lambda$ で, すべての添字 $\lambda \in \Lambda$ について $f_\lambda = p_\lambda \circ h$ が成立するようなものが存在する. またそのような h はただ一通りに定まる. ◀

定理 5.24 に類似の, この性質をもつ空間の (同相の意味での) 一意性も成立する.

◆ **ハウスドルフ性:** ユークリッド空間でアタリマエに成立している極限値の一意性は, 一般の位相空間では必ずしも成立しない. 極限が一意的に定まる空間の条件を考えよう.

位相空間 (X, τ) において**点列 $x_0, x_1, x_2, \ldots$ が点 $p \in X$ に収束する**ということを, 古典解析の ε-N 法のちょっとした変形で次の条件をみたすことと定義できる: 点 p の任意の近傍 U に対して, 整数 $N \geq 0$ をじゅうぶん大きくとると, N 以上のすべての番号 n について $x_n \in U$ となる.

これは数列の極限の定義で "距離が指定された ε より近くなる" と言っている部分を "指定された近傍に属する" という表現で置きかえただけであるから, 実数直線 $\mathbb{R}$ に通常の位相を与えておけば, もとの ε-N 法による定義と同値になる.

このように一般の位相空間において点列の収束を定義できたからには, 点列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ が点 p に収束しているときに

$$\lim_{n \to \infty} x_n = p$$

と定義してよいように思われる. が, これにはちょっと条件がある.

次の例をみてみよう: 集合 $X = \{0, 1\}$ の位相 τ として, 空集合 $\emptyset$ と全体集合 X だけを開集合と認めたとする. これでも定義 5.1 の条件は成立していて, (X, τ) は位相空間である. このように, 空集合と全体集合だけからなる最小限の位相のことを**密着位相** (indiscrete topology) という. いま, この空間 X のどんな点列 $\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ も, 点 0 と 1 の両方に収束する. それでも $0 \neq 1$ であるから, この空間では極限値を $\lim_{n \to \infty} x_n$ と書こうにも, それが 0 なのか 1 なのかはわからないことになる. つまり, 一般の空間では**収束する点列の極限値は一つに定まるとは限らない** ため, p に収束するからといって《極限値は p である》とは言えないわけだ.

密着位相空間では, 開集合が少なすぎて, 異なる点と点を分離することが不可能なのだった. もっと多くの開集合をもつ空間ならば, 極限の一意性は保証できる. そのような空間の条件として次のハウスドルフ性がある:

定義 5.27. 位相空間 (X, τ) が**ハウスドルフ** (Hausdorff) 空間であるとは, 異なる 2 点 x と y に対して, 互いに交わらない両者の近傍が必ずとれることをいう:

$$U \in \mathcal{U}(x),\ V \in \mathcal{U}(y),\ U \cap V = \emptyset. \ ◀$$

ハウスドルフ空間では, 点列の収束していく点があるとすればそれはただ一つに定まる. ユークリッド空間をはじめとする距離空間など解析学で出会う空間の多くはハウスドルフ空間である. しかし, ハウスドルフでない空間も代数幾何学や計算機科学などの分野では活躍する.

◆ **コンパクト性:** いよいよ, 位相空間論のハイライトというべきコンパクト性である. そしてもちろん, これをきちんと書かないことには, 今回のレジュメが完結しない.

定義 5.28. 位相空間 (X, τ) の部分集合 $K \subset X$ が**コンパクト** (compact) 集合であるとは, 次の条件をみたすことである: X の開集合の族 $\mathcal{A} \subset \tau$ が K 全体を覆うように

$$K \subset \bigcup \mathcal{A}$$

与えられていたとすれば, $\mathcal{A}$ から有限個のメンバーを上手に抜き出して, それらだけで K 全体を覆うことができる

$$A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}, \qquad K \subset A_0 \cup A_1 \cup \cdots \cup A_n.$$

空間 X 自体がコンパクト集合であるとき, (X, τ) を**コンパクト位相空間** (compact space) という. ◀

ここで述べた集合族 $\mathcal{A}$ のように, 集合 K 全体を覆うように与えられた開集合の族を意味する K の**開被覆** (open covering) という用語によって, コンパクト性は《任意の開被覆が有限部分被覆を含む》と言いあわらされる. このコンパクト性の定義は, ユークリッド空間の有界な閉集合にかんするハイネ=ボレルの定理からルベーグが抽出してきたものらしい. 本稿でわれわれが利用するのは, これと同値だがすこし意味合いの違う別の特徴づけだ. すでに述べたように, 開集合の補集合は閉集合であり, 閉集合の補集合は開集合である. この開集合と閉集合の裏表の関係によって, 定義 5.28 の条件は次のように言いかえられる: X の閉集合の族 $\mathcal{C}$ が集合 K に属する共通要素をもたないように

$$K \cap \bigcap C = \emptyset$$

と与えられたとき, $\mathcal{C}$ から有限個のメンバーを上手に抜き出して, それらだけで

$$C_0, C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C}, \qquad K \cap C_0 \cap C_1 \cap \cdots \cap C_n = \emptyset$$

のように K との共通要素がないようにできる. このことが, 集合 K がコンパクトであるための必要かつ十分な条件になる. とくに $K = X$ の場合にさらにこの言いかえの対偶をとると, 次の補題が得られる.

