

# ヒルベルト空間

藤田 博司

2015 年 5 月 1 日起稿  
最終組版 2015 年 5 月 10 日 (703)

## 概要

内積空間とヒルベルト空間, 有界作用素の環などの, 基本のところの復習を清書して残す, 自分のためだけの覚え書き. 不定期に更新する.

## はじめに

本稿では,  $\mathcal{H}$  というのは, 複素数体  $\mathbb{C}$  上のなんらかのベクトル空間をあらわすとする. 本当は, ベクトルを  $\vec{x}$  とか  $x$  とか特別な字体で書くのが親切なのだろうが, 面倒だからしない. ベクトルを  $x, y, z$  などで, スカラー (複素数) を  $\alpha, \beta, \gamma$  などであらわす. 集合論屋としてはギリシャ小文字をスカラーに当てるのは気持ちが悪いが, 本稿では順序数は扱わないからひとまず我慢する.

ゼロベクトルとスカラーのゼロをどちらも  $0$  と書く.

文字  $i$  は添字としても用いられるので, 虚数単位は区別するため  $\mathbf{i}$  と書く. 複素数  $\alpha$  の実部を  $\operatorname{Re} \alpha$  で, 虚部を  $\operatorname{Im} \alpha$  であらわす.  $\alpha$  の共役複素数を  $\bar{\alpha}$  と書く.

## 1 内積

複素数体  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間  $\mathcal{H}$  において, 2 つのベクトルの順序対  $\langle x, y \rangle$  に複素数  $(x, y)$  を対応させる 2 変数の関数が与えられていて, 次の条件をみたしているときに, この関数を  $\mathcal{H}$  における内積とよぶ. 内積の与えられた  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間のことを 内積空間 あるいは 計量ベクトル空間 と呼ぶ.

1.  $(y, x) = \overline{(x, y)}$ ;
2.  $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$ ;
3.  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ ;
4.  $(x, x)$  は実数で, つねに  $\geq 0$ ;
5.  $(x, x) = 0 \iff x = 0$ .

次のことがわかる.

$$(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z), \quad (1)$$

$$(x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x, y) + \bar{\beta}(x, z). \quad (2)$$

自分との内積  $(x, x)$  は常に非負実数なので実数値関数  $\|x\|$  を

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} \quad (3)$$

と定義できる. この  $\|x\|$  が  $x$  の “長さ” の意味をもつことが, いずれ明らかになる. その意味で  $\|x\|$  は重要なのだが, しかし実際に活躍するのは “2 次形式” の  $\|x\|^2$  のほうかもしれない.

定義にしたがって計算すれば,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}(x, y), \quad (4)$$

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Re}(x, y), \quad (5)$$

$$\|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Im}(x, y), \quad (6)$$

$$\|x - iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\operatorname{Im}(x, y). \quad (7)$$

であるから, 中線公式とよばれる等式

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (8)$$

と,  $\|\cdot\|$  から内積を逆算する公式

$$\operatorname{Re}(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2), \quad (9)$$

$$\operatorname{Im}(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2), \quad (10)$$

$$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4}(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2) \quad (11)$$

が得られる.

シュワルツの不等式 というのは, 不等式

$$|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad (12)$$

のことだ. これを証明しよう. 実数  $\theta$  を複素数  $(x, y)$  の偏角とすれば, つまり

$$(x, y) = |(x, y)|(\cos \theta + i \sin \theta)$$

となるように選べば,  $(x, e^{i\theta}y) = |(x, y)|$  になる.  $|e^{i\theta}| = 1$  であるから,  $\|e^{i\theta}y\| = \|y\|$  である. そこで, 一般性をそこなうことなく, もともと  $(x, y) \geq 0$  であったと仮定できる. いま  $t$  を実数の未知数とし,  $(x, y)$  が実数であることを利用して少し計算すると,

$$(tx + y, tx + y) = t^2(x, x) + 2t(x, y) + (y, y)$$

となる. 左辺はつねに  $\geq 0$  であるから右辺の  $t$  の 2 次式としての判別式は  $\leq 0$  である. すなわち  $(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leq 0$  である. よって  $|(x, y)|^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2$ . 両辺の  $\sqrt{\quad}$  をとって  $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ . [証明終]

三角不等式  $\|x\|$  すなわち  $\sqrt{(x, x)}$  が不等式

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (13)$$

をみたくことを証明する. それには両辺を 2 乗した

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\|$$

がいればよい。左辺は等式 (4) により

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y)$$

である。あとはシュワルツの不等式 (12) によって

$$|\operatorname{Re}(x, y)| \leq |(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

となり、求める結果が得られる。[証明終]

ノルム こうして、ベクトル  $x$  の実数値関数  $\|x\|$  はノルムの条件

1.  $\|x\| \geq 0$ ;
2.  $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ;
3. スカラー  $\alpha$  について  $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ ;
4.  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

をみることがわかった。ノルム  $\|x\|$  はいわばベクトル  $x$  の絶対値だが、内積から定まるノルムは、たんなるノルムの条件 1.-4. から得られる絶対値との類比にとどまらず、よりいっそう、幾何的な線分の長さに近いふるまいをする。その理由の一端はあとで論じる“直交性”にある。( § 3)

## 2 内積空間の例

通常  $n$  次元複素数ベクトルの空間  $\mathbb{C}^n$  においては、 $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$  と  $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  の標準的な内積が

$$(x, y) = \xi_1 \overline{\eta_1} + \dots + \xi_n \overline{\eta_n}$$

と定義される。これが内積空間の典型的な例。

行列の内積 複素数の  $m \times n$  行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

のエルミート共役行列とは、 $n \times m$  行列

$$A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \cdots & \overline{a_{m1}} \\ \overline{a_{12}} & \cdots & \overline{a_{m2}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \cdots & \overline{a_{mn}} \end{pmatrix}$$

のことである。また  $n$  次正方行列  $T = (t_{ij})$  のトレースとは、対角成分の和

$$\operatorname{tr} T = \sum_{i=1}^n t_{ii}$$

のことである。いま  $m \times n$  行列の全体  $M(m, n, \mathbb{C})$  において

$$(A, B) = \operatorname{tr}(A(B^*))$$

と定めると、これは内積の条件をみたしており、 $M(m, n, \mathbb{C})$  は  $mn$  次元の内積空間となる。エルミート共役とトレースの定義に従って成分で表せば  $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$  に対して

$$(A, B) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{b_{ij}}$$

であるから、結局この内積空間は  $\mathbb{C}^{mn}$  が姿を変えたものにすぎない。

連続関数の空間 閉区間  $[a, b]$  上の複素数値連続関数全体の集合  $C[a, b]$  は、各点ごとの演算

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t), \quad (\alpha f)(t) = \alpha(f(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

によって  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間となる。このベクトル空間  $C[a, b]$  においては、

$$(f, g) = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

によって内積  $(f, g)$  が定義され、内積空間となる。

数列空間 複素数の数列  $x = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$  のうち、条件

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} |\xi_n|^2 < +\infty$$

をみたすものの全体の集合を  $\ell^2$  と書く。  $x = (\xi_n : n \in \mathbb{N})$  と  $y = (\eta_n : n \in \mathbb{N})$  を  $\ell^2$  の数列とすると、その和とスカラー倍は成分ごとの演算で

$$x + y = (\xi_n + \eta_n : n \in \mathbb{N}), \quad \alpha x = (\alpha \xi_n : n \in \mathbb{N})$$

と定められ、この演算のもとで、 $\ell^2$  は  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間となる\*1。また、 $x$  と  $y$  の内積は

$$(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \xi_n \overline{\eta_n} \tag{14}$$

によって定められる。定義 (14) の無限和が収束することは、不等式

$$|\xi_n \overline{\eta_n}| \leq \frac{1}{2} (|\xi_n|^2 + |\eta_n|^2) \tag{15}$$

から導かれる。

### 3 直交性

さしあたり、定義を羅列する:

- ベクトル  $x$  と  $y$  が直交する  $\stackrel{\text{def}}{\iff} (x, y) = 0$ .
- $x$  と  $y$  が直交することを記号で

$$x \perp y$$

と書く。

---

\*1 もちろん  $\ell^2$  がこれらの演算のもとで閉じていることは、それはそれで証明を要することである。和のもとで  $\ell^2$  が閉じていることの証明には、以下に述べる不等式 (15) によって  $|\xi_n + \eta_n|^2 \leq 2(|\xi_n|^2 + |\eta_n|^2)$  となることが利用される。

- $A, B \subseteq \mathcal{H}$  のとき,  $A \perp B$  とは

$$\forall x \in A \forall y \in B [x \perp y]$$

のことをいう.

- 集合  $A \subseteq \mathcal{H}$  が直交系であるとは,

$$\forall x, y \in A [x \neq y \Rightarrow x \perp y]$$

となっていることをいう.

- とくに添字付きのベクトル系  $\{x_i : i \in I\}$  が直交系であるというときには, 対応  $i \mapsto x_i$  が (ゼロベクトルを除いて) 1 対 1 であることをもふくめる. すなわち,

$$\forall i, j \in I [i \neq j \Rightarrow x_i \perp x_j]$$

となることを要請する.

- 単位ベクトルとは条件  $\|x\| = 1$  をみたす任意のベクトル  $x$  のことである.
- ゼロでないベクトル  $x$  から単位ベクトル  $x/\|x\|$  をつくることを正規化 (あるいは規格化) という. ゼロベクトルだけは正規化できない.

