超限順序数と無限玉入れ勝敗判定

ゼルプスト殿下 @tenapyon

第 8 回関西すうがく徒のつどい

講演の目標

濃度 $\aleph_1$ について
理解してもらうこと

発端

今年 2 月に出版された，あるトポロジーの教科書

$\mathbb{R}$ の濃度を　　　と書き
連続体濃度と呼ぶ

発端

今年 2 月に出版された，あるトポロジーの教科書

$\mathbb{R}$ の濃度を $\aleph_1$ と書き
連続体濃度と呼ぶ

発端

今年 2 月に出版された，あるトポロジーの教科書

$\mathbb{R}$ の濃度を $\aleph_1$ と書き
連続体濃度と呼ぶ

正解は $\mathfrak{c}$ または $2^{\aleph_0}$

発端 (2)

この間違いは，この本が唯一でも最初でもなく，たぶん最後でもない．

発端 (2)

この間違いは，この本が唯一でも最初でもなく，たぶん最後でもない．

この間違いがよく起こる理由:

発端 (2)

この間違いは，この本が唯一でも最初でもなく，たぶん最後でもない．

この間違いがよく起こる理由:

濃度 $\aleph_1$ のことがよく理解されていない

発端 (2)

この間違いは，この本が唯一でも最初でもなく，たぶん最後でもない．

この間違いがよく起こる理由:

濃度 $\aleph_1$ のことがよく理解されていない
(順序数のことがよく理解されていない)

講演の目標

濃度 $\aleph_1$ について
理解してもらうこと

濃度とは

定義

二つの集合 A と B の間に

濃度とは

定義

二つの集合 A **と** B **の間に全単射** $f\colon A \to B$ **が存在するとき**,

濃度とは

定義

二つの集合 A と B の間に全単射 $f\colon A \to B$ が存在するとき，
A と B は対等であるといい

と書く．

濃度とは

定義

二つの集合 A **と** B **の間に全単射** $f\colon A \to B$ **が存在するとき，**
A **と** B **は対等であるといい**

$$A \sim B$$

と書く．

濃度とは (2)

対等性は同値関係の 3 条件

- 反射律:
- 対称律:
- 推移律:

をみたすので,

濃度とは (2)

対等性は同値関係の 3 条件

- **反射律**: $A \sim A$
- **対称律**:
- **推移律**:

をみたすので,

濃度とは (2)

対等性は同値関係の 3 条件

- **反射律**: $A \sim A$
- **対称律**: $A \sim B \iff B \sim A$
- **推移律**:

をみたすので,

濃度とは (2)

対等性は同値関係の 3 **条件**

- **反射律**: $A \sim A$
- **対称律**: $A \sim B \iff B \sim A$
- **推移律**: $(A \sim B \text{ かつ } B \sim C) \Rightarrow A \sim C$

をみたすので,

濃度とは (2)

対等性は同値関係の 3 条件

- **反射律**: $A \sim A$
- **対称律**: $A \sim B \iff B \sim A$
- **推移律**: $(A \sim B$ **かつ** $B \sim C) \Rightarrow A \sim C$

をみたすので, **対等な集合どうしを同一視 することが許される**.

濃度とは (3)

定義

対等な集合を同じとみなした同値類のことを,

濃度とは (3)

定義

対等な集合を同じとみなした同値類のことを,
集合の**濃度**という.

濃度とは (3)

定義

対等な集合を同じとみなした同値類のことを,
集合の**濃度**という.

集合 A の濃度を $|A|$ と書く

濃度とは (3)

定義

対等な集合を同じとみなした同値類のことを,
集合の**濃度**という.

集合 A の濃度を $|A|$ と書く

$$|A| = |B| \iff A \sim B$$

濃度とは (4)

濃度の大小について

濃度とは (4)

濃度の大小について

- $|A| \leq |B| \overset{\text{def}}{\iff} A$ から B への単射がある

濃度とは (4)

濃度の大小について

- $|A| \leq |B| \overset{\text{def}}{\iff}$ A **から** B **への単射がある**
- $|A| < |B| \overset{\text{def}}{\iff}$ $|A| \leq |B|$ **だが** $|B| \leq |A|$ **ではない**.