補題 5.29. 位相空間 (X, τ) がコンパクト空間であるための必要十分条件は次のとおり: X の閉集合の族 $\mathcal{C}$ が与えられて, 任意に選んだ $\mathcal{C}$ の有限個のメンバーが必ず共通要素をもつとする:

$$C_0, C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{C} \ \Rightarrow\ C_0 \cap C_1 \cap \cdots \cap C_n \neq \emptyset.$$

このとき, $\mathcal{C}$ 全体の共通要素が存在する:

$$\mathcal{C} \neq \emptyset. \ ◀$$

ここでの $\mathcal{C}$ のように, 有限個のメンバーをどのように選んでもそれらは必ず空でない共通要素をもつ, という集合族の性質を**有限交叉性** (finite intersection property, f.i.p.) という. そこで, 位相空間のコンパクト性は《有限交叉性をもつ閉集合族は全体として共通要素をもつ》と言いあらわされる.

コンパクト集合の例として先ほどちょっと触れたユークリッド空間の有界閉集合があげられる. たとえば実数直線の通常の位相のもとで, 閉区間はコンパクト集合である. これがもともとのハイネ=ボレルの定理で

あった.[*8] 閉区間上の連続函数の最大値最小値の原理は閉区間のコンパクト性のあらわれであり, さらにそれをもとにしたロルの定理などを媒介として, 閉区間のコンパクト性は微積分学で重要な役割を果している. 無限次元空間の場合には, この大切な有界閉集合のコンパクト性が失なわれてしまう. さあどうしようか, というのが 1920 年代から 30 年代に位相空間論が盛んに研究された動機付けのひとつになっている.

以下にコンパクト空間の性質のあれこれを証明なしで挙げる. 最後の (viii) 以外は普通の位相空間のテキストに証明が載っているか, あるいは演習問題レベルの内容. (viii) だけはちょっと難しい.

定理 5.30. (i) コンパクト空間の閉部分集合はコンパクト集合である. (ii) ハウスドルフ空間のコンパクト部分集合は閉集合である. (iii) $f : X \to Y$ が連続写像で $K \subset X$ がコンパクト集合であるとき Y の部分集合 $f^{-1}(K)$ もコンパクト集合である. (vi) 空でないコンパクト集合の減少列 $K_0 \supset K_1 \supset \cdots \supset K_n \supset \cdots$ について $\bigcap K_n \neq \emptyset$ である. (v) K をコンパクト集合, S をその無限部分集合とすると, K は S の集積点 (そのすべての近傍が S の要素を無限個含むような点) を含む. (vi) ハウスドルフ空間の互いに交わりのない二つのコンパクト集合 K_0, K_1 に対して $K_0 \subset U_0, K_1 \subset U_1$ をみたす交わりのない二つの開集合が存在する. すなわち, 交わりのないコンパクト集合は開集合で分離できる. (vii) コンパクト空間からハウスドルフ空間への連続全単射は位相同型写像になる. (viii) コンパクトなハウスドルフ空間 X_0 と X_1 が同相であるための必要十分条件は, それぞれを定義域とする実数値連続函数の全体 $C(X_0)$ と $C(X_1)$ が, 環として同型であることである. ◀

他に, 理論上も応用上重要な定理として, コンパクト空間の直積にかんするチコノフの定理がある. これについてはセクション 7 で扱う.

◆ **離散空間と一般カントール空間:** さきほどハウスドルフ性との関係で密着位相というものにふれた. 集合 X 上の密着位相とは, 空集合 $\emptyset$ と X 全体だけを開集合として認める位相で, これが X 上に存在しうるあらゆる位相のうちで最も弱い (開集合が少ない) ものだ.

もう一方の極端にあるのが **離散位相** (discrete topology) というもの. こちらは X のあらゆる部分集合を全部開集合とみなしてしまう. これでもちゃんと定義 5.2 の条件をみたし, X 上の位相のひとつとなる. ひとつの集合に入れられるあらゆる位相のうちでは, あきらかに, 離散位相が最も強い (開集合が多い) ものになる.

離散位相では, 各点 x の近傍として一点集合 $\{x\}$ が選べる. これは "自分の近くにいるのは自分だけ" ということを意味している. 離散位相はすべての点をお互いに切り離して, 空間をバラバラに分解してしまう. とくに, 離散空間はハウスドルフ空間である.

定義 5.31. 位相空間 (X, τ) の部分集合 D が **離散集合** (discrete set) であるとは, どの点 $x \in D$ に対しても近傍 $U \in \mathcal{U}(x)$ を $U \cap D = \{x\}$ となるようにとれることをいう[*9]. 空間全体が離散集合であるような位相空間は **離散空間** (discrete space) と呼ばれる. ◀

密着位相と同様, 実際のところ離散空間にはそれほど使いみちがないのだが, いろいろの反例を作るのに用いられることがある. また, 直積空間の因子空間として用いられる. 典型的なのが一般カントール空間である.

[*8] いや, 細かいことを言えばちょっと違って, ボレルが証明したのは "閉区間の可算コンパクト性" です. もちろん, 距離空間の範囲ではコンパクト性と可算コンパクト性とは事実上は区別がないので, これはまあイチャモンというものですが, ボレルが可算無限個の開区間による被覆だけを想定していたことは確かです. 有界閉集合 vs 任意の開被覆 という形へ議論を拡張したのは, おそらくルベーグでしょう. このあたり, 今度裏をとっておきます.

[*9] いつも思うのですが, この離散集合という言葉は本当に不思議です. 彼らは離散しているのでしょうか, それとも集合しているのでしょうか. (これが言いたいがためにわざわざ使いもしない用語の定義を書いたのではないかとの疑いが, 著者に対して持たれています.)

