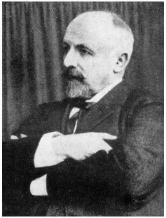
記述集合論誕生秘話

藤田 博司

2015 年 4 月 29 日

この文書について

2015 年 4 月 28 日に愛媛大学理学部で開催した第 12 回松山 TGSA セミナーでの講演で使用したスライドから，自分の (話してみたら少々怪しかった) 結果を削除して，前半の歴史解説の部分だけを取り出したものです．閲覧の便を考慮してアニメーション効果も削除しました．

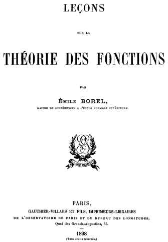


Georg Cantor
1845–1916

1870 年代〜1900 年頃, カントールが集合論を始める.

- 超限基数の理論
- 整列集合と順序数の理論
- 実数と直線上の点集合の理論

閉集合, 孤立点/集積点, 完全集合, . . . 位相的諸概念の萌芽



LEÇONS

SUR LA

THÉORIE DES FONCTIONS

PAR

ÉMILE BOREL,

MAITRE DE CONFÉRENCES A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS ET DU BUREAU DES LONGITUDES,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1898

(Tous droits réservés.)

1898 **年のボレルの講義録『函数論講義』**

(Leçons sur la théorie des fonctions)


Emile Borel

Émile Borel
1871–1956

カントールの集合論で解析学を刷新しよう!!
(講義録の 6 割以上を集合論の概説が占める)

- シュレーダー・ベルンシュタインの定理の紹介
- デュボアレイモンの定理 ($\mathfrak{b} > \aleph_0$) の紹介
- 測度と可測集合の概念の導入
- ハイネ・ボレル定理

ボレルの測度概念

1. 区間の測度とはその長さのことである;
2. $A \subseteq [0,1]$ で A が測度 α をもつ
$\Rightarrow$ 補集合 $[0,1] \setminus A$ は測度 $1-\alpha$ をもつ;
3. 互いに交わりのない $[0,1]$ の部分集合 $A_1, A_2, \ldots$ が
それぞれ測度 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ をもつ
$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ は測度 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ をもつ.

「測度をもつ集合」(可測集合) とその測度を implicit に定義.

ボレルの定義したものを, 現代の言葉でいえば,

- 測度をもつ集合: $[0,1]$ 上のボレル集合
- 測度: ルベーグ測度のボレル集合への制限

となる.

ボレル集合: 数直線上で区間が生成する σ-加法的集合族のメンバー

測度の理論の目的は？

カントールによる超越数の存在証明がモデル
(代数的実数の全体の濃度は連続体の濃度に満たない)

補集合が連続濃度をもっても使える存在証明の方法
(補集合の測度が全体より小さい)

積分や確率への応用は (この時点では) 考えられていない

ボレルの測度の理論のひとつの補題として,

ハイネ・ボレルの定理

閉区間の開区間列による被覆は有限部分被覆をもつ
(閉区間の可算コンパクト性)

が登場する.

長さの総和が 1 **未満の区間列は閉区間** $[0,1]$ **を覆いつくさない**
(閉区間 $[0,1]$ **の《外測度》は** 1 **以上)**

René-Louis Baire
1874–1932

Henri Lebesgue
1875–1941

ベールの 1899 **年の学位論文『実変数函数について』(函数の不連続点の研究)**

ルベーグの 1902 **年の学位論文『積分・長さ・面積』(ボレルの測度の理論を用いて積分を再定義)**

Ernst Zermelo
1871–1953

1904 **年**, **ツェルメロが選択公理を提案**

ツェルメロの論文 (Math.Ann.,**59**(1904),514–516)
「選択公理から整列定理が証明できる」

ボレルのレビュー (Math.Ann.,**60**(1905),194–195)
「そんなものは (**整列定理の**) **証明とは呼べない**!!**」**