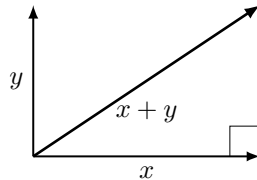
ピタゴラスの定理 言わずと知れた,

$$x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (16)$$

である. これは直交性を仮定しない公式 (4):

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \operatorname{Re}(x, y) \quad (4)$$

に直交性の定義  $(x, y) = 0$  を適用するだけ.



平面的な三角形についてのピタゴラスの定理の場合には, 逆も成立するのだが, 複素数のベクトルの場合は少し注意がいる. 式 (4) によれば,  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$  からわかるのは

$$\operatorname{Re}(x, y) = 0$$

ということだけなのだが,  $x \perp y$  であるためにはこれに加えて

$$\operatorname{Im}(x, y) = 0$$

であることも必要だ. この点を考慮すると, 内積を持つ複素ベクトル空間でのピタゴラスの定理は

$$\begin{aligned} x \perp y &\iff \|x + y\|^2 = \|x + iy\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &\iff \text{すべての } \alpha \text{ について } \|x + \alpha y\|^2 = \|x\|^2 + |\alpha|^2 \cdot \|y\|^2 \\ &\iff \text{すべての } \theta \text{ について } \|x + e^{i\theta} y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \end{aligned} \quad (17)$$

とせねばならないだろう.

正規直交系 添字づけされたベクトル系  $\{x_i : i \in I\}$  について,

- 各  $i \in I$  について  $\|x_i\| = 1$ ,
- $i, j \in I, i \neq j$  のとき  $x_i \perp x_j$

という条件が成立しているとき (つまり  $\{x_i : i \in I\}$  が単位ベクトルばかりからなる直交系のとき) この  $\{x_i : i \in I\}$  のことをひとつの正規直交系という. 英語では orthonormal system なので略して ONS と表記する. いわゆるクローネッカーのデルタ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1: & i = j \text{ のとき;} \\ 0: & i \neq j \text{ のとき} \end{cases}$$

を使うと, 正規直交系の条件は簡単に,

$$(x_i, x_j) = \delta_{ij}$$

と書ける.

ベッセルの不等式 しばらく, ひとつの正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  と, 1本のベクトル  $x$  を固定して考える.

$$\xi_i = (x, u_i)$$

とおこう. このとき添字の任意の有限集合  $I_0 \subseteq I$  について

$$\sum_{i \in I_0} |\xi_i|^2 = \sum_{i, j \in I_0} \xi_i \bar{\xi}_j \delta_{ij} = \sum_{i \in I_0} \sum_{j \in I_0} (\xi_i u_i, \xi_j u_j) = \left\| \sum_{i \in I_0} \xi_i u_i \right\|^2$$

となる. この右辺のベクトルを  $y$  としよう:

$$y = \sum_{i \in I_0} \xi_i u_i$$

このとき

$$(x - y, y) = (x, y) - (y, y) = \sum_{i \in I_0} \bar{\xi}_i (x, u_i) - \sum_{i \in I_0} |\xi_i|^2 = \sum_{i \in I_0} \bar{\xi}_i \xi_i - \sum_{i \in I_0} |\xi_i|^2 = 0$$

なので  $x - y \perp y$  であって, ピタゴラスの定理から

$$\|y\|^2 + \|x - y\|^2 = \|x\|^2$$

となる. したがってとくに  $\sum_{i \in I_0} |\xi_i|^2 = \|y\|^2 \leq \|x\|^2$  である.  $I_0$  が任意の有限集合であったことに注意して上限をとれば, 不等式

$$\sum_{i \in I} |(x, u_i)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{18}$$

が得られる\*2. 任意の正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  と任意のベクトル  $x$  について成立するこの不等式をベッセルの不等式という.

\*2 非負実数の系  $\{\alpha_i : i \in I\}$  の和  $\sum_{i \in I} \alpha_i$  は, 有限部分和の上限と一致し, 実数または  $+\infty$  になる. 一般のスカラーの系  $\{\alpha_i : i \in I\}$  の和は, 次節で説明するベクトルの和と同様に (ノルムとして絶対値を用いて) 定義される.

## 4 ベクトルの無限和

ノルムの定める距離と位相 内積空間では各ベクトル  $x$  に対して  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$  でノルムが定まるのだった。いま,

$$d(x, y) = \|x - y\| \quad (19)$$

によって, 2 変数関数  $d: \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  を定めたとすると, ノルムの条件 1.-4. から

1. つねに  $d(x, y) \geq 0$ ,
2. とくに  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,
3.  $d(x, y) = d(y, x)$ ,
4.  $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

という距離関数の条件が成立することがわかる。すなわち, 内積空間には自然に距離空間の構造が入る。この距離空間としての  $\mathcal{H}$  の位相をノルム位相と呼ぶ。

無限和 ベクトルの系  $\{x_i : i \in I\}$  とベクトル  $x$  の間に次の条件が成立していたとしよう: 任意の正の数  $\varepsilon$  に対して, 有限集合  $I_0$  がとれて,  $I_0 \subseteq J \subseteq I$  をみたく任意の有限集合  $J$  について不等式

$$\left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon$$

が成立する。ひとつの  $\{x_i : i \in I\}$  に対してこの条件をみたく  $x$  が 2 つ以上は存在しない。というのも, もし  $x$  と  $x'$  がそのようなベクトルだったとしたら,  $\varepsilon$  に対して  $I_0$  と  $I'_0$  を

$$I_0 \subseteq J \subseteq I, J: \text{finite} \Rightarrow \left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon$$

かつ

$$I'_0 \subseteq J \subseteq I, J: \text{finite} \Rightarrow \left\| x' - \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon$$

となるようにとれて, とくに  $J = I_0 \cup I'_0$  の場合を考えると

$$\|x - x'\| \leq \left\| x - \sum_{i \in I_0 \cup I'_0} x_i \right\| + \left\| x' - \sum_{i \in I_0 \cup I'_0} x_i \right\| < 2\varepsilon$$

であり,  $\varepsilon$  が任意であったので  $\|x - x'\| = 0$  したがって  $x = x'$  である。

この一意的な  $x$  が存在すれば, われわれはそれをベクトルの系  $\{x_i : i \in I\}$  の和といい,

$$\sum_{i \in I} x_i$$

であらわすことにする。

和をもつベクトル系  $\{x_i : i \in I\}$  は次のコーシー条件をみたく: 任意の正の数  $\varepsilon$  に対して, 有限集合  $I_0$  がとれて,  $I_0 \cap J = \emptyset$  をみたく任意の有限集合  $J \subseteq I$  について不等式

$$\left\| \sum_{i \in J} x_i \right\| < \varepsilon$$

が成立する. 逆にコーシー条件をみたすベクトル系が和をもつとは必ずしも言えないのだが, そのことはあとでいう  $\mathcal{H}$  の完備性に関連している.

命題 4.1 ベクトルの系  $\{x_i; i \in I\}$  がコーシー条件をみたすとき, 可算集合  $I_\infty \subseteq I$  がとれて

$$i \in I \setminus I_\infty \Rightarrow x_i = 0$$

となる.

[証明]  $\varepsilon = 2^{-n}$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) として, コーシー条件により有限集合  $I_n \subseteq I$  を

$$J \cap I_n = \emptyset, J: \text{finite} \Rightarrow \left\| \sum_{i \in J} x_i \right\| < 2^{-n}$$

となるようにとる.  $I_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$  としよう.  $i \in I \setminus I_\infty$  のとき, 各  $n$  で  $\{i\} \cap I_n = \emptyset$  なので  $\|x_i\| < 2^{-n}$  であり, したがって  $\|x_i\| = 0$  すなわち  $x_i = 0$  である. [証明終]

このように, 和をもつベクトル系は実質的には可算な系であり, 無限和は実質的に可算和である.

内積の連続性 ベクトル系  $\{x_i : i \in I\}$  が和  $\sum_{i \in I} x_i$  をもつとき, 任意のベクトル  $y$  について

$$\left( \sum_{i \in I} x_i, y \right) = \sum_{i \in I} (x_i, y)$$

となる, これは  $x = \sum_{i \in I} x_i$  とするとき, 有限の  $J \subseteq I$  について不等式

$$\left| (x, y) - \sum_{i \in J} (x_i, y) \right| = \left| \left( x - \sum_{i \in J} x_i, y \right) \right| \leq \left\| x - \sum_{i \in J} x_i \right\| \cdot \|y\|$$

が成立することからわかる.

とくに, 正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  において,

$$x = \sum_{i \in I} \xi_i u_i$$

であるときには, 各  $i \in I$  について

$$(x, u_i) = \sum_{j \in I} \xi_j (u_j, u_i) = \sum_{j \in I} \xi_j \delta_{ji} = \xi_i,$$

すなわち  $(x, u_i) = \xi_i$  である.

直交系のコーシー条件 いま, とくに  $\{x_i : i \in I\}$  が直交系だったとしよう. このとき, この直交系がコーシー条件をみたすことと

$$\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 < +\infty \tag{20}$$

であることとが同値である.