定義 5.32. 集合 Λ から $\{0,1\}$ への写像の全体 ${}^{\Lambda}\{0,1\}$ に, 離散空間としての $\{0,1\}$ の直積位相を与えたものを, Λ を添字集合とする**一般カントール空間** (generalized Cantor space) という. ◀

離散空間としての $\{0,1\}$ はハウスドルフ空間であり, また有限個の点のみからなることからコンパクト空間でもある. その直積空間として, 一般カントール空間はコンパクトなハウスドルフ空間である. 実は, 一般カントール空間はコンパクトなハウスドルフ空間全体のなかでも次の意味で普遍的な例になっている.

定理 5.33. 空間 (X,τ) がコンパクトなハウスドルフ空間であれば, ある集合 Λ を添字集合とする一般カントール空間 ${}^{\Lambda}\{0,1\}$ から X の上への連続な全射が存在する.

6 補足 2: 環とブール代数の泥縄式ミニコース

6.1 環とイデアル

本稿で単に「環」と呼んでいるものは, より正確には「乗法の単位元をもつ可換環」と呼ばねばならないのだけど, それ以外の種類の環を本稿で扱わないので, つづめて「環」と呼ぶことにしている.

定義 6.1. 集合 R 上に, 任意の要素 a と b に対するそれらの和 $a+b$ を与える演算 (加法) と積 $a\cdot b$ を与える演算 (乗法) が定義され, また特別な要素 0_R と 1_R が指定されていて, 次にいう条件をみたしているとする:

(1) $a+b=b+a$ (加法の交換法則);
(2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (加法の結合法則);
(3) すべての要素 a について $0_R+a=a$ (0_R は加法の単位元);
(4) どの a に対してもある要素 a' が $a+a'=0_R$ が成立する (加法は可逆);
(5) $a\cdot b=b\cdot a$ (乗法の交換法則);
(6) $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ (乗法の結合法則);
(7) すべての要素 a について $1_R\cdot a=a$ (1_R は乗法の単位元);
(8) $a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c)$ (積は和に分配される).

このとき, 集合 R はこの加法と乗法のもとで**環**(ring) をなすという. 条項 (4) の条件をみたす a' は各 a ごとにただ一つに定まるので, これを $-a$ と書く. ◀

たとえば整数の全体 $\mathbb{Z}$ は普通の乗法や加法のもとで環であるし, 文字 (不定元) X に関する実数係数の多項式の全体 $\mathbb{R}[X]$ も多項式の乗法と加法のもとで環である.[*10] これらの例の場合同様, 一般の環でも, 乗法をあらわす記号 $\cdot$ はしばしば省略され, $a\cdot b$ は単に ab と書かれる. またこれも数や文字式と同様だが, 乗法が加法より記法上の《結合力》が強いものと約束する. つまり, $a+bc$ という式を見たら, $(a+b)\cdot c$ <u>ではなく</u>, $a+(b\cdot c)$ と解釈する. 以上の規約のもとでは, 条項 (8) の式は

$$a(b+c)=ab+ac$$

と書けることになる.

本稿ではあつかわないが, 積の交換法則を認めない環 (不可換環あるいは非可換環) も重要な研究対象になる. 不可換環の代表例として, たとえば (正方) 行列の環がある.

[*10] ただしこのように言う場合は, 定数すなわち不定元 X を含まない実数そのものも多項式のうちに含めておかないといけない.

線形代数のベクトル空間の理論では部分空間が重要だったが, 環論でそれに相当する役割を果たすのが《イデアル》だ.

定義 6.2. 環 R の部分集合 $A \subset R$ が次の条件をみたしているとき, これを R の**イデアル**(ideal) と呼ぶ:

(1) $A \neq \emptyset$;
(2) $a_1, a_2 \in A,\ r_1, r_2 \in R \ \Rightarrow\ r_1 a_1 + r_2 a_2 \in A.$ ◀

この定義から, 零元 0_R はすべてのイデアルに属していること, また単位元 1_R が属するイデアルは R 全体に限ることがわかる. R 全体を**自明なイデアル**といい, それ以外を**自明でないイデアル**という.

整数の環 $\mathbb{Z}$ において偶数の全体はイデアルになっている. 実は $\mathbb{Z}$ のイデアルはすべてある数の倍数全体の集合と一致することがわかる. (略証: 零元だけの集合 $\{0\}$ は 0 の倍数全体. 自明なイデアル $\mathbb{Z}$ は 1 の倍数全体. イデアル I が自明でなく $\{0\}$ とも異なるなら, その正で最小の要素 a が存在する. このとき, I は a の倍数全体の集合と一致することがわかる.) 同様のことは 1 変数の多項式の環 $\mathbb{R}[X]$ でも成立するが, 2 変数の多項式環 $\mathbb{R}[X_1, X_2]$ などではそうはいかない. 定数項がゼロであるような多項式の全体はイデアルをなし, これが反例である.*11

定義 6.3. 二つの環 R_1 と R_2 があったとしよう. 写像 $h : R_1 \to R_2$ が条件

(1) すべての $a, b \in R_1$ について $h(a+b) = h(a) + h(b)$;
(2) すべての $a, b \in R_1$ について $h(ab) = h(a)h(b)$;
(3) $h(1_{R_1}) = 1_{R_2}$

を満たすならば, これを R_1 から R_2 への**準同型写像** (homomorphism) と呼ぶ. 準同型写像 h の値域を h の**像** (image) といい $\mathrm{Im}\, h$ と書く. 零元の逆像 $h^{-1}(\{0_{R_2}\})$ を h の**核** (kernel) といい $\mathrm{Ker}\, h$ と書く. ◀

定義からすぐわかることとして:

補題 6.4. 環の準同型写像 $h : R_1 \to R_2$ の核 $\mathrm{Ker}\, h$ は R_1 の自明でないイデアルである. また h の像 $\mathrm{Im}\, h$ は R_2 と同じ加法と乗法と零元と単位元のもとで環になる. ◀

逆に環の自明でないイデアルは準同型写像の核になる. これを説明するには剰余類の話をしないといけない.