Jacques Hadamard
1865–1963

その直後, アダマールのボレル宛書簡
アダマール「たんなる存在証明で満足すべき領域も認めるべき」

ボレルの《弟分》であるベールとルベーグがアダマールに反論.
「しかるべき手続きを踏んできちんと内容が確定する対象だけを認めたい」

ベール「有限の言葉できちんと記述できない対象は受け入れられない.」 「無限の対象は潜在的に与えられているにすぎない.」

ルベーグ「ボレル集合でないルベーグ可測集合は《存在》するが，具体例を《指名》することは，きっと誰にもできないのではないか」

ボレルはこのあと，集合論による解析学改革の路線を放棄.
→その構想は (東欧圏で発展したのち)40 年後にブルバキによって実現する.

ルベーグの 1905 **年の論文『解析的に表示できる函数について』**
(Sur les fonctions représentable analytiquement)

- **ディリクレ流の函数概念** (**値のまったく任意な対応**) **への疑念**
- **解析的な手順** (**点列の極限**, **四則演算**, **積分など**) **への回帰**

選択公理のような原理による「単なる存在証明」に訴えず, **具体的に一意的に《指名》できる対象** (e.g., **個々のボレル集合やベール函数**) **だけを用いて解析学が展開できることを示そうと試みた**.

ベール函数: **すべての連続函数を含み各点収束のもとで閉じている最小の函数族のメンバー**

主な結果

- 解析的な手順によって定義できる函数はベール函数である
- ボレル集合/ベール函数の階層の定義 (順序数の理論の応用)
- $\{$ ベール函数 $\}$ = $\{$ ボレル可測関数 $\}$
- ボレル集合に対する陰函数定理←これが問題!!

ボレル集合に対する陰函数定理

平面のボレル集合 $B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ が

$$\forall x \exists ! y \Big[(x, y) \in B \Big]$$

をみたすとき，これによって定まる対応

$$x \mapsto y$$

は，ベール函数である．いいかえれば，グラフがボレル集合である函数はベール函数である．

ルベーグの証明は間違っていた．

1916 年のモスクワで, ルジン (Nikolaĭ N. Luzin) のゼミ生だったススリン (Mikhail Y. Suslin) が, ルベーグの間違いを発見.

ルベーグの勘違い 1

ルベーグは証明のある箇所で,

$$f\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(A_n)$$

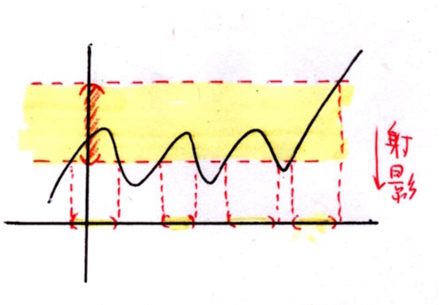
と考えるという, 学部 2 年生レベルのミスを犯していた!!

この思い違いからルベーグは (ボレル集合の階層に関する帰納法で)

ルベーグの勘違い 2

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のボレル集合の $\mathbb{R}$ への射影は またボレル集合である

という結果を導き，これによりボレル集合に対する陰関数定理が証明されたと考えた．



ルジンとススリンは, ボレル集合の射影に関するルベーグの結果が正しくないことを証明.

$A \subseteq \mathbb{R}$ **について次は同値**

1. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **のボレル集合** (G_δ **集合でよい**) **の射影である**.
2. $\mathbb{R}$ **上の連続函数によるボレル集合** ($\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **でよい**) **の像である**.
3. **自然数の有限列全体の集合** $\mathbb{N}^*$ **に添字づけされた有界閉集合の族** $\{ K_{n_1, n_2, \ldots, n_r} : (n_1, n_2, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}^* \}$ **について**
$$A = \bigcup_{a \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}} \bigcap_{r=1}^{\infty} K_{a(1), a(2), \ldots, a(r)}$$
となる.
4. $\mathbb{R} \times \mathbb{Q}$ **の閉集合** C **について**,
$$x \in A \iff \{ q : (x, q) \in C \} \text{ は整列集合でない}$$
となる.