濃度とは (4)

濃度の大小について

- $|A| \leq |B| \overset{\text{def}}{\iff}$ A から B への単射がある
- $|A| < |B| \overset{\text{def}}{\iff}$ $|A| \leq |B|$ だが $|B| \leq |A|$ ではない.
- $|A| \leq |B|$ かつ $|B| \leq |A|$ のとき $|A| = |B|$ となる
  (シュレーダー・ベルンシュタインの定理)

濃度とは (5)

(有限濃度) 有限集合の濃度は要素の個数のことである

濃度とは (5)

(有限濃度) 有限集合の濃度は要素の個数のことである
(可算無限濃度) $\mathbb{N}$ の濃度を $\aleph_0$ と書く

濃度とは (5)

(有限濃度) 有限集合の濃度は要素の個数のことである
(可算無限濃度) $\mathbb{N}$ の濃度を $\aleph_0$ と書く

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$$

濃度とは (5)

(有限濃度) 有限集合の濃度は要素の個数のことである
(可算無限濃度) $\mathbb{N}$ **の濃度を** $\aleph_0$ **と書く**

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$$

(連続体濃度) $\mathbb{R}$ **の濃度は** $\mathfrak{c}$ **あるいは** $2^{\aleph_0}$ **と書かれる**

濃度とは (5)

(有限濃度) 有限集合の濃度は要素の個数のことである
(可算無限濃度) $\mathbb{N}$ **の濃度を** $\aleph_0$ **と書く**

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$$

(連続体濃度) $\mathbb{R}$ **の濃度は** $\mathfrak{c}$ **あるいは** $2^{\aleph_0}$ **と書かれる**

$$|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^3| = \cdots = \mathfrak{c}$$

濃度とは (5)

(有限濃度) 有限集合の濃度は要素の個数のことである
(可算無限濃度) $\mathbb{N}$ **の濃度を** $\aleph_0$ **と書く**

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$$

(連続体濃度) $\mathbb{R}$ **の濃度は** $\mathfrak{c}$ **あるいは** $2^{\aleph_0}$ **と書かれる**

$$|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^3| = \cdots = \mathfrak{c}$$
$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$$

濃度とは (5)

(有限濃度) 有限集合の濃度は要素の個数のことである
(可算無限濃度) $\mathbb{N}$ **の濃度を** $\aleph_0$ **と書く**

$$|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$$

(連続体濃度) $\mathbb{R}$ **の濃度は** $\mathfrak{c}$ **あるいは** $2^{\aleph_0}$ **と書かれる**

$$|\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}^3| = \cdots = \mathfrak{c}$$
$$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$$

($\mathcal{P}(X)$: **集合** X **の冪集合**)

濃度とは (6)

$\aleph_1$ は定義上はこれらと異なる「ある集合」の濃度であり,

濃度とは (6)

$\aleph_1$ は定義上はこれらと異なる「ある集合」の濃度であり,
この濃度が $\mathfrak{c}$ と一致するかどうかは,

濃度とは (6)

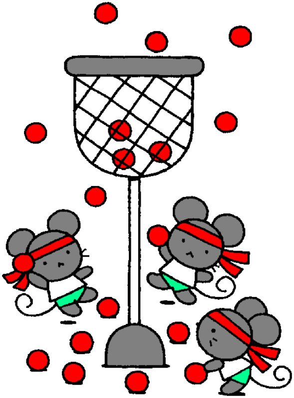
$\aleph_1$ は定義上はこれらと異なる「ある集合」の濃度であり，
この濃度が $\mathfrak{c}$ と一致するかどうかは，
通常の集合論において真偽が定まらない．

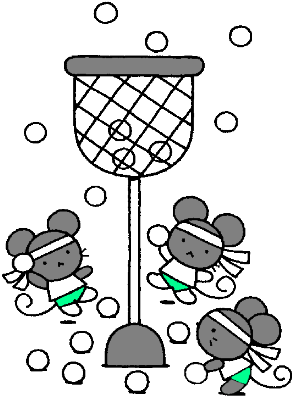
濃度とは (6)

$\aleph_1$ は定義上はこれらと異なる「ある集合」の濃度であり,
この濃度が $\mathfrak{c}$ と一致するかどうかは,
通常の集合論において真偽が定まらない.