定義 6.5. 環 R のイデアル A を考えよう. R のふたつの要素 a と b はその差 $a - b$ がイデアル A の要素であるとき, ***A* を法として合同である** (congruent modulo A) と言われる. このとき $a \equiv b \pmod{A}$ と書く:

$$a \equiv b \pmod{A} \Leftrightarrow a - b \in A. \quad ◀$$

合同関係が R 上のひとつの同値関係であることは簡単にわかる. R の要素 a のこの同値関係に関する同値類は

$$a + A = \left\{ a + x \,:\, x \in R \right\}$$

である. これを ***A* を法とする *a* の剰余類**という. その全体（商集合）

$$R/A = \left\{ a + A \,:\, a \in R \right\}$$

*11 これが 1 変数の場合は “たまたま” 単項式 X の倍元全体と一致するのです.

は, 加法と乗法を, それぞれ

$$(a+A)+(b+A)=(a+b)+A,$$
$$(a+A)\cdot(b+A)=(a\cdot b)+A$$

によって矛盾なく[*12]定義できて, 環になる. この環 R/A をイデアル A による R の**剰余環**とよぶ. R の要素 a をその剰余類 $a+A$ に対応させる写像は R から R/A への準同型になっていて, A がちょうどその核になっている.

こうして, イデアルとは準同型の核というのと同等な概念であることがわかる. ついでのことだから, 名高い準同型定理を述べてしまおう. ただし, 証明はしない.

定理 6.6. (準同型定理) 環 R_1 から R_2 への準同型写像 $h: R_1 \to R_2$ の核 $\operatorname{Ker} h$ による R_1 の剰余環 $R_1/\operatorname{Ker} h$ は, R_2 の部分環としての像 $\operatorname{Im} h$ と同型[*13]である. ◀

最後に極大イデアルというものについて一言.

定義 6.7. 環 R の自明でないイデアル A が**極大イデアル**であるとは, A を部分集合として含む自明でないイデアルが A 自身のほかに存在しないことをいう. ◀

これと同値な定義として, 極大イデアルとは, $a \notin A$ のときある $x \in R$ について $1-ax \in A$ となるという条件を (すべての $a \in R$ について) みたすような, 自明でないイデアル A のことである, といってもよい. 極大イデアルは必然的に素イデアルになる. このことの逆は, 応用上重要な多くのケースで成立するものの, すべての環で例外なく成立するわけではない. たとえば整数係数の一変数多項式環 $\mathbb{Z}[X]$ において, 定数項がゼロである要素の全体は素イデアルになっているけれども, 定数項が偶数である要素全体のなすもっと大きいイデアルに含まれるので, 極大イデアルではない.

6.2 ブール代数

定義 6.8. 単位元をもつ可換環 B が**ブール環**であるとは, そのすべての要素が**冪等法則**:

$$a^2=a$$

をみたすことをいう. ◀

ブール環のすべての要素は加法に関して位数 2 または 1 である. つまり任意の要素 a が $a+a=0_B$ をみたす. というのも $-a=(-a)^2=a^2=a$ だから.

ブール環 B において二項演算 $\vee$ と $\wedge$ を

$$a \vee b = a+b+ab, \qquad a \wedge b = ab$$

と定義し, 一項演算 $\neg$ を

$$\neg a = 1+a$$

と定義すると, 次の公式が成立する:

[*12] 代表要素 a と b をそれぞれに合同な要素 a' と b' に置き換えて計算しても結果として得られる剰余類が変わらないことにより 演算結果が a と b の剰余類の間の演算であることが保証されている, という意味です.

[*13] 準同型である全単射が存在するような 2 つの環を, 互いに同型な環というのです.

(b1) $a \vee b = b \vee a$, $a \wedge b = b \wedge a$ (交換法則);
(b2) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$, $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (結合法則);
(b3) $a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ (分配法則);
(b4) $a \vee (a \wedge b) = a$, $a \wedge (a \vee b) = a$ (吸収法則);
(b5) $a \vee 0_B = a$, $a \wedge 1_B = a$ (単位元);
(b6) $a \vee (\neg a) = 1_B$, $a \wedge (\neg a) = 0_B$ (補元);
(b7) $1_B \neq 0_B$ (非自明性).

定義 6.9. 集合 B 上に二項演算 $\vee$ と $\wedge$, 一項演算 $\neg$ が定まっており, さらに特別な要素 0_B と 1_B が指定されていて, 公式 (b1)–(b7) が成立しているとき, この構造 $(B, \vee, \wedge, \neg, 0_B, 1_B)$ のことを**ブール代数**という. $a \vee b$ を a と b の**結び**(join) といい $a \wedge b$ を a と b の**交わり**(meet) という. $\neg a$ のことを a の**補元**という. ◀

この意味で, ブール環はブール代数を定める. 逆にブール代数 $(B, \vee, \wedge, \neg, 0_B, 1_B)$ が与えられたときに, B 上に加法と乗法を

$$a + b = (a \wedge (\neg b)) \vee (b \wedge (\neg a)), \qquad a \cdot b = a \wedge b$$

によって定めると, $(B, +, \cdot, 0_B, 1_B)$ がブール環となり, このブール環の定めるブール代数はもとの B と一致する. このようにブール環とブール代数は互いに行き来できる同等な概念である.