[証明] まず直交系  $\{x_i : i \in I\}$  がコーシー条件をみたしたとする. このとき,  $I$  は可算集合だと仮定してさしつかえない. そこで  $I = \mathbb{N}$  として議論する. 直交性より各  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$  で



ある. 数列  $\{\|\sum_{i=1}^n x_i\|^2 : n = 1, 2, \dots\}$  はコーシー条件により収束数列であり, したがって上に有界である. その上界  $m$  をとると, すべての  $n \in \mathbb{N}$  で  $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^2 \leq m$  なので,  $\sum_{i \in \mathbb{N}} \|x_i\|^2 \leq m$  となる.

逆に,  $\sum_{i \in I} \|x_i\|^2 < +\infty$  だったとする. この場合も  $I$  が可算集合であったと仮定してさしつかえないので,  $I = \mathbb{N}$  とする.  $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|^2 < +\infty$  より, 任意の正の数  $\varepsilon$  に対し番号  $n$  がとれて  $\sum_{i=n+1}^{\infty} \|x_i\|^2 < \varepsilon^2$  となる. もしも  $J \subseteq \mathbb{N}$  が有限かつ  $J \cap \{1, \dots, n\} = \emptyset$  ならば  $\sum_{i \in J} \|x_i\|^2 < \varepsilon^2$ , したがって (直交性より)

$$\left\| \sum_{i \in J} x_i \right\|^2 = \sum_{i \in J} \|x_i\|^2 < \varepsilon^2$$

となるから  $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$  はコーシー条件をみたす. [証明終]

とくに正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  に対してベクトル  $x$  から  $\xi_i = (x, u_i)$  と係数を定めて作ったベクトルの系  $\{\xi_i u_i : i \in I\}$  はコーシー条件をみたす. これはベッセルの不等式によって

$$\sum_{i \in I} |\xi_i|^2 \leq \|x\|^2$$

だからである.

完全正規直交系 正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  が完全であるとは, すべてのベクトル  $x$  について, ベッセルの不等式における等号

$$\sum_{i \in I} |(x, u_i)|^2 = \|x\|^2$$

が成立することをいう. “完全正規直交系” は英語では complete orthonormal system なので, しばしば CONS と略記される.

正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  についての次の 4 つ条件を検討しよう:

- (O1)  $\{u_i : i \in I\}$  は完全正規直交系である.
- (O2) すべてのベクトル  $x$  について,  $\{(x, u_i)u_i : i \in I\}$  が和  $x$  をもつ:

$$x = \sum_{i \in I} (x, u_i) u_i.$$

- (O3) すべての  $u_i$  と直交するベクトルはゼロベクトルに限る. いいかえれば,

$$(\forall i \in I)[x \perp u_i] \Rightarrow x = 0$$

が成立する.

- (O4)  $\{u_i : i \in I\}$  は正規直交系として極大である. すなわち, それを真に含む正規直交系が存在しない.

命題 4.2 正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  について,

- (a) 条件 (O1) と (O2) は同値である.
- (b) 条件 (O3) と (O4) は同値である.
- (c) 条件 (O1) と (O2) をみたす正規直交系は条件 (O3) と (O4) をみたす. いいかえれば, 完全正規直交系は極大正規直交系である.

となると、正規直交系の極大性と完全性は同値ではないのか、という疑問が生じるのは当然だ。実は、両者が同値であるためには、空間に 完備性 の条件がつく。その話に進む前に、完備性のない内積空間には、極大だが完全でない正規直交系がありうることをみよう。

極大だが完全でない正規直交系の例 数列空間  $\ell^2$  において、 $u_n$  は第  $n$  項だけが 1 で他の項が 0 の数列とし、また

$$v = \left( \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right)$$

とする。  $\{v\} \cup \{u_n : n \geq 2\}$  から代数的に生成される  $\ell^2$  の部分空間を  $\mathcal{H}$  としよう。  $\mathcal{H}$  の要素は一般に、有限和

$$x = \alpha v + \sum_{n=1}^N \beta_n u_n$$

であらわされる。  $n > N$  に対しては  $\beta_n = 0$  となっているとしよう。このとき  $n = 2, 3, \dots$  について

$$(x, u_n) = \frac{\alpha}{n} + \beta_n$$

である。もしもすべての  $n \geq 2$  について  $(x, u_n) = 0$  であるなら  $n > N$  の場合を考えると  $\alpha = 0$  とわかり、さらに  $n = 1, \dots, N$  について  $\beta_n = 0$  が得られるから、結局  $x = 0$  である。したがって、正規直交系  $\{u_n : n \geq 2\}$  は極大である。ところが、

$$\sum_{n=2}^{\infty} |(x, u_n)|^2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \|x\|^2$$

であるから、正規直交系  $\{u_n : n \geq 2\}$  は完全ではない。

いっぽう、この例での  $\mathcal{H}$  の生成元を

$$v, u_2, u_3, u_4, \dots$$

の順に並べて、シュミットの直交化法を適用すれば、完全正規直交系が得られる。つまり、極大正規直交系の取り方によって、完全正規直交系が得られる場合もあれば、完全でない極大正規直交系が得られる場合もある。このように考えると、可分な内積空間は、可算生成の稠密な部分空間をもつことにより、必ず完全正規直交系をもつことになる。

問題 いくつかの正規直交系も完全でないような (必然的に可分でなく完備でもない) 内積空間の例はあるか。

完備な空間 内積空間には、ノルムによって定まる距離空間の構造が入っている。

命題 4.3 内積空間  $\mathcal{H}$  について次の (C1) ~ (C3) は同値である。

- (C1) 内積から定める距離のもとで完備である。
- (C2) コーシー条件をみたすベクトル系  $\{x_i : i \in I\}$  がいつでも和をもつ。
- (C3) 任意の正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  とスカラーの系  $\{\xi_i : i \in I\}$  について、

$$\sum_{i \in I} |\xi_i|^2 < +\infty$$

であるかぎり無限和

$$\sum_{i \in I} \xi_i u_i$$

が存在する。

[証明] 条件 (C3) から条件 (C1) が導かれることだけは自明ではないので、そこだけ概略を述べよう。コーシー列  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  に対して、その生成する部分空間  $\mathcal{M}$  を考えよう。  $\mathcal{M}$  が有限次元だったら問題はないので、以下  $\mathcal{M}$  が無限次元だったとする。とくに、  $x_n$  が互いに 1 次独立だったと仮定しても、一般性は損なわれない。このとき、系列  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  は  $\mathcal{M}$  の基底になっている。この基底にシュミットの直交化法を適用することによって、  $\mathcal{M}$  における完全正規直交基底を取りだせる。この完全正規直交系の存在と条件 (C3) によって、  $\mathcal{H}$  における  $\mathcal{M}$  の閉包の上へ、数列空間  $\ell^2$  から線形かつ等長の対応が得られる。コーシー列  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  の極限の存在は、この等長同型写像を介して、  $\ell^2$  の完備性 (第 5 節) によって保証されることになる。 [証明終]

複素数体  $\mathbb{C}$  上の、完備な内積空間のことを ヒルベルト空間 とよぶ。

命題 4.4 ヒルベルト空間においては、極大な正規直交系は完全である。

[証明] 完備な内積空間  $\mathcal{H}$  において、正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  を考える。いま、正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  が完全でなく、あるベクトル  $x$  についてベッセルの不等式における等号が成立していないと仮定しよう。すなわち、

$$\sum_{i \in I} |(x, u_i)|^2 < \|x\|^2$$

となっていたと仮定しよう。このとき、完備性により、無限和

$$y = \sum_{i \in I} (x, u_i) u_i \tag{21}$$

が存在する。これに対して、  $x - y \perp y$  が成立し、ピタゴラスの定理から

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - \|y\|^2 > 0,$$

したがって、  $x - y \neq 0$  である。ところが、すべての  $i \in I$  について、  $(y, u_i) = (x, u_i)$  であるから  $x - y \perp u_i$  で、したがって  $\{u_i : i \in I\}$  は正規直交系として極大でないことになる。 [証明終]

命題 4.5 ヒルベルト空間は完全正規直交系をもつ。

[証明] ツォルンの補題を用いて極大正規直交系を取り出せば、前の命題によりそれが完全正規直交系である。 [証明終]

## 5 数列空間 $\ell^2$ の完備性

すでに一度利用しているが、  $\ell^2$  の完備性を改めてきちんと証明する。

コーシー列  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  が与えられたとしよう。ここでは各  $x_n$  が  $\ell^2$  に属する数列なので、

$$x_n = (\xi_{n,k} : k \in \mathbb{N}) \quad (n \in \mathbb{N})$$

とする。コーシー列であるという条件は

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \in \mathbb{N} \left[ m \geq n \geq N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon \right]$$

である。  $\|x_m - x_n\| < \varepsilon$  のとき各  $k$  ごとに

$$|\xi_{m,k} - \xi_{n,k}| \leq \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

であるから,  $k$  を固定するごとに数列  $(\xi_{n,k} : k \in \mathbb{N})$  が複素数のコーシー列になっている. そこで, 極限值

$$\xi_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n,k}$$

が定まる.  $x_\infty = (\xi_k : k \in \mathbb{N})$  としよう.

補題 5.1 この  $x_\infty$  は  $\ell^2$  に属する.