定義 (ススリン, ルジン)

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ のボレル集合の射影になるような $\mathbb{R}$ の部分集合のことを, **解析集合** または A 集合 という.

解析集合の基本性質

- ボレル集合は解析集合である.
- 解析集合の可算和，可算共通部分はまた解析集合である.
- 解析集合の連続像はまた解析集合である.
- 解析集合の補集合 (CA 集合) は解析集合とは限らない.
- ボレル集合でない解析集合がある.
- (ススリンの定理)
  $A \subseteq \mathbb{R}$ がボレル集合 $\iff$ A と $\mathbb{R} \setminus A$ が解析集合.
- (ルジンの定理) 解析集合はルベーグ可測である.

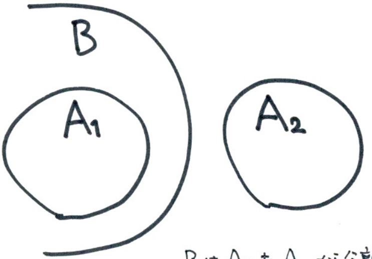
こうして，「ボレル集合でないルベーグ可測集合」の例を具体的に「指名」する方法が発見された.

ススリン・ルジンの分離定理

$A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ が解析集合で $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ ならば，あるボレル集合 $B \subseteq \mathbb{R}$ について

$$A_1 \subseteq B, \quad B \cap A_2 = \emptyset$$

となる．(交わりのない解析集合はボレル集合で分離できる.)



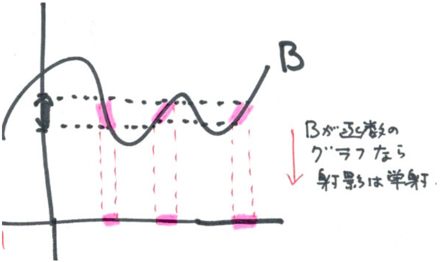
B は A₁ を A₂ から分離.

系 (ルジンの単射定理)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **が連続函数**, $B \subseteq \mathbb{R}$ **がボレル集合で**, $f \restriction B$ **が** 1 **対** 1 **ならば, 像** $f(B)$ **はボレル集合**.

系

"ルベーグの陰関数定理" は正しかった!!



解析集合の理論によって,

- 点集合論の新しい対象が生まれた.
- ボレル集合の新しい特徴づけが発見された.
- ルベーグの理論が「救済」された.

記述集合論の誕生

射影集合への拡張 (補集合 (↓) と連続像 (↗) のくり返し)

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{A} & & \mathrm{PCA} & & \mathrm{PCPCA} & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
\mathrm{CA} & & \mathrm{CPCA} & & \mathrm{CPCPCA} & & \cdots
\end{array}$$

現代の記号では

$$\begin{array}{ccccccc}
\boldsymbol{\Sigma}^1_1 & & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 & & \boldsymbol{\Sigma}^1_3 & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
\boldsymbol{\Pi}^1_1 & & \boldsymbol{\Pi}^1_2 & & \boldsymbol{\Pi}^1_3 & & \cdots
\end{array}$$

どうしても解けなかった難問…

Σ^1_2 集合のルベーグ可測性?
Π^1_1 集合の完全集合の性質?

射影集合の理論は「独立命題」の宝庫だった.

記述集合論は誕生してすぐに暗礁??

→ジェネラル・トポロジーの成立を促す
→再帰理論 (計算論) との融合
→現代集合論の試金石

参考文献

ローレン・グレアム&ジャン=ミシェル・カンター『無限とはなにか？』(一灯舎 2011 年)

志賀浩二『無限からの光芒』(日本評論社 1988 年)

田中尚夫『選択公理と数学』【増訂版】(遊星社 1999 年)

Yiannis N.Moschovakis “Descriptive Set Theory” (2nd Ed., AMS, 2009 年)