ブール代数 B において, 二項関係 $\leq$ を

$$a \leq b \iff a \wedge b = a$$

によって定めると, $\leq$ は B 上の半順序関係となり, $a \vee b$ は a と b の最小の共通上界, $a \wedge b$ は a と b の最大の下界となる. 1_B と 0_B はそれぞれ $(B, \leq)$ の最大要素と最小要素である. このようにブール代数は順序構造という側面をも持つ.

2 つの要素からなる環 $\{0, 1\}$ を考える. ただしこの環では $1 + 1 = 0$ であるものとする. この環はブール環であるからブール代数を定める. これは, **二元ブール代数**という自明なようだが重要なブール代数の例になっている. もともとはブール代数というのは, 論理法則を真 $\top$ と偽 $\perp$ という真理値の代数的な演算の規則として理解しようという着想にもとづいて考えられたものだ. その意味では, この二元ブール代数こそがブール代数の典型ということになる.

もうひとつの典型的な例として, 空でない任意の集合 X の部分集合の全体 $\mathcal{P}(X) = \{\, a : a \subset X \,\}$ (これを X の冪集合という) に演算 $a \vee b$, $a \wedge b$, $\neg a$ をそれぞれ $a \cup b$, $a \cap b$, $X \setminus a$ と定めたものがある. このときは零元は空集合, 単位元は全体集合 X である. また, 補元は補集合にほかならず, ブール代数の順序づけは集合の包含関係と一致する.

補題 6.10. ブール代数 B の部分集合 $A \subset B$ が, 対応するブール環の自明でないイデアルとなるためには,

(1) $0_B \in A$, $1_B \notin A$;
(2) $a \in A$ なら任意の要素 $b \in B$ について $a \wedge b \in A$;
(3) $a \in A$, $b \in A$ なら $a \vee b \in A$

という条件をみたすことが必要かつ十分である. ◀

このようにブール環のイデアルのことをブール代数の言葉で表現できることから, ブール環としてのイデアルのことを, また**ブール代数 B のイデアル**ともいう. 同じ条件をさらに順序構造の言葉だけで表現できる:

補題 6.11. ブール代数 B の部分集合 $A \subset B$ が自明でないイデアルとなるためには,

(1′) $A \neq \emptyset$, $A \neq B$;
(2′) $a \in A$, $a' \leq a$ なら $a' \in A$;
(3′) $a \in A$, $b \in A$ ならある要素 $c \in A$ について $a \leq c$, $b \leq c$ が成立する

という条件をみたすことが必要かつ十分である. ◀

こうして, イデアルという概念の定義される範囲を順序構造にまで一般化することができる. この観点からはイデアルは,

- 順序構造の要素が “小さい” ということの意味づけ,
- 順序構造の中での, 下から上への動き,
- 順序構造の中をどんどん上に行った先にあるなにか仮想的な極限

といったものの表現となる. ここで天地をひっくり返すことにより

- 順序構造の要素が “大きい” ということの意味づけ,
- 順序構造の中での, 上から下への動き,
- 順序構造の中をどんどん下に行った先にあるなにか仮想的な極限

といったものを表現する数学的概念が考えられる. それがフィルターである.

定義 6.12. ブール代数 B の部分集合 A が

(1) $0_B \notin A$, $1_B \in A$;
(2) $a \in A$ なら任意の要素 $b \in B$ について $a \vee b \in A$;
(3) $a \in A$, $b \in B$ なら $a \wedge b \in A$

という条件をみたすとき, これを ***B* のフィルター** と呼ぶ. ◀

補題 6.13. ブール代数 B の部分集合 $A \subset B$ がフィルターとなるためには,

(1′) $A \neq \emptyset$, $A \neq B$;
(2′) $a \in A$, $a \leq a'$ なら $a' \in A$;
(3′) $a \in A$, $b \in A$ ならある要素 $c \in A$ について $c \leq a$, $c \leq b$ が成立する

という条件をみたすことが必要かつ十分である. ◀

イデアルとフィルターはこのように定義からして表裏一体である. そこでブール代数 B のフィルター $F \subset B$ に対して

$$F^* = \{\, a \in B : \neg a \in F \,\}$$

と定めると, F^* は自明でないイデアルになる. 逆に B の自明でないイデアル A のメンバーの補元の全体

$$A^* = \{\, a \in B : \neg a \in A \,\}$$

はフィルターである. しかもこれらの演算の間には $(F^*)^* = F$, $(A^*)^* = A$ という関係が成立している. イデアル F^* のことをフィルター F に双対なイデアルといい, またフィルター A^* のことをイデアル A に双対なフィルターという.

ブール代数は環でもあり, ブール代数のイデアルは環のイデアルでもある. ブール環の剰余環もまたブール環だから, 剰余環に対応した剰余ブール代数が得られる. 剰余ブール代数 B/A を環の言葉にへの翻訳に頼らずに定義すると次のようになる. ブール代数のふたつの要素 a と b がイデアル A を法として合同であるとは

$$a \wedge (\neg b) \in A,\ b \wedge (\neg a) \in A$$

となることであり, この関係は B 上の同値関係である. 要素 $a \in B$ の同値類を a と書くことにすると, 同値類間の結びと交わりと補元の演算が

$$[a] \vee [b] = [a \vee b],\ [a] \wedge [b] = [a \wedge b],\ \neg[a] = [\neg a]$$

によって矛盾なく定義できて[*14], B/A はこれらの演算のもとでブール代数となる. 零元は $[0_B]$, 単位元は $[1_B]$ である.

ブール代数の演算が環としての演算と互いに書き換え可能だったことから, ブール環からブール環への環の準同型はまた結び・交わり・補元の各演算と零元・単位元を保つブール代数の準同型となることがわかる. 環の準同型定理もブール代数の準同型定理として変更なしに成立する.