それでは $\aleph_1$ とは何か. 「ある集合」とは...

玉入れ





玉入れ (2)

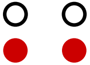
玉入れの勝敗はカゴに入った玉の個数で決まる

玉入れ (2)

玉入れの勝敗はカゴに入った玉の個数で決まる

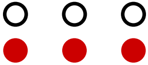
玉入れ (2)

玉入れの勝敗はカゴに入った玉の個数で決まる



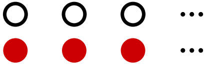
玉入れ (2)

玉入れの勝敗はカゴに入った玉の個数で決まる



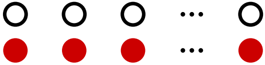
玉入れ (2)

玉入れの勝敗はカゴに入った玉の個数で決まる



玉入れ (2)

玉入れの勝敗はカゴに入った玉の個数で決まる



玉入れ (2)

玉入れの勝敗はカゴに入った玉の個数で決まる

○ ○ ○ ⋯ ○ ○ (勝ち)
● ● ● ⋯ ● (負け)

玉入れ (2)

玉入れの勝敗はカゴに入った玉の個数で決まる

○ ○ ○ ⋯ ○ ○ **(勝ち)**
● ● ● ⋯ ● **(負け)**

1 **個ずつ取り出す** $\Longleftrightarrow$ **カゴの中の玉に順序をつける**

玉入れ (2)

玉入れの勝敗はカゴに入った玉の個数で決まる

○ ○ ○ ⋯ ○ ○ (**勝ち**)
● ● ● ⋯ ● (**負け**)

1 **個ずつ取り出す** $\Longleftrightarrow$ **カゴの中の玉に順序をつける**
(**ただし**, **どんな順序でもよいわけではない**)

玉入れ (3)

カゴの中に自然数が全部入っているとき

玉入れ (3)

カゴの中に自然数が全部入っているとき
それらを小さい順に取り出すことが可能

玉入れ (3)

カゴの中に自然数が全部入っているとき
それらを小さい順に取り出すことが可能

カゴの中に整数が全部入っているとき

玉入れ (3)

カゴの中に自然数が全部入っているとき
それらを小さい順に取り出すことが可能

カゴの中に整数が全部入っているとき
$\Rightarrow$ **最初に取り出す玉が決まらない**

玉入れ (3)

カゴの中に自然数が全部入っているとき
それらを小さい順に取り出すことが可能

カゴの中に整数が全部入っているとき
$\Rightarrow$ 最初に取り出す玉が決まらない

カゴの中に $x \geq 0$ なる実数が全部入っているとき

玉入れ (3)

カゴの中に自然数が全部入っているとき
それらを小さい順に取り出すことが可能

カゴの中に整数が全部入っているとき
$\Rightarrow$ 最初に取り出す玉が決まらない

カゴの中に $x \geq 0$ なる実数が全部入っているとき
$\Rightarrow$ 最初の玉 0 の次に取り出す玉が決まらない

玉入れ (4)

すべての要素を小さい順にカゴから 1 個ずつ取り出して一列に並べたような大小の順序づけのことを,

玉入れ (4)

すべての要素を小さい順にカゴから 1 個ずつ取り出して一列に並べたような大小の順序づけのことを,

整列順序
(wellordering)

という.

玉入れ (4)

すべての要素を小さい順にカゴから 1 個ずつ取り出して一列に並べたような大小の順序づけのことを,

整列順序
(wellordering)

という.