[証明] 番号  $K \in \mathbb{N}$  を固定するごとに,

$$\sum_{k=1}^K |\xi_k|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K |\xi_{n,k}|^2$$

が成立する. いま  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  が  $\ell^2$  のコーシー列であることから, 数列  $(\|x_n\| : n \in \mathbb{N})$  は有界であって,

$$\sum_{k=1}^K |\xi_k|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K |\xi_{n,k}|^2 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^2 < +\infty$$

となる. 不等式

$$\sum_{k=1}^K |\xi_k|^2 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^2$$

の右辺は  $K$  に依存しないので,  $K \rightarrow \infty$  の極限をとって

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|^2$$

したがって  $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2$  は有限で,  $x_\infty$  は  $\ell^2$  に属する. [証明終]

ほぼ同様の論法で, ベクトルの列  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  が  $\ell^2$  のノルムの意味で  $x_\infty$  に収束することを示せる.

補題 5.2  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\|x_\infty - x_n\| \rightarrow 0$ .

[証明]  $\varepsilon$  が与えられたとして, 番号  $N \in \mathbb{N}$  を

$$m \geq n \geq N \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

となるようにとる.  $K \in \mathbb{N}$  を固定するごとに,

$$n \geq N \Rightarrow \sum_{k=1}^K |\xi_k - \xi_{n,k}|^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K |\xi_{m,k} - \xi_{n,k}|^2 \leq \varepsilon^2$$

となり, 最右辺の  $\varepsilon^2$  が  $K$  に依存しないので,  $K \rightarrow \infty$  の極限をとって

$$n \geq N \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k - \xi_{n,k}|^2 \leq \varepsilon^2$$

したがって

$$n \geq N \Rightarrow \|x_\infty - x_n\| \leq \varepsilon$$

となる. [証明終]

## 6 完備化

一般に距離空間はその完備化と呼ばれる完備距離空間の稠密部分集合の上に等長写像でうつせる。内積空間の場合、完備化がまた内積空間、したがってヒルベルト空間になることが重要だ。

命題 6.1 内積空間  $\mathcal{H}$  に対して次の条件をみたす内積空間  $\widehat{\mathcal{H}}$  と写像  $h: \mathcal{H} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}$  が存在する

- (a)  $\widehat{\mathcal{H}}$  は内積の定める距離のもとで完備で、したがってヒルベルト空間である。
- (b)  $h$  は線形写像である。
- (c)  $h$  は内積を保つ。すなわち、 $x, y \in \mathcal{H}$  のとき  $(h(x), h(y))_{\widehat{\mathcal{H}}} = (x, y)_{\mathcal{H}}$  である。
- (d)  $h$  は等長写像である。すなわち、 $x \in \mathcal{H}$  のとき  $\|h(x)\|_{\widehat{\mathcal{H}}} = \|x\|_{\mathcal{H}}$  である。
- (e)  $h$  の値域は  $\widehat{\mathcal{H}}$  の稠密部分集合である、すなわち任意の  $y \in \widehat{\mathcal{H}}$  と、任意の正の数  $\varepsilon > 0$  について、 $x \in \mathcal{H}$  をうまくとって

$$\|y - h(x)\|_{\widehat{\mathcal{H}}} < \varepsilon$$

とできる。

蛇足かもしれないが、証明の概略を書こう。 $\mathcal{H}$  の内積の定める距離関数の意味でコーシー列になっているような  $\mathcal{H}^{\mathbb{N}}$  の要素の全体を  $\mathcal{C}$  と書こう。また、ゼロに収束する列になっているような  $\mathcal{H}^{\mathbb{N}}$  の要素の全体を  $\mathcal{C}_0$  と書こう:

$$\mathcal{C} = \{ (x_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} (\sup_{m \geq n} \|x_m - x_n\|) = 0 \}, \quad (22)$$

$$\mathcal{C}_0 = \{ (x_n : n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{H}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0 \}. \quad (23)$$

このとき、成分ごとの演算で  $\mathcal{C}$  も  $\mathcal{C}_0$  も複素ベクトル空間になっている。また、 $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$  である。次に、各  $x \in \mathcal{H}$  を無限列

$$T(x) = (x, x, x, \dots)$$

に送る写像  $T$  を考える。これは  $\mathcal{H}$  を  $\mathcal{C}$  の中へうつす線形写像で、単射である。

列  $x = (x_n : n \in \mathbb{N})$  と  $y = (y_n : n \in \mathbb{N})$  を  $\mathcal{C}$  からとると、数列  $((x_n, y_n)_{\mathcal{H}} : n \in \mathbb{N})$  を得る。この数列は

$$|(x_m, y_m) - (x_n, y_n)| \leq |(x_m - x_n, y_m)| + |(x_n, y_m - y_n)| \leq \|x_m - x_n\| \cdot \|y_m\| + \|x_n\| \cdot \|y_m - y_n\|$$

であることからわかるように、複素数のコーシー列である。そこで極限值

$$((x, y)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n)$$

が定まる。この  $((\cdot, \cdot))$  は

- すべての  $x \in \mathcal{C}$  について  $((x, x)) \geq 0$  である。
- とくに  $((x, x)) = 0 \iff x \in \mathcal{C}_0$  である。
- $((x, y)) = \overline{((y, x))}$  である。
- $((x + y, z)) = ((x, z)) + ((y, z))$  である。
- 任意のスカラー  $\alpha$  について  $((\alpha x, y)) = \alpha((x, y))$  である。

となっていて、ほとんど内積である。また

- $x, y \in \mathcal{H}$  のとき  $((T(x), T(y))) = (x, y)$

となっている。

いま2つのコーシー列  $x, y \in \mathcal{C}$  について、 $x - y \in \mathcal{C}_0$  であるときに  $x$  と  $y$  は同値だといひ  $x \equiv y$  と書くことにする。このとき次のことが成立する。

- すべてのコーシー列  $x$  について  $x \equiv x$ .
- $x \equiv y$  のとき  $y \equiv x$ .
- $x \equiv y, y \equiv z$  のとき  $x \equiv z$ .
- $x \equiv x', y \equiv y'$  のとき  $x + y \equiv x' + y'$ .
- $x \equiv x'$  のとき任意のスカラー  $\alpha$  について  $\alpha x \equiv \alpha x'$ .
- $x \equiv x', y \equiv y'$  のとき  $((x, y)) = ((x', y'))$ .
- $x, y \in \mathcal{H}$  のとき  $T(x) \equiv T(y)$  は  $x = y$  と同値.

こうして、 $\equiv$  は  $\mathcal{C}$  における同値関係であり、また  $\mathcal{C}$  における和とスカラー倍は  $\equiv$  と整合する。また  $((\cdot, \cdot))$  も  $\equiv$  のもとで不変である。そこで商集合  $\mathcal{C}/\equiv$  を  $\widehat{\mathcal{H}}$  とすると、 $\widehat{\mathcal{H}}$  には  $\mathcal{C}$  上の演算から複素ベクトル空間の構造が入り、 $((\cdot, \cdot))$  から内積が入る。  $T(x)$  の属する同値類を  $h(x)$  とすることで、写像  $h: \mathcal{H} \rightarrow \widehat{\mathcal{H}}$  が定められる。

命題 (a) と (e) は一般の距離空間の完備化と同じことだし、(b) から (d) までは上の構成からわかる。

## 7 直交補空間

内積空間  $\mathcal{H}$  の部分集合  $A$  に対して

$$A^\perp = \{ x \in \mathcal{H} : \forall a \in A [(x, a) = 0] \}$$

で定まる  $A^\perp$  を  $A$  の直交補空間という。任意の  $A \subseteq \mathcal{H}$  に対して、 $A^\perp$  は  $\mathcal{H}$  の閉部分空間である。次のことが成立する:

$$A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp, \tag{24}$$

$$\{0\}^\perp = \mathcal{H}, \tag{25}$$

$$\mathcal{H}^\perp = \{0\}, \tag{26}$$

$$A \cap A^\perp \subseteq \{0\}, \tag{27}$$

$$A \subseteq A^{\perp\perp} \tag{28}$$

式 (24) と (28) から、

$$A^{\perp\perp\perp} = A^\perp \tag{29}$$

となる。

命題 7.1 ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の閉部分空間  $\mathcal{M}$  について  $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$  となる。

[証明]  $\mathcal{M}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{M}$  を示せばよい。  $\mathcal{M}$  は  $\mathcal{H}$  の内積のもとでヒルベルト空間になる。そこで、 $\mathcal{M}$  の完全正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  を考える。任意の  $x \in \mathcal{H}$  に対して、 $\xi_i = (x, u_i)$  とすると  $\sum_{i \in I} |\xi_i|^2 \leq \|x\|^2$  なので  $\mathcal{H}$

の完備性から、和

$$y := \sum_{i \in I} \xi_i u_i$$

が存在し、 $M$  に属する。このとき各  $i \in I$  について

$$(x - y, u_i) = (x, u_i) - \sum_{j \in I} \xi_j (u_j, u_i) = \xi_i - \xi_i = 0$$

なので、すべての  $i \in I$  で  $(x - y, u_i) = 0$  であり、このことからすべての  $z \in M$  について

$$(x - y, z) = \left( x - y, \sum_{i \in I} (z, u_i) u_i \right) = \sum_{i \in I} (z, u_i) (x - y, u_i) = 0,$$