定義 6.14. ブール代数 B_1 から B_2 への写像 $h : B_1 \to B_2$ が条件

(1) $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$;
(2) $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$;
(3) $h(\neg a) = \neg h(a)$;

をみたすとき, そのような h をブール代数の準同型写像という. ◀

定理 6.15. (準同型定理) ブール代数 B_1 から B_2 への準同型写像 $h : B_1 \to B_2$ の核 $\mathrm{Ker}\, h$ による B_1 の剰余ブール代数 $B_1/\mathrm{Ker}\, h$ は, B_2 の部分ブール代数としての像 $\mathrm{Im}\, h$ と同型である. ◀

とくにブール代数では極大イデアルと二元ブール代数の関係が重要だ.

定理 6.16. ブール代数 B のイデアル A が極大イデアルであるためには剰余ブール代数 B/A が二元ブール代数 $\{0, 1\}$ に同型となることが必要かつ十分である. ◀

定理 6.17. ブール代数 B のイデアル A が極大イデアルであるためには, それが B のすべての要素 a について

$$a \in A \text{ または } \neg a \in A$$

をみたすことが必要かつ十分である. とくに, **ブール代数の素イデアルは極大イデアルである**. ◀

ブール代数の極大イデアルの双対フィルターは極大フィルターということになるが, これはとくに超フィルターと呼ばれる.

定義 6.18. ブール代数のフィルター U が, B のすべての要素 a について

$$a \in U \text{ または } \neg a \in U$$

をみたすとき, そのような U を ***B* の超フィルター**という. ◀

[*14] 29 ページの脚注**12 参照.

ブール代数においては, 極大イデアル, 超フィルター, 二元ブール代数への準同型写像は, お互いに行き来できる同等な概念というわけだ.

定義 6.19. 集合 X の部分集合全体のなすブール代数 $\mathcal{P}(X)$ の超フィルターのことを, **集合 X 上の超フィルター**と呼ぶ. ◀

フィルターの双対イデアルによるブール環の剰余環 (これもブール環となる) における素イデアルの存在に訴えることにより, 次のフィルターの拡大定理を得る:

定理 6.20. 集合 X の部分集合の有限交叉性をもつ族は, X 上の超フィルターに拡大できる. ◀

7 補足 3: チコノフの定理

まず, 超フィルターの収束という概念を定義し, それによってコンパクト空間のひとつの特徴づけを与える.

位相空間 (X,τ) の各点 x の全近傍系 $\mathcal{U}(x)$ は, X の部分集合全体のなすブール代数 $\mathcal{P}(X)$ のフィルターである. そこで, $\mathcal{U}(x)$ を含む $\mathcal{P}(X)$ の超フィルターが存在する. ある点 x における全近傍系 $\mathcal{U}(x)$ を含むような超フィルターはこの点 x に収束すると言われる.

定義 7.1. 位相空間 (X,τ) 上の**超フィルター $\mathcal{F}$ が点 x に収束する**とは $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ となることである. ◀

補題 7.2. 位相空間 (X,τ) がハウスドルフ空間であるための必要十分条件は, X 上のどんな超フィルターも二つ以上の点に収束しないことである. ◀

補題 7.3. 位相空間 (X,τ) の超フィルター $\mathcal{F}$ が X の点 x に収束するための必要十分条件は, すべての $A \in \mathcal{F}$ ついて $x \in \mathrm{Cl}\,A$ となることである.

証明 (必要性) A を $\mathcal{F}$ の任意のメンバーとする. U を x の任意の近傍としよう. $\mathcal{F}$ が x に収束するので $U \in \mathcal{F}$ である. $\mathcal{F}$ はフィルターであって有限交叉性をもつので, そのメンバー A について $A \cap U \neq \emptyset$ である. したがって A は x の任意の近傍と交わりをもつ. つまり x は A の触点であって $x \in \mathrm{Cl}\,A$ である.

(十分性) 点 x は $\mathcal{F}$ のすべてのメンバーの触点であったとする. U を x の任意の近傍とすると, U は $\mathcal{F}$ のすべてのメンバーと交わりをもつ. だから $X \setminus U \notin \mathcal{F}$ のはずで, 超フィルターの性質から $U \in \mathcal{F}$ である. このように $\mathcal{F}$ は x のすべての近傍を含むので x に収束する. ◀

さて, 空間 X 上に超フィルター $\mathcal{F}$ が与えられたとしよう. A が $\mathcal{F}$ のメンバーであれば, その閉包 $\mathrm{Cl}\,A$ も ($A \subset \mathrm{Cl}\,A$ なので) やはり $\mathcal{F}$ のメンバーになる. そこで集合族

$$\left\{ \mathrm{Cl}\,A \,:\, A \in \mathcal{F} \right\}$$

は X の閉集合の族であって, しかも有限交叉性をもつ. ここでもしも (X,τ) がコンパクト空間であったならば, この集合族のメンバーは共通要素をもつことになる. 補題 7.3 により, **コンパクト空間においては任意の超フィルターが収束する.**

次に (X,τ) がコンパクトでないとすると, 有限交叉性をもつが共通要素のない閉集合の族 $\mathcal{A}$ が存在する. この $\mathcal{A}$ を超フィルター $\mathcal{F}$ に拡大したとすれば,

$$\bigcap\left\{ \mathrm{Cl}\,A \,:\, A \in \mathcal{F} \right\} \subset \bigcap\left\{ A \,:\, A \in \mathcal{A} \right\} = \emptyset$$

なので, ふたたび補題 7.3 により, $\mathcal{F}$ はいかなる点にも収束しない. ということは, **コンパクトでない空間においては収束しない超フィルターが存在する.** 以上をまとめると:

定理 7.4. 位相空間 (X,τ) がコンパクトであるための必要十分条件は X 上の任意の超フィルターが X の点に収束することである．とくにコンパクトなハウスドルフ空間では, 任意の超フィルターがそれぞれただ一つの点に収束する．◀

これがわかれば, チコノフの定理まではあと一息だ．位相空間の族 (X_λ,τ_λ) $(\lambda\in\Lambda)$ が与えられたとしよう．直積集合 $\prod_{\lambda\in\Lambda}X_\lambda$ 上の任意の超フィルター $\mathcal{F}$ に対して, 各因子空間 X_λ における部分集合の族 $\mathcal{F}_\lambda$ を

$$\mathcal{F}_\lambda=\left\{\,E\subset X_\lambda : p_\lambda^{-1}(E)\in\mathcal{F}\,\right\}$$

によって定義する．ここで p_λ は直積集合から X_λ への標準射影である．このとき写像の逆像の性質から:

補題 7.5. 集合族 $\mathcal{F}_\lambda$ は X_λ 上の超フィルターである．◀

もしもすべての (X_λ,τ_λ) がコンパクト空間だったとすれば, フィルター $\mathcal{F}_\lambda$ はそれぞれ X_λ のある点に収束する．そこで, $\mathcal{F}_\lambda$ が X_λ の点 $x(\lambda)$ に収束するように, 直積の点 $x=\langle x(\lambda):\lambda\in\Lambda\rangle$ を選ぼう．

直積空間におけるこの点 x の近傍 A を考える．すると直積位相の定義から, 有限個の添字 $\lambda_0,\ldots,\lambda_n$ と $x(\lambda_0),\ldots,x(\lambda_n)$ の近傍 $U_0\subset X_{\lambda_0},\ldots,X_{\lambda_n}$ がそれぞれにとれて

$$p_{\lambda_0}^{-1}(U_0)\cap\cdots\cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_n)\subset A$$

となる．いま $k=0,\ldots,n$ に対して $\mathcal{F}_{\lambda_k}$ が X_{λ_k} において $x(\lambda_k)$ に収束しているのだから

$$U_0\in\mathcal{F}_{\lambda_0},\ldots,U_n\in\mathcal{F}_{\lambda_n}$$

となるが, そもそもの $\mathcal{F}_\lambda$ の定義に戻ればこれは

$$p_{\lambda_0}^{-1}(U_0)\in\mathcal{F},\ldots,p_{\lambda_n}^{-1}(U_n)\in\mathcal{F}$$

ということだったので, フィルターの性質からこれらの共通部分についても

$$p_{\lambda_0}^{-1}(U_0)\cap\cdots\cap p_{\lambda_n}^{-1}(U_n)\in\mathcal{F},$$

したがって $A\in\mathcal{F}$ となる．このように, x の任意の近傍が超フィルター $\mathcal{F}$ のメンバーになっている．つまり $\mathcal{F}$ は点 x に収束する．このことと定理 7.4 から

定理 7.6. (チコノフの定理) コンパクト位相空間の族の直積空間はまたコンパクト位相空間である．◀

さてこのチコノフの定理の証明では選択公理が二通りに用いられていた．

A: ひとつには, 証明全体が, コンパクト性を超フィルターの収束の形で特徴づけた定理 7.4 にもとづいている．そこでは当然, 超フィルターの存在が前提となっているが, それは一般には選択公理あるいはそれに準ずる集合論的な存在定理の力を借りなければ示すことができない．ただし, 超フィルターというのはブール代数における極大イデアル (同じことだけど, ブール環の素イデアル) の双対的なオブジェクトであることから, ここでの選択公理は, 可換環の素イデアルの存在という仮説で代用できる．

B: もうひとつ, 因子空間 X_λ で超フィルター $\mathcal{F}_\lambda$ が収束することから, その極限点 $x(\lambda)$ を λ 全体にわたって集めて, 直積空間のひとつの点 $x=\langle x(\lambda):\lambda\in\Lambda\rangle$ にまとめ上げた．$\mathcal{F}_\lambda$ の極限点のひとつを $x(\lambda)$ とするという操作を, すべての λ に対して一斉におこなうことが, まさに直積空間の点 $\langle x(\lambda):\lambda\in\Lambda\rangle$ を定めるということにほかならないのだけど, 一般の位相空間では, フィルターが収束する極限点は一つには決まらないから, この操作は, 実は選択公理そのものである．実際, 選択公理を含まない集合論において, 逆にチコノフの定理の結論から選択公理を証明することができるのである．つまり

ということになる.

ところが, 因子空間 X_λ がすべてハウスドルフ空間だった場合には事情が違ってくる. というのも, ハウスドルフ空間においては超フィルターの極限点はただ一つに決まるからで, この場合, 極限点に選択の余地がないため直積空間の点 $\langle x(\lambda) : \lambda \in \Lambda \rangle$ は選択公理を使うまでもなくただ一つに決まってしまう. つまり, ハウスドルフ空間に制限した場合のチコノフの定理の証明では, 上記 **B** の選択公理の使用は避けることができる. とすれば, 話は **A** の可換環の素イデアルの存在の保証だけで済む.