$\mathbb{N}$ の順序は整列順序であり,

玉入れ (4)

すべての要素を小さい順にカゴから 1 個ずつ取り出して一列に並べたような大小の順序づけのことを,

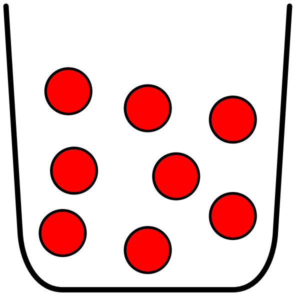
整列順序
(wellordering)

という.

$\mathbb{N}$ **の順序は整列順序であり,**
$\mathbb{Z}$ **や半直線** $[0, +\infty)$ **の順序は整列順序でない.**

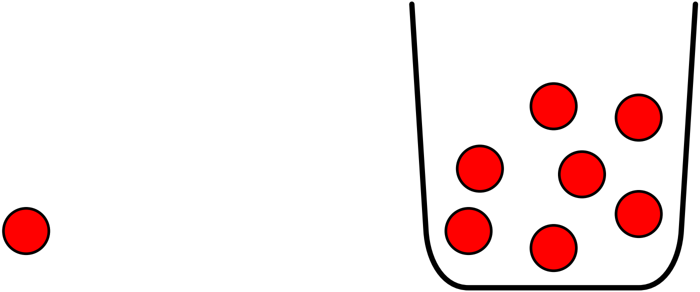
整列順序

カゴから玉を取り出して並べている途中の状態を考える



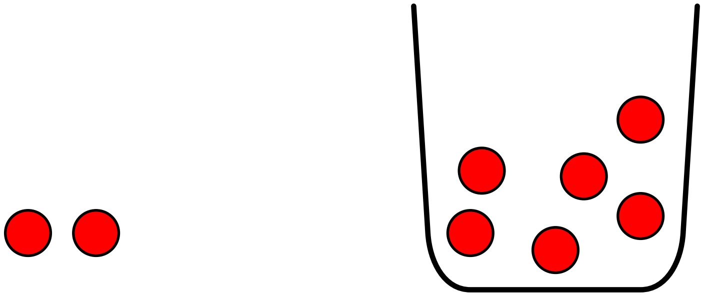
整列順序

カゴから玉を取り出して並べている途中の状態を考える



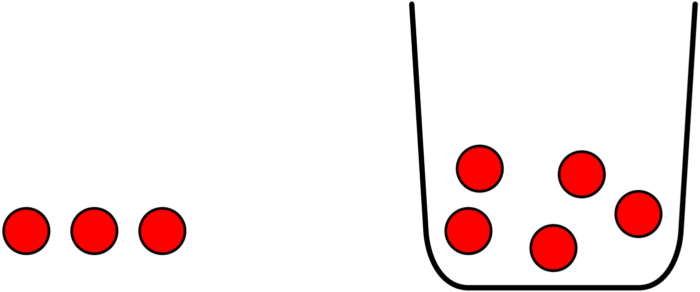
整列順序

カゴから玉を取り出して並べている途中の状態を考える



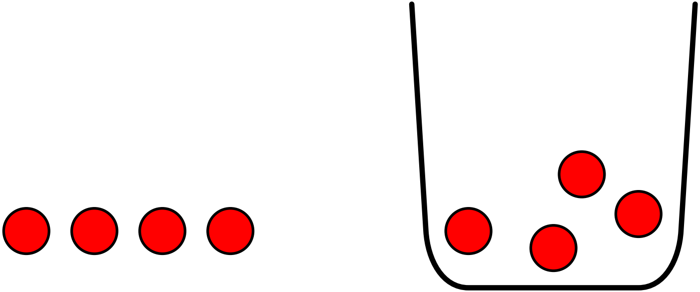
整列順序

カゴから玉を取り出して並べている途中の状態を考える



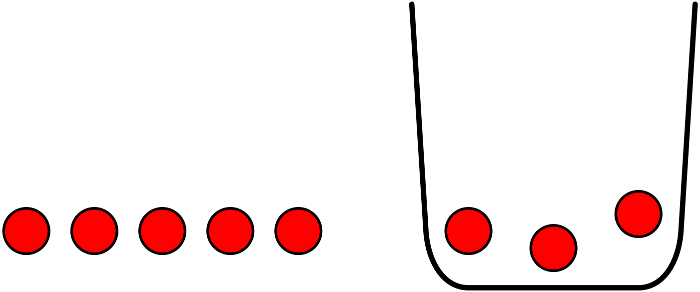
整列順序

カゴから玉を取り出して並べている途中の状態を考える



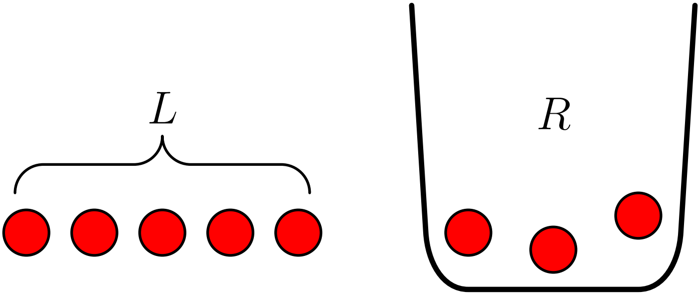
整列順序

カゴから玉を取り出して並べている途中の状態を考える



整列順序 (2)

すでに取り出された玉の集合を L, カゴに残っている玉の集合を R とする.



整列順序 (3)

カゴが順序集合で「小さい順に取り出す」ことが守られているとすれば，いかなる時点においても

整列順序 (3)

カゴが順序集合で「小さい順に取り出す」ことが守られているとすれば, いかなる時点においても

$$X = L \cup R$$
$$a \in L, b \in R \Rightarrow a < b$$

となっているだろう.

整列順序 (3)

カゴが順序集合で「小さい順に取り出す」ことが守られているとすれば，いかなる時点においても

$$X = L \cup R$$
$$a \in L, b \in R \Rightarrow a < b$$

