

# 超限順序数と無限玉入れの勝敗

ゼルブスト殿下 (@tenapyon)

第8回関西すうがく徒のつどい

集合論の宇宙「カントール・パラダイス」恒例の大運動会で、玉入れ競技がおこなわれた。紅白いずれも可算無限個の玉が籠に入った。勝敗の判定は慣例どおり、数を数えながら玉を籠から取り出すことでおこなう。紅組が

$0, 1, 2, 3, \dots$

の順にすべての玉を取り出すのに合わせて、白組は

$1, 2, 3, 4, \dots$

のように玉を取り出していった。紅組の玉が全部取り出されたあと、白組の籠には玉が残っている。したがって白組の勝ち...??

いやいや、これでは紅組が納得しない!! もう一度、判定しなそう。

紅組は今度は

$0, 1, 2, 3, \dots$

の順に取り出し、白組はさっきと同様

$1, 2, 3, 4, \dots$

の順に取り出す。白組があと一つ玉だけを残す状態になったとき、紅組は  $1, 2, 3, 4, \dots$  と無限個の玉を残しているの、紅組の勝ち...??

このような無限玉入れの議論を集合論の言葉でキチンと語るために超限順序数の理論を紹介し、無限基数論、選択公理、決定公理と数直線上の擬整列関係などへと、風呂敷を広げていきます。おもに結果の紹介で、むずかしい定理の証明はしません。

話を楽しむには、数学科の「集合と位相」という科目で扱う、全単射、順序集合、同値関係などなどについての初歩的な知識をもっていることが望ましいです。