だから, ハウスドルフ空間に制限されたチコノフの定理は, 選択公理の代わりに可換環の素イデアルの存在をもちいて証明することができる. いっぽう, 定理 3.2 では, 一般カントール空間 ${}^R\{0,1\}$ のコンパクト性をもちいて環 R の素イデアルの存在を導いている. 一般カントール空間はコンパクトなハウスドルフ空間としての $\{0,1\}$ の直積なのだから, そのコンパクト性はハウスドルフ空間に制限した場合のチコノフの定理で保証できる. 以上のことをまとめると次のように言える:

定理 7.7. ハウスドルフ空間に制限した場合のチコノフの定理は, 可換環の素イデアルの存在と同値. ◀

本論では, 命題論理のコンパクト性とこれらふたつの定理の同値性を問題にしたのだった.

8 補足 4: 補題 1.4 の証明

以下, Γ^* をなんらかの極大整合的集合とする.

(m4) の証明 (⇒) $A \notin \Gamma^*$ だとすると, 極大性から $\Gamma^* \cup \{A\}$ は整合的でないので, 有限部分集合 $\Delta \subset \Gamma^*$ を $\Delta \cup \{A\}$ が充足不可能になるようにとれる. 任意の有限部分集合 $\Theta \subset \Gamma^*$ に対して, $\Theta \cup \Delta$ も Γ^* の有限部分集合なので充足可能であり, これを充足する解釈 I がとれる. この I は Δ を充足するのに $\Delta \cup \{A\}$ を充足しないのだから A を充足しないわけで, $[\![A]\!]_I = \bot$ となっている. このとき $[\![\neg A]\!]_I = \top$ であり, I は $\Theta \cup \{\neg A\}$ を充足する解釈になっている. 任意の有限部分集合 $\Theta \subset \Gamma^*$ について $\Theta \cup \{\neg A\}$ は充足可能なので, $\Gamma^* \cup \{\neg A\}$ は整合的であり, Γ^* の極大性によって $\neg A \in \Gamma^*$ が成立する.

(⇐) 論理式の真理値の定義から, 論理式の有限集合 $\{A, \neg A\}$ は充足不可能である. だから $\neg A \in \Gamma^*$ ならば $A \notin \Gamma^*$ である.

(m5) の証明 (⇒) $A \in \Gamma^*$ かつ $B \in \Gamma^*$ とする. $\Theta \subset \Gamma^*$ を任意の有限部分集合とすると, $\Theta \cup \{A, B\}$ を充足する解釈 I がとれる. このとき $[\![A]\!]_I = [\![B]\!]_I = \top$ より $[\![A \wedge B]\!]_I = \top$ であり, I は $\Theta \cup \{A \wedge B\}$ を充足する. Θ は任意の有限部分集合だったから $\Gamma^* \cup \{A \wedge B\}$ は整合的であり, 極大性から $A \wedge B \in \Gamma^*$ となる.

(⇐) 逆に $A \wedge B \in \Gamma^*$ のとき任意の有限部分集合 $\Theta \subset \Gamma^*$ について $\Theta \cup \{A \wedge B\}$ は充足可能で, これを充足する解釈 I について $[\![A \wedge B]\!]_I = \top$ より $[\![A]\!]_I = [\![B]\!]_I = \top$ である. つまり I は $\Theta \cup \{A, B\}$ を充足する. Θ は任意の有限部分集合だったから $\Gamma \cup \{A, B\}$ は整合的であり, 極大性から $A \in \Gamma^*$ かつ $B \in \Gamma^*$ となる.

(m6) の証明 (⇒) $A \in \Gamma^*$ が成立しているとする. $\Theta \subset \Gamma^*$ を任意の有限部分集合とすると, $\Theta \cup \{A\}$ を充足する解釈 I がとれる. このとき $[\![A]\!]_I = \top$ であるから $[\![A \vee B]\!]_I = \top$ であり, I は $\Theta \cup \{A \vee B\}$ を充足する解釈になっている. Θ は任意の有限部分であったから $\Gamma^* \cup \{A \vee B\}$ は整合的で, 極大性から $A \vee B \in \Gamma^*$ である. 同様にして $B \in \Gamma^*$ からも $A \vee B \in \Gamma^*$ が導かれる.

(⇐) 逆に $A \vee B \in \Gamma^*$ だったとする. もしも $A \notin \Gamma^*$ だとすると, (m4) から $\neg A \in \Gamma^*$ となっている. $\Theta \subset \Gamma^*$ を任意の有限部分集合とすると $\Theta \cup \{\neg A, A \vee B\}$ を充足する解釈 I がとれる. このとき

$[\![\neg A]\!]_I = [\![A \vee B]\!]_I = \top$ より $[\![B]\!]_I = \top$ であることがわかり, I は $\Theta \cup \{B\}$ を充足する解釈である. Θ は任意の有限部分集合であったから $\Gamma^* \cup \{B\}$ は整合的であり, 極大性から $B \in \Gamma^*$ である.

このように, $A \vee B \in \Gamma^*$ と $A \notin \Gamma^*$ から $B \in \Gamma^*$ が導かれたので, $A \vee B \in \Gamma^*$ から ($A \in \Gamma^*$ または $B \in \Gamma^*$) が導かれる.

(m7) の証明 A の代わりに $\neg A$ を用いて (m6) の場合と同様に議論すればよい.

参考文献

[1] J.L.Bell, **The Axiom of Choice**, College Publications (2009)

[2] 金子晃『数理基礎論講義』サイエンス社, 2010 年

[3] 小林貞一『集合と位相』培風館, 1977 年

[4] S. コッペルベルク (渕野昌 訳)『現代のブール代数』共立出版, 1986 年

[5] 田中尚夫『選択公理と数学 (増訂版)』遊星社, 2005 年

[6] 戸次大介『数理論理学』東京大学出版会, 2012 年

[7] 松坂和夫『集合・位相入門』岩波書店, 1968 年

[8] 篠田寿一・米澤佳己『集合と位相演習』サイエンス社, 1995 年