となっているだろう． この状態でカゴに玉が残っている ($R \neq \emptyset$) とすれば，次に取り出す玉は R の最小要素ということになる．

整列順序 (4)

定義

$(X, <)$ を順序集合とする.

整列順序 (4)

定義

$(X, <)$ を順序集合とする.

1. $<$ は X 上の狭義の全順序である

整列順序 (4)

定義

$(X, <)$ を順序集合とする.

1. $<$ は X 上の狭義の全順序である
2. $X = L \cup R$, $R \neq \emptyset$ かつ $(a \in L, b \in R \Rightarrow a < b)$ という状況においては必ず R の最小要素が存在する

整列順序 (4)

定義

$(X, <)$ を順序集合とする.

1. $<$ は X 上の狭義の全順序である
2. $X = L \cup R$, $R \neq \emptyset$ かつ $(a \in L, b \in R \Rightarrow a < b)$ という状況においては必ず R の最小要素が存在する

という条件をみたすとき $<$ は X 上の　　　　　であるといい,
$(X, <)$ をひとつの　　　　　という.

整列順序 (4)

定義

$(X, <)$ を順序集合とする.

1. $<$ は X 上の狭義の全順序である
2. $X = L \cup R$, $R \neq \emptyset$ かつ $(a \in L, b \in R \Rightarrow a < b)$ という状況においては必ず R の最小要素が存在する

という条件をみたすとき $<$ は X 上の**整列順序**であるといい, $(X, <)$ をひとつの という.

整列順序 (4)

定義

$(X,<)$ を順序集合とする.

1. $<$ は X 上の狭義の全順序である
2. $X = L \cup R,\ R \neq \emptyset$ かつ $(a \in L, b \in R \Rightarrow a < b)$ という状況においては必ず R の最小要素が存在する

という条件をみたすとき $<$ は X 上の**整列順序**であるといい, $(X,<)$ をひとつの**整列集合**という.