となる。したがって  $x - y \in M^\perp$  である。ここでとくに  $x \in M^{\perp\perp}$  であった場合を考えよう。このとき  $(x, x - y) = 0$  である。いっぽう  $y \in M$  より  $(x - y, y) = 0$  でもあって

$$(x - y, x - y) = (x, x - y) - (y, x - y) = 0 - 0 = 0$$

したがって  $\|x - y\| = 0$ ,  $x = y \in M$  となる。  $x$  は  $M^{\perp\perp}$  の任意の要素でよいため、  $M^{\perp\perp} \subseteq M$  である。 [証明終]

いっぽう、 $\mathcal{H}$  が完備でない場合、たとえ  $M$  が  $\mathcal{H}$  の閉部分空間であっても、  $M^{\perp\perp} = M$  となる保証はない。これは、 $\mathcal{H}$  に完全でない極大正規直交系  $\{u_i : i \in I\}$  が存在した場合がそうで、すべての  $u_i$  を含む最小の閉部分空間を  $M$  とすると、  $M$  は  $\mathcal{H}$  全体ではないのに、  $M^\perp = \{0\}$  となり、したがって  $M^{\perp\perp} = \mathcal{H} \supsetneq M$  になってしまう。

**正射影の存在と一意性** 前のパラグラフの命題では、ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の閉部分空間  $M$  とベクトル  $x \in \mathcal{H}$  に対して、

$$y \in M, \quad x - y \in M^\perp$$

をみたく  $y$  の存在を利用した。そこでは  $M$  の完全正規直交系を利用して  $y$  を求めたので、正規直交系の取り方に  $y$  が依存するようにも見えたが、実際には  $y$  と  $y'$  が  $y \in M, y' \in M, x - y \in M^\perp, x - y' \in M^\perp$  をみたせば、

$$M \ni y - y' = (x - y') - (x - y) \in M^\perp$$

なので  $y - y' \in M \cap M^\perp = \{0\}$ , したがって  $y = y'$  であるから、このような  $y$  は一意的である。まとめると、

**命題 7.2**  $\mathcal{H}$  をヒルベルト空間とし  $M$  を  $\mathcal{H}$  の任意の閉部分空間とする。  $x \in \mathcal{H}$  を任意の要素とするとき、これに対して  $y$  を

$$y \in M, \quad x - y \in M^\perp$$

となるようにとれる。しかもそのような  $y$  は  $x$  に対して唯一つに決まる。

この命題にいう  $y$  を  $x$  の  $M$  への正射影という。

正射影によって、 $\mathcal{H}$  の任意の要素  $x$  を  $x = y + z, y \in M, z \in M^\perp$  という和であらわす方法が、ただひとつ存在することがわかる。すなわち、 $\mathcal{H}$  は  $M$  とその直交補空間  $M^\perp$  の直和に分かれる:

$$\mathcal{H} = M \oplus M^\perp. \tag{30}$$

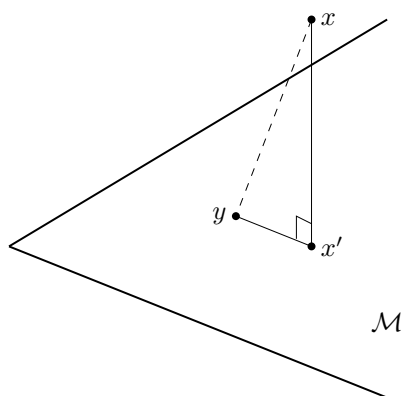
最短距離 ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の要素  $x \in \mathcal{H}$  の、閉部分空間  $\mathcal{M}$  への正射影を、いま仮に  $x'$  と書いたとする。このとき

$$\|x - x'\| = \min\{\|x - y\| : y \in \mathcal{M}\} \quad (31)$$

が成立する。なぜなら、一般に  $y \in \mathcal{M}$  のとき  $x' - y \in \mathcal{M}$  で、これと  $x - x' \in \mathcal{M}^\perp$  からピタゴラスの定理により

$$\|x - y\|^2 = \|x - x'\|^2 + \|x' - y\|^2 \geq \|x - x'\|^2$$

となるから。



(正射影の幾何的描像)

連続線形汎函数に関するリースの定理 一般に、複素数体  $\mathbb{C}$  上のベクトル空間  $V$  から  $\mathbb{C}$  への線形写像を  $V$  上の線形汎函数と呼ぶ。リースの定理は、ヒルベルト空間上の連続な線形汎函数の形を決定するものだ。

定理 7.3 (リースの定理)  $\mathcal{H}$  をヒルベルト空間とし、 $\lambda: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  を連続な線形汎函数とすると、ある  $y \in \mathcal{H}$  がとれて

$$\lambda(x) = (x, y) \quad (\forall x \in \mathcal{H}) \quad (32)$$

となる。しかも、そのような  $y$  は唯一つに定まる。

[証明] 線形汎函数  $\lambda$  の核を仮に  $\mathcal{M}$  と書いたとしよう:

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{H} : \lambda(x) = 0\}.$$

このとき、 $\lambda$  が連続かつ線形であることにより、 $\mathcal{M}$  は  $\mathcal{H}$  の閉部分空間である。もしも  $\mathcal{M}$  が  $\mathcal{H}$  全体であるとすれば、 $\lambda$  は恒等的にゼロであるような汎函数なのだから、 $y = 0$  とすればよい。そこで以下では  $\mathcal{M} \neq \mathcal{H}$  の場合を考える。このとき  $\mathcal{M}^\perp \neq \{0\}$  である(ここで  $\mathcal{H}$  の完備性が必要)。そこで  $\mathcal{M}^\perp$  に属する単位ベクトル  $u$  をとろう。すると、任意の  $x \in \mathcal{H}$  について

$$\lambda(\lambda(u)x - \lambda(x)u) = \lambda(u)\lambda(x) - \lambda(x)\lambda(u) = 0$$

なので  $\lambda(u)x - \lambda(x)u \in \mathcal{M}$  である。いま  $u \in \mathcal{M}^\perp$  であるから

$$0 = (\lambda(u)x - \lambda(x)u, u) = \lambda(u)(x, u) - \lambda(x)(u, u) = \lambda(u)(x, u) - \lambda(x)$$



すなわち,  $\lambda(x) = \lambda(u)(x, u)$  である. そこで  $y = \lambda(u)u$  とすれば, すべての  $x \in \mathcal{H}$  について  $\lambda(x) = (x, y)$  となる.

このような  $y$  の一意性について: もしもすべての  $x$  について

$$\lambda(x) = (x, y) = (x, y')$$

であれば,  $x = y - y'$  の場合を考えて

$$\|y - y'\|^2 = (y - y', y - y') = (y - y', y) - (y - y', y') = \lambda(y - y') - \lambda(y - y') = 0$$

したがって  $y = y'$  となる. [証明終]

空間の完備性に依存していることを証明の途中で強調しておいたとおり, 完備でない内積空間ではリースの定理は成立しない. 実際,  $\mathcal{H}$  が完備でなかったとすると, 完備化  $\widehat{\mathcal{H}}$  から  $\mathcal{H}$  にない要素  $y$  をとってきて  $\lambda(x) = (x, y)$  とすれば, この  $\lambda$  も  $\mathcal{H}$  上の連続線形汎函数なのに,  $\mathcal{H}$  の要素との内積では表現しようがない.

## 8 線形作用素

抽象的なセッティングでは線形作用素といっても単に線形写像のことなのだが, 具体的に函数空間を相手にしている場合には, 函数に函数を対応させる写像というよりは, 「微分という操作」「フーリエ変換という操作」をほどこす, という感覚が強いので, やはり作用素 (オペレーター) という言葉がしっくりくる. それにターゲットがスカラーの空間  $\mathbb{C}$  である線形汎函数も, ターゲットがベクトルの空間である線形作用素も, どちらも線形写像なのだから, 線形作用素という言葉は線形写像というコンセプトの下位分類と考えておこう.

以下しばらく, 2つのヒルベルト空間  $\mathcal{H}_1$  と  $\mathcal{H}_2$  の間の線形写像について考える. 写像

$$T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$$

が線形写像であるというのは, それが和とスカラー倍を保つこと,

$$T(x + y) = T(x) + T(y), \quad T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad (33)$$

である. このことから有限の線形結合については, 線形写像  $T$  がそれを保つこと, すなわち

$$T\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i T(x_i) \quad (34)$$

となることがわかる. ヒルベルト空間においては無限和が意味をもつので, 同様の式が無限和について成立するかどうかが問題になる. そのひとつの十分条件として, 線形写像の連続性をまず検討する.

有界線形作用素 線形作用素  $T: \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  についての次の条件 (B1)–(B6) は同値である.

(B1)  $\sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} < +\infty$  が成立する.

(B2)  $T$  は有界である, すなわちある定数  $M$  について

$$\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\| \quad (\forall x \in \mathcal{H}_1)$$

が成立する.

(B3)  $T$  はリプシッツ連続である. すなわちある定数  $L$  について

$$\|T(x) - T(y)\| \leq L \cdot \|x - y\| \quad (\forall x, y \in \mathcal{H}_1)$$

が成立する.

(B4)  $T$  は一様連続である.

(B5)  $T$  は連続である.

(B6)  $T$  は定義域のゼロ元  $0$  において連続である.

ただし各種の連続性はすべて内積の定める距離に関するもの.