整列順序 (5)

定理

$(X, <)$ が整列集合であるためには

となることが必要かつ十分である

整列順序 (5)

定理

$(X, <)$ が整列集合であるためには

1. $<$ は X 上の狭義の全順序である

となることが必要かつ十分である

整列順序 (5)

定理

$(X, <)$ が整列集合であるためには

1. $<$ は X 上の狭義の全順序である
3. $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ のときには S の最小要素が存在する

となることが必要かつ十分である

整列順序 (5)

定理

$(X, <)$ が整列集合であるためには

1. $<$ は X 上の狭義の全順序である
3. $S \subseteq X$, $S \neq \emptyset$ のときには S の最小要素が存在する

となることが必要かつ十分である

証明: (3)⇒(2) は自明. (2)⇒(3) を言うには S が与えられたとして

$$L = \{\, x \ :\ \forall s \in S[x < s] \,\}$$
$$R = \{\, x \ :\ \exists s \in S[s \leq x] \,\}$$

と左右にわけて R の最小要素をとればよい.

無限集合の場合

紅白両組とも自然数すべてがカゴに入っている

無限集合の場合

紅白両組とも自然数すべてがカゴに入っている

$$
\begin{array}{lccccc}
\textbf{紅組}: & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots \\
\textbf{白組}: & 0 & 2 & 4 & 6 & \cdots
\end{array}
$$

無限集合の場合

紅白両組とも自然数すべてがカゴに入っている

紅組:	0	1	2	3	$\cdots$
白組:	0	2	4	6	$\cdots$

紅組の玉が尽きた時点で

無限集合の場合

紅白両組とも自然数すべてがカゴに入っている

紅組:	0	1	2	3	$\cdots$
白組:	0	2	4	6	$\cdots$

紅組の玉が尽きた時点で

紅組:					
白組:	1	3	5	7	$\cdots$

と続けられる.

無限集合の場合

紅白両組とも自然数すべてがカゴに入っている

紅組:	0	1	2	3	$\cdots$
白組:	0	2	4	6	$\cdots$

紅組の玉が尽きた時点で

紅組:					
白組:	1	3	5	7	$\cdots$

と続けられる.
取り出し方で勝敗が変わる.

無限集合の場合

紅白両組とも自然数すべてがカゴに入っている

紅組:	0	1	2	3	$\cdots$
白組:	0	2	4	6	$\cdots$

紅組の玉が尽きた時点で

紅組:					
白組:	1	3	5	7	$\cdots$

と続けられる.
取り出し方で勝敗が変わる.
無限集合には長さの異なる複数の整列順序がつけられる.

無限集合の場合 (2)

無限集合には長さの異なる複数の整列順序がつけられる.
しかし順序の長さとは? (意味をなすか)

無限集合の場合 (3)

順序集合の長さは意味をなすか

半直線 $[0,+\infty)$ **と 半開区間** $[0,1)$ **の比較**:

$$[0,1) \to [0,+\infty)$$
$$x \mapsto \frac{x}{1-x}$$

は大小関係を保つ全単射 (順序同型写像) である.

$[0,+\infty)$ **は** $[0,1)$ **より無限に長いが**, $[0,1)$ **と同じ長さでもある**.

始切片

定義

順序集合 $(X, <)$ **の**, $a \in X$ **を切り口とする始切片とは**, **部分集合**

$$X_a = \{x \in X : x < a\}$$

のことである.

始切片 (2)

始切片の例

始切片 (2)

始切片の例

- **半開区間** $[0,1)$ **は半直線** $[0,+\infty)$ **の** 1 **を切り口とする始切片**.

始切片 (2)

始切片の例

- **半開区間** $[0,1)$ **は半直線** $[0,+\infty)$ **の** 1 **を切り口とする始切片**.
- **負の数全体** $(-\infty,0)$ **は** $\mathbb{R}$ **の** 0 **を切り口とする始切片**.

始切片 (2)

始切片の例

- 半開区間 $[0, 1)$ は半直線 $[0, +\infty)$ の 1 を切り口とする始切片.
- 負の数全体 $(-\infty, 0)$ は $\mathbb{R}$ の 0 を切り口とする始切片.
- 半直線 $(-\infty, 0]$ は $\mathbb{R}$ の始切片でない.