[証明] (B1) の上限値が (B2) の定数  $M$  として使え, (B2) の定数  $M$  は (B3) の定数  $L$  として使える. (B3) $\Rightarrow$ (B4), (B4) $\Rightarrow$ (B5), (B5) $\Rightarrow$ (B6) はそれぞれの定義から明らか. (B6) $\Rightarrow$ (B1) の対偶を示す: (B1) が成立していないとすれば,  $n = 1, 2, \dots$  に対して

$$\|u_n\| = 1, \quad \|T(u_n)\| \geq n$$

をみたすベクトル  $u_n$  がとれる.  $x_n = (1/n)u_n$  としよう. すると

$$\|x_n\| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

なので列  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  はゼロベクトルに収束するが, つねに

$$\|T(x_n) - T(0)\| = \|T(x_n)\| = \frac{1}{n} \|T(u_n)\| \geq 1$$

なので列  $(T(x_n) : n \in \mathbb{N})$  のほうは  $T(0)$  に収束しない. したがって (B6) が成立していない. [証明終]

ここで同値性を示した条件をみたす線形作用素のことを 有界線形作用素 という. 定義域が  $\mathcal{H}_1$  でターゲットが  $\mathcal{H}_2$  の有界線形作用素全体のなす集合を  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  と書く. 定義域とターゲットが一致している場合は  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1)$  のように書く.

作用素ノルム 有界線形作用素の全体  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  は作用素の和とスカラー倍のもとで複素ベクトル空間となる. ここで  $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  の和  $S + T$  とスカラー倍  $\alpha T$  は

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x) \tag{35}$$

$$(\alpha T)(x) = \alpha T(x) \tag{36}$$

によって定義される.

有界線形作用素  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  に対して  $\|T\|$  を

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\} \tag{37}$$

と定義しよう. 次のことがわかる.

- $\|T\|$  はすべての  $x \in \mathcal{H}_1$  について

$$\|T(x)\| \leq M \cdot \|x\| \tag{38}$$

が成り立つような定数  $M$  のうちの最小のものである.

- $\|T\|$  はすべての  $x \in \mathcal{H}_1$  と  $y \in \mathcal{H}_2$  について

$$|(T(x), y)| \leq M \cdot \|x\| \cdot \|y\| \quad (39)$$

が成り立つような定数  $M$  のうちで最小のものである.

- 等式

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \quad (40)$$

が成立する.

和とスカラー倍についても, 定義に従って計算すれば

$$\|S + T\| \leq \|S\| + \|T\|, \quad \|\alpha T\| = |\alpha| \cdot \|T\| \quad (41)$$

がわかるから, 作用素の  $\|\cdot\|$  は  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  上のノルムになっている. さらに  $\mathcal{H}_2$  の完備性によって, 作用素ノルムのもとでの  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  の完備性が保証され,  $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  はバナッハ空間となる.

線形作用素の合成についての次の事実も定義から直接確かめられる

- $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3)$  のとき,  $TS \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_3)$  で, 不等式

$$\|TS\| \leq \|T\| \cdot \|S\|$$

が成立する.

随伴作用素 有界線形作用素  $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  と  $y \in \mathcal{H}_2$  を固定したとき,  $x \in \mathcal{H}_1$  に内積  $(T(x), y)$  を対応させる写像は  $\mathcal{H}_1$  上の線形汎函数であるから, リースの定理によって, 一意な  $y^* \in \mathcal{H}_1$  がとれて,

$$(T(x), y) = (x, y^*) \quad (\forall x \in \mathcal{H}_1)$$

となる. この  $y^*$  は  $T$  と  $y$  に依存して決まるので, これを  $T^*(y)$  と書くと, 写像  $T^*: \mathcal{H}_2 \rightarrow \mathcal{H}_1$  が得られる:

$$(T(x), y) = (x, T^*(y)) \quad (x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2). \quad (42)$$

この  $T^*$  が線形作用素であることを確かめよう. まず

$$\begin{aligned} (x, T^*(y_1 + y_2)) &= (T(x), y_1 + y_2) \\ &= (T(x), y_1) + (T(x), y_2) \\ &= (x, T^*(y_1)) + (x, T^*(y_2)) \\ &= (x, T^*(y_1) + T^*(y_2)) \end{aligned}$$

であるからすべての  $x \in \mathcal{H}_1$  について  $(x, T^*(y_1 + y_2)) = (x, T^*(y_1) + T^*(y_2))$  であり, とくに  $x = T^*(y_1 + y_2) - (T^*(y_1) + T^*(y_2))$  の場合を考えると

$$T^*(y_1 + y_2) = T^*(y_1) + T^*(y_2)$$

すなわち  $T^*$  が和を保つことがわかる. また, スカラー  $\alpha$  について

$$\begin{aligned} (x, T^*(\alpha y)) &= (T(x), \alpha y) \\ &= \bar{\alpha}(T(x), y) \\ &= \bar{\alpha}(x, T^*(y)) \\ &= (x, \alpha T^*(y)) \end{aligned}$$

であるから  $T^*(\alpha y) = \alpha T^*(y)$  で、 $T^*$  はスカラー倍を保つ。

こうして、 $T^*$  は  $\mathcal{H}_2$  を定義域とし  $\mathcal{H}_1$  をターゲットとする線形作用素である。さらに、任意の  $x \in \mathcal{H}_1$  と  $y \in \mathcal{H}_2$  について

$$|(x, T^*(y))| = |(T(x), y)| \leq \|T\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

であるから  $T^*$  は有界線形作用素でもあって、 $\|T^*\| \leq \|T\|$  であるが、同様に

$$|(T(x), y)| = |(x, T^*(y))| \leq \|T^*\| \cdot \|x\| \cdot \|y\|$$

でもあるので、 $\|T\| \leq \|T^*\|$  も成立する。したがって一般に、

$$\|T^*\| = \|T\| \quad (43)$$

である。式 (42) から

$$T^{**} = T \quad (44)$$

である。また、これも定義にもとづいて計算すれば

$$(S + T)^* = S^* + T^*, \quad (\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^* \quad (45)$$

となる。したがって対応  $T \mapsto T^*$  は線形写像ではない。

作用素  $T$  に対して、 $T^*$  をその 随伴作用素、あるいは エルミート共役作用素 という。

たとえば数ベクトル空間  $\mathbb{C}^n$  から  $\mathbb{C}^m$  への線形写像を  $m \times n$  行列  $A = (\alpha_{ij})$  で表現した場合、その随伴作用素はエルミート共役行列  $A^* = {}^t \bar{A} = (\bar{\alpha}_{ji})$  で表現される。

## 9 バナッハの共鳴定理

ここではヒルベルト空間  $\mathcal{H}_1$  を定義域とする有界線形作用素の族についての表記の定理を証明する。

いま  $B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  に属する線形作用素の族  $\{T_i : i \in I\}$  が与えられているとして、各  $x \in \mathcal{H}_1$  ごとに、値の全体  $\{T_i(x) : i \in I\}$  が  $\mathcal{H}_2$  において有界集合になっていると仮定する：

$$\forall x \in \mathcal{H}_1 \left( \sup \{ \|T_i(x)\| : i \in I \} < +\infty \right). \quad (46)$$

バナッハの共鳴定理は、このとき族  $\{T_i : i \in I\}$  自体が作用素ノルムの意味で有界集合になっていると主張する：

$$\sup \{ \|T_i\| : i \in I \} < +\infty. \quad (47)$$

これを証明するために、自然数  $k = 1, 2, 3, \dots$  に対して

$$F_k = \left\{ x \in \mathcal{H}_1 : \sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq k \|x\| \right\}$$

とおく。式 (46) のおかげで、

$$\mathcal{H}_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$$

となっている。

補題 9.1 各  $F_k$  は  $\mathcal{H}_1$  のノルム位相の意味で閉集合である.

[証明]  $\mathcal{H}_1$  の点列  $(x_n : n \in \mathbb{N})$  がノルム位相の意味で点  $x$  に収束したとしよう. このとき各  $T_i$  が有界線形作用素であることから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i(x_n) - T_i(x)\| = 0$$

となっているので,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_i(x_n)\| = \|T_i(x)\|$$

も成立し, また  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \|x\|$  も成立する. いま, 各  $x_n$  が集合  $F_k$  から取られたとすると, 各  $i \in I$  と各  $n \in \mathbb{N}$  について不等式

$$\|T_i(x_n)\| \leq k\|x_n\|$$

が成立しているので,  $n \rightarrow \infty$  の極限において

$$\|T_i(x)\| \leq k\|x\|$$

がすべての  $i \in I$  について成立する. したがって  $x \in F_k$  である. [証明終]

いま,  $\mathcal{H}_1$  はノルム位相のもとで完備な距離空間であり, その  $\mathcal{H}_1$  が可算個の閉集合  $F_k$  の和集合として表されているので, ベールのカテゴリー定理により, すくなくともひとつの  $F_k$  が空でない開集合を含む. すなわち, ある  $k$  とある  $r > 0$  とある  $x_0 \in \mathcal{H}_1$  について,

$$\|y\| \leq r \Rightarrow x_0 + y \in F_k$$

となる. すなわち

$$\|y\| \leq r \Rightarrow \|T_i(x_0 + y)\| \leq k\|x_0 + y\|$$

である. ところが  $\|y\| \leq r$  のとき,  $\|x_0 + y\| \leq \|x_0\| + r$  であるから

$$\|T_i(y)\| \leq \|T(x_0)\| + \|T_i(x_0 + y)\| < k\|x_0\| + k(\|x_0\| + r) = 2k\|x_0\| + kr$$

したがって, いま仮に  $2k\|x_0\| + kr = R$  とおくと,

$$\|y\| \leq r \Rightarrow \sup_{i \in I} \|T_i(y)\| \leq R$$

となる. そこで任意の  $x \in \mathcal{H}_1$  (ただし  $x \neq 0$ ) について

$$\sup_{i \in I} \left\| T_i \left( \frac{r}{\|x\|} x \right) \right\| \leq R,$$

すなわち

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| \leq \frac{R}{r} \|x\|$$

となるので,

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \leq \frac{R}{r}$$

となって, 式 (47) が得られる.

共鳴定理の証明では, 内積は少しも出てこないし, 内積によって定められたノルムに特有の中線公式なども用いられていない. ノルムの一般的な性質と定義域  $\mathcal{H}_1$  の完備性だけで話が済んでいる. 共鳴定理は一般に完備なノルム空間 (バナッハ空間) 上の有界線形作用素の族について成立する.

## 10 弱収束

内積空間  $\mathcal{H}$  の点列  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  が点  $x$  に弱収束するとは、すべての  $y \in \mathcal{H}$  について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y, x_n) = (y, x)$$

が成立することをいう。このことを記号で

$$x_n \rightarrow x \quad (n \rightarrow \infty; \text{弱})$$

あるいは

$$x = \text{w.}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

と書くことにする。

**命題 10.1** ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の点列  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  が  $x$  に弱収束するとき、 $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$  であり、さらに

$$\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$$

が成立する。

[証明] 各  $n$  ごとに  $y \mapsto (y, x_n)$  は有界線形汎関数であり、その汎関数としてのノルムは  $\|x_n\|$  である。いっぽう、各  $y \in \mathcal{H}$  ごとに  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |(y, x_n)| < +\infty$  であるから、共鳴定理により  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < +\infty$  である。また、

$$\|x\|^2 = (x, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} |(x, x_n)| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \cdot \|x\|$$

であるから  $\|x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|$  である。[証明終]

**命題 10.2** ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の点列  $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$  が与えられていて、すべての  $y \in \mathcal{H}$  について数列  $\{(y, z_n) : n \in \mathbb{N}\}$  が収束するものと仮定する。このとき、点列  $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$  はある点  $z \in \mathcal{H}$  に弱収束する。

[証明] 各  $y \in \mathcal{H}$  に  $(y, z_n)$  を対応させる写像を  $\lambda_n : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  としよう。  $\lambda_n$  は有界線形汎関数で  $\|\lambda_n\| = \|z_n\|$  である。また、数列  $\{(y, z_n) : n \in \mathbb{N}\}$  の極限值を対応させる写像を  $\lambda$  としよう：

$$\lambda : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}; \quad y \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} (y, z_n).$$

このとき  $\lambda$  は  $\mathcal{H}$  上の線形汎関数である。各  $y \in \mathcal{H}$  ごとに、数列  $\{\lambda_n(y) : n \in \mathbb{N}\}$  は  $\lambda(y)$  に収束するので  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda_n(y)| < +\infty$  である。このとき共鳴定理により  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\lambda_n\| < +\infty$  である。この上限を  $c$  としよう。すべての  $n \in \mathbb{N}$  について  $\|z_n\| \leq c$  であるから、

$$|\lambda(y)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |(y, z_n)| \leq c\|y\|$$

となり、 $\lambda$  が有界線形汎関数であることがわかる。そこでリースの定理から一意的な  $z$  がとれて、すべての  $y$  について  $\lambda(y) = (y, z)$  となる。つまりすべての  $y$  で  $(y, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} (y, z_n)$  となるので、 $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$  は  $z$  に弱収束する。[証明終]

バナッハ・シュタインハウスの定理 ヒルベルト空間  $\mathcal{H}_1$  と  $\mathcal{H}_2$  があって、有界線形作用素の列  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  が与えられていて、すべての  $x \in \mathcal{H}_1$  と  $y \in \mathcal{H}_2$  について数列  $\{(y, T_n x) : n \in \mathbb{N}\}$  が収束するという状況を考えよう。このとき、命題 10.2 により、各  $x \in \mathcal{H}_1$  ごとに弱極限  $w.\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x$  が定まる。すると、命題 10.1 により、各  $x$  において  $\{\|T_n x\| : n \in \mathbb{N}\}$  が有界となるから、共鳴定理により  $\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\}$  も有界である。そこで

$$C = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|T_n\| \quad (48)$$

としよう。

弱極限の  $x$  への依存は線形であるから、それを仮に  $Tx$  と書こう：

$$Tx = w.\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x. \quad (49)$$

すると、命題 10.1 により各  $x$  ごとに

$$\|Tx\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n x\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \cdot \|x\| \leq C\|x\|$$

となる。ゆえに  $T$  も有界線形作用素で、

$$\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\| \quad (50)$$

となっている。

有界線形作用素の列  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  が与えられていて、すべての  $x \in \mathcal{H}_1$  に対して、 $\mathcal{H}_2$  の点列として  $\{T_n x : n \in \mathbb{N}\}$  が  $Tx$  に弱収束するとき、われわれは作用素の列  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$  が作用素  $T$  に弱収束するという。この言葉を使うと、先ほど証明したことを次のようにまとめることができる。

定理 10.3 (バナッハ・シュタインハウスの定理) ふたつのヒルベルト空間  $\mathcal{H}_1$  と  $\mathcal{H}_2$  があり、有界線形作用素の列  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$  があったとする。もしも、 $x \in \mathcal{H}_1$  と  $y \in \mathcal{H}_2$  を固定することに、数列  $\{(y, T_n x) : n \in \mathbb{N}\}$  が収束するならば、作用素の列  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$  はある有界線形作用素  $T$  に弱収束する。さらにそのとき、

$$\|T\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|T_n\|$$

が成立する。

閉部分空間における弱収束 ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の閉部分空間  $\mathcal{M}$  に属する点の列  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  が、 $\mathcal{M}$  において点  $x \in \mathcal{M}$  に弱収束している場合を考える。すなわち、すべての  $y \in \mathcal{M}$  について

$$(y, x_n) \rightarrow (y, x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

であったと仮定しよう。必ずしも  $\mathcal{M}$  に属さない  $y \in \mathcal{H}$  を、

$$y = y' + y'', \quad y' \in \mathcal{M}, \quad y'' \in \mathcal{M}^\perp$$

と  $\mathcal{M}$  に関して直交分解しよう。すると、各  $n$  について、 $x_n \in \mathcal{M}$  より  $(y'', x_n) = 0$  であって、

$$(y, x_n) = (y', x_n) + (y'', x_n) = (y', x_n),$$

したがって

$$(y, x_n) \rightarrow (y', x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

である。また、 $x \in \mathcal{M}$  より  $(y'', x) = 0$  でもあって、 $(y, x) = (y', x)$  だから、結局

$$(y, x_n) \rightarrow (y, x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。すなわち点列  $\{x_n : n \in \mathcal{M}\}$  は全空間  $\mathcal{H}$  の意味でも同じ極限  $x$  に弱収束する。

次に、閉部分空間  $\mathcal{M}$  の点列  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  が、全空間  $\mathcal{H}$  の意味である点  $x \in \mathcal{H}$  に弱収束している場合を考える。このときすべての  $y \in \mathcal{H}$  に対して、数列  $\{(y, x_n) : n \in \mathbb{N}\}$  が収束数列であるから、とくに  $y \in \mathcal{M}$  について考えれば、命題 10.2 をヒルベルト空間としての  $\mathcal{M}$  において考えることにより、点列  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  は  $\mathcal{M}$  の意味でも弱収束することがわかる。すなわち、 $\mathcal{M}$  における弱極限  $z \in \mathcal{M}$  が存在し、すべての  $y \in \mathcal{M}$  について

$$(y, x_n) \rightarrow (y, z) \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる。いっぽう、全空間を基準とすれば  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  は  $x$  に弱収束しているので、

$$(y, x_n) \rightarrow (y, x) \quad (n \rightarrow \infty)$$

でもある。そこで、すべての  $y \in \mathcal{M}$  について  $(y, x - z) = 0$ 、すなわち  $x - z \in \mathcal{M}^\perp$  である。とくに  $(z, x - z) = 0$  であるが、 $x_n \in \mathcal{M}$  でもあるので  $(x - z, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - z, x_n) = 0$  である。そこで、

$$\|x - z\|^2 = (x - z, x - z) = (x - z, x) - (x - z, z) = 0$$

したがって  $x = z \in \mathcal{M}$  である。以上をまとめると、

命題 10.4  $\mathcal{H}$  をヒルベルト空間、 $\mathcal{M}$  をその閉部分空間としよう。 $\mathcal{M}$  に属する点の列  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  が  $\mathcal{M}$  において弱収束することと  $\mathcal{H}$  において弱収束することは同値である。 $\mathcal{M}$  の点列  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  が  $\mathcal{H}$  において弱極限  $x$  に弱収束するならば  $x \in \mathcal{M}$  である。

いいかえれば、閉部分空間は弱閉集合でもある。このことを利用して、弱収束についての、ボルツァーノ・ワイヤストラス型の結果が得られる。

命題 10.5 ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  における有界な点列は、弱収束する部分列を含む。