始切片 (2)

始切片の例

- 半開区間 $[0,1)$ は半直線 $[0,+\infty)$ の 1 を切り口とする始切片.
- 負の数全体 $(-\infty,0)$ は $\mathbb{R}$ の 0 を切り口とする始切片.
- 半直線 $(-\infty,0]$ は $\mathbb{R}$ の始切片でない.
- 空集合 $\emptyset$ は $\mathbb{N}$ の 0 を切り口とする始切片.

始切片 (2)

始切片の例

- 半開区間 $[0, 1)$ は半直線 $[0, +\infty)$ の 1 を切り口とする始切片.
- 負の数全体 $(-\infty, 0)$ は $\mathbb{R}$ の 0 を切り口とする始切片.
- 半直線 $(-\infty, 0]$ は $\mathbb{R}$ の始切片でない.
- 空集合 $\emptyset$ は $\mathbb{N}$ の 0 を切り口とする始切片.
- $\{0\}$ は $\mathbb{N}$ の 1 を切り口とする始切片.

始切片 (2)

始切片の例

- 半開区間 $[0,1)$ は半直線 $[0,+\infty)$ の 1 を切り口とする始切片.
- 負の数全体 $(-\infty,0)$ は $\mathbb{R}$ の 0 を切り口とする始切片.
- 半直線 $(-\infty,0]$ は $\mathbb{R}$ の始切片でない.
- 空集合 $\emptyset$ は $\mathbb{N}$ の 0 を切り口とする始切片.
- $\{0\}$ は $\mathbb{N}$ の 1 を切り口とする始切片.
- $\{0,1\}$ は $\mathbb{N}$ の 2 を切り口とする始切片.

始切片 (2)

始切片の例

- 半開区間 $[0, 1)$ は半直線 $[0, +\infty)$ の 1 を切り口とする始切片.
- 負の数全体 $(-\infty, 0)$ は $\mathbb{R}$ の 0 を切り口とする始切片.
- 半直線 $(-\infty, 0]$ は $\mathbb{R}$ の始切片でない.
- 空集合 $\emptyset$ は $\mathbb{N}$ の 0 を切り口とする始切片.
- $\{0\}$ は $\mathbb{N}$ の 1 を切り口とする始切片.
- $\{0, 1\}$ は $\mathbb{N}$ の 2 を切り口とする始切片.
- $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ は $\mathbb{N}$ の n を切り口とする始切片.

始切片 (3)

定理

整列集合は自分の始切片とは順序同型にならない.

始切片 (3)

定理

整列集合は自分の始切片とは順序同型にならない.

証明: $(X, <)$ **から始切片** $(X_a, <)$ **(ただし** $a \in X$**) への順序同型写像** f **があったとすると,**

$$a > f(a) > f(f(a)) > \cdots > f^n(a) > \cdots$$

となり, 部分集合 $\{a, f(a), f(f(a)), \ldots, f^n(a), \ldots\}$ **が最小要素をもたない.**

始切片 (4)

$[0, +\infty)$ と $[0, 1)$ のようなことは整列集合では発生しない.

比較定理

整列集合の比較定理

X と Y をふたつの整列集合とするとき

のどれか一つだけが成立する.

比較定理

整列集合の比較定理

X と Y をふたつの整列集合とするとき

1. X と Y が同型 (同じ長さ)

のどれか一つだけが成立する.

比較定理

整列集合の比較定理

X と Y をふたつの整列集合とするとき

1. X と Y が同型 (同じ長さ)
2. X が Y のある始切片と同型 (Y が長い)

のどれか一つだけが成立する.

比較定理

整列集合の比較定理

X と Y をふたつの整列集合とするとき

1. X と Y が同型 (同じ長さ)
2. X が Y のある始切片と同型 (Y が長い)
3. X のある始切片が Y と同型 (X が長い)

のどれか一つだけが成立する.

比較定理

整列集合の比較定理

X と Y をふたつの整列集合とするとき

1. X と Y が同型 (同じ長さ)
2. X が Y のある始切片と同型 (Y が長い)
3. X のある始切片が Y と同型 (X が長い)

のどれか一つだけが成立する.