[証明] 有界な点列  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  が与えられたとする。正定数  $C$  をすべての  $n$  について  $\|x_n\| \leq C$  となるようにとる。 $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  を含む最小の閉部分空間を  $\mathcal{M}$  とする。これは  $x_n$  の有限項の線形結合全体のなす部分空間のノルム位相に関する閉包として得られるので、ノルム位相のもとで可分である。そこで  $\mathcal{M}$  の可算な稠密部分集合  $\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$  をとろう。

点列  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  の部分列  $\{x_{n_1, j} : j \in \mathbb{N}\}$  を、数列  $\{(a_1, x_{n_1, j}) : j \in \mathbb{N}\}$  が収束数列となるようにとり、

$$\alpha_1 = \lim_{j \rightarrow \infty} (a_1, x_{n_1, j})$$

とする。次に  $\{x_{n_1, j} : j \in \mathbb{N}\}$  の部分列  $\{x_{n_2, j} : j \in \mathbb{N}\}$  を、数列  $\{(a_2, x_{n_2, j}) : j \in \mathbb{N}\}$  が収束数列となるようにとり、

$$\alpha_2 = \lim_{j \rightarrow \infty} (a_2, x_{n_2, j})$$

とする。以下同様に、部分列を順次抜き出すことにより、数列  $\{(a_k, x_{n_k, j}) : j \in \mathbb{N}\}$  が収束数列となるように  $\{x_{n_k, j} : j \in \mathbb{N}\}$  をとって、

$$\alpha_k = \lim_{j \rightarrow \infty} (a_k, x_{n_k, j})$$



を得たとしよう. 対角線をとって  $x_{n_{j,k}}$  を  $x_{n_j}$  とすれば, すべての  $k$  について

$$(a_k, x_{n_j}) \rightarrow \alpha_k \quad (j \rightarrow \infty)$$

となる. 任意の  $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$  について

$$|\alpha_{k_1} - \alpha_{k_2}| = \lim_{j \rightarrow \infty} |(a_{k_1} - a_{k_2}, x_{n_j})| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_{n_j}\| \cdot \|a_{k_1} - a_{k_2}\| \leq C \|a_{k_1} - a_{k_2}\| \quad (51)$$

であることに注意しよう.

さて, 任意の  $y \in \mathcal{M}$  と  $p \in \mathbb{N}$  に対して, 番号  $k_p \in \mathbb{N}$  を  $\|y - a_{k_p}\| \leq 2^{-p}$  となるようにとれる. このとき

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |(y, x_{n_j}) - \alpha_{k_p}| = \limsup_{j \rightarrow \infty} |(y - a_{k_p}, x_{n_j})| \leq \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\| \cdot \|y - a_{k_p}\| \leq C \|y - a_{k_p}\|$$

である.  $\{a_{k_p} : p \in \mathbb{N}\}$  がノルムに関してコーシー列なので, 式 (51) により数列  $\{\alpha_{k_p} : p \in \mathbb{N}\}$  もコーシー列であって, 極限值  $\eta = \lim_{p \rightarrow \infty} \alpha_{k_p}$  が定まる. このとき,

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |(y, x_{n_j}) - \eta| \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} |(y, x_{n_j}) - \alpha_{k_p}| + |\alpha_{k_p} - \eta| \leq 2C \|y - a_{k_p}\| \leq 2^{-p},$$

したがって

$$\lim_{j \rightarrow \infty} (y, x_{n_j}) = \eta$$

である. こうして, 任意の  $y \in \mathcal{M}$  について数列  $\{(y, x_{n_j}) : j \in \mathbb{N}\}$  が収束数列であることが確かめられたので, 命題 10.2 により, 点列  $\{x_{n_j} : j \in \mathbb{N}\}$  は  $\mathcal{M}$  において弱収束する. このとき命題 10.4 によって, 全空間  $\mathcal{H}$  の意味でも点列  $\{x_{n_j} : j \in \mathbb{N}\}$  は弱収束する. [証明終]

## 11 射影作用素

ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  のベクトル  $x \in \mathcal{H}$  の, 閉部分空間  $\mathcal{M}$  への正射影を  $P_{\mathcal{M}}x$  と書けば,  $P_{\mathcal{M}}$  は線形作用素になる.  $x - P_{\mathcal{M}}x \perp P_{\mathcal{M}}x$  なので, ピタゴラスの定理から

$$\|x\|^2 = \|P_{\mathcal{M}}x\|^2 + \|x - P_{\mathcal{M}}x\|^2$$

であり,  $\|P_{\mathcal{M}}x\| \leq \|x\|$  である. したがって  $P_{\mathcal{M}}$  は有界線形作用素で,  $\|P_{\mathcal{M}}\| \leq 1$  である. 正射影の定義から  $P_{\mathcal{M}}x \in \mathcal{M}$  で,  $P_{\mathcal{M}}x \in \mathcal{M}$  のさらなる  $\mathcal{M}$  への正射影は  $P_{\mathcal{M}}x \in \mathcal{M}$  自身であるから,  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{M}}x = P_{\mathcal{M}}x$ , したがって  $P_{\mathcal{M}}$  は冪等 ( $P_{\mathcal{M}}^2 = P_{\mathcal{M}}$ ) である. また,  $x, y \in \mathcal{H}$  に対して

$$x - P_{\mathcal{M}}x = x', \quad y - P_{\mathcal{M}}y = y'$$

とおけば  $x', y' \in \mathcal{M}^\perp$  より

$$\begin{aligned} (x, P_{\mathcal{M}}y) &= (x' + P_{\mathcal{M}}x, P_{\mathcal{M}}y) \\ &= (x', P_{\mathcal{M}}y) + (P_{\mathcal{M}}x, P_{\mathcal{M}}y) \\ &= (P_{\mathcal{M}}x, P_{\mathcal{M}}y) \\ &= (P_{\mathcal{M}}x, P_{\mathcal{M}}y) + (P_{\mathcal{M}}x, y') \\ &= (P_{\mathcal{M}}x, y) \end{aligned}$$

となり,  $(x, P_{\mathcal{M}}y) = (P_{\mathcal{M}}x, y)$  となるので,  $P_{\mathcal{M}}^* = P_{\mathcal{M}}$  であって,  $P_{\mathcal{M}}$  は自己共役作用素である. 以上をまとめると, 閉部分空間への正射影は, 自己共役で冪等な有界線形作用素である.

逆を考えよう.  $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$  は自己共役 ( $P^* = P$ ) で冪等 ( $P^2 = P$ ) な有界線形作用素であるとする.  $P$  の不動点の全体を  $\mathcal{M}$  としよう:

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{H} : x = Px\}.$$

このとき  $\mathcal{M}$  は  $P$  の線形性から  $\mathcal{H}$  の部分空間であり,  $P$  の連続性から閉集合であり,  $P$  の冪等性から  $P$  の値域  $\text{rng}(P)$  と一致する. 任意のベクトル  $x$  の  $\mathcal{M}$  への正射影を  $x'$  とし  $x'' = x - x'$  としよう.  $x'' \perp \mathcal{M} = \text{rng}(P)$  であって,  $P$  の自己共役性と冪等性から

$$(Px'', Px'') = (x'', P^2x'') = (x'', Px'') = 0$$

となる. いっぽう,  $x' \in \mathcal{M}$  より  $Px' = x'$  である. したがって

$$Px = P(x' + x'') = Px' + Px'' = Px' = x'$$

これは,  $P$  がその値域  $\mathcal{M}$  への正射影を与える作用素であることを意味する.

以上の考察を踏まえて, 「冪等で自己共役な有界線形作用素」のことを一般に射影作用素という.  $\mathcal{H}$  の閉部分空間と  $\mathcal{H}$  における正射影は全体として一対一に対応する.

いま  $\mathcal{H}$  に2つの閉部分空間  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{M}$  があったとして, それぞれへの射影作用素  $P_{\mathcal{L}}$  と  $P_{\mathcal{M}}$  を考えると,

$$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M} \iff P_{\mathcal{L}}P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{L}} \iff P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{L}} = P_{\mathcal{L}} \quad (52)$$

$$\mathcal{L} \perp \mathcal{M} \iff P_{\mathcal{L}}P_{\mathcal{M}} = 0 \iff P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{L}} = 0 \quad (53)$$

が成立する. これらは  $P_{\mathcal{L}}P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{L}}$  となる場合の特別な例だが, 一般には

命題 11.1 ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の2つの閉部分空間  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{M}$  を考える.  $P_{\mathcal{L}}$  と  $P_{\mathcal{M}}$  が交換可能 ( $P_{\mathcal{L}}P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{L}}$ ) であるためには,  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{L}^\perp$  の両方が  $P_{\mathcal{M}}$  のもとで不変であること:

$$P_{\mathcal{M}}\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L} \quad (54)$$

$$P_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}^\perp) \subseteq \mathcal{L}^\perp \quad (55)$$

が, 必要かつ十分である.

命題 11.2 ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  の2つの閉部分空間  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{M}$  を考える.  $P_{\mathcal{L}}$  と  $P_{\mathcal{M}}$  が交換可能であるためには, 等式

$$\mathcal{M} = (\mathcal{L} \cap \mathcal{M}) + ((\mathcal{L}^\perp) \cap \mathcal{M}) \quad (56)$$

の成立が, 必要かつ十分である.

等式 (56) は束論的なある種の分配法則だが, 次の図に示唆されるとおり, 任意の  $\mathcal{L}$  と  $\mathcal{M}$  について成立するわけではない.