証明の概略: X_a と Y_b が同型のときに $a \approx b$ と紐付けすると, 各 $a \in X$ は高々 1 個の $b \in Y$ と紐付けされ, X の部分集合から Y の部分集合への順序同型対応が定まる. このとき, X と Y の少なくとも一方が取り尽されることを示せば比較定理が得られる.

比較定理

整列集合の比較定理

X と Y をふたつの整列集合とするとき

1. X と Y が同型 (同じ長さ)
2. X が Y のある始切片と同型 (Y が長い)
3. X のある始切片が Y と同型 (X が長い)

のどれか一つだけが成立する.

証明の概略: X_a と Y_b が同型のときに $a \approx b$ と紐付けすると, 各 $a \in X$ は高々 1 個の $b \in Y$ と紐付けされ, X の部分集合から Y の部分集合への順序同型対応が定まる. このとき, X と Y の少なくとも一方が取り尽されることを示せば比較定理が得られる. まさに玉入れの勝敗判定

順序型と順序数

順序同型な整列集合どうしを同一視した同値類のことをその整列集合の順序型 (order type) **という**.

順序型と順序数

順序同型な整列集合どうしを同一視した同値類のことをその整列集合の順序型 (order type) **という**.

- **比較定理により順序型どうしには自然に長短の順序がつく**.

順序型と順序数

順序同型な整列集合どうしを同一視した同値類のことをその整列集合の順序型 (order type) **という**.

- **比較定理により順序型どうしには自然に長短の順序がつく**.
- **すべての整列集合は自分の始切片の順序型全体のなす整列集合と順序同型である**.

順序型と順序数

順序同型な整列集合どうしを同一視した同値類のことをその整列集合の順序型 (order type) という.

- 比較定理により順序型どうしには自然に長短の順序がつく.
- すべての整列集合は自分の始切片の順序型全体のなす整列集合と順序同型である.
- 順序型の全体が, 整列集合の順序構造をあますところなく表現している.

順序型と順序数

順序同型な整列集合どうしを同一視した同値類のことをその整列集合の順序型 (order type) という.

- 比較定理により順序型どうしには自然に長短の順序がつく.
- すべての整列集合は自分の始切片の順序型全体のなす整列集合と順序同型である.
- 順序型の全体が, 整列集合の順序構造をあますところなく表現している.

定義

整列集合の順序型のことを**順序数** (ordinal number) という.

順序型と順序数 (2)

$\emptyset$ の順序型 $=$ 順序数 0

順序型と順序数 (2)

$\emptyset$ **の順序型** $=$ **順序数** 0
$\{0\}$ **の順序型** $=$ **順序数** 1

順序型と順序数 (2)

$\emptyset$ **の順序型** $=$ **順序数** 0
$\{0\}$ **の順序型** $=$ **順序数** 1
$\{0,1\}$ **の順序型** $=$ **順序数** 2
$\cdots$

順序型と順序数 (2)

$\emptyset$ **の順序型** $=$ **順序数** 0
$\{0\}$ **の順序型** $=$ **順序数** 1
$\{0,1\}$ **の順序型** $=$ **順序数** 2
…
$\{0,1,\ldots,n-1\}$ **の順序型** $=$ **順序数** n
…

順序型と順序数 (2)

$\emptyset$ **の順序型** $=$ **順序数** 0
$\{0\}$ **の順序型** $=$ **順序数** 1
$\{0, 1\}$ **の順序型** $=$ **順序数** 2
$\cdots$
$\{0, 1, \ldots, n-1\}$ **の順序型** $=$ **順序数** n
$\cdots$
のように, 自然数には順序数としての意味づけができる.

順序型と順序数 (2)

$\emptyset$ **の順序型** $=$ **順序数** 0
$\{0\}$ **の順序型** $=$ **順序数** 1
$\{0,1\}$ **の順序型** $=$ **順序数** 2
…
$\{0,1,\ldots,n-1\}$ **の順序型** $=$ **順序数** n
…
のように，自然数には順序数としての意味づけができる．

$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots,n,\ldots\}$ **の順序型** $=$ **順序数** ω **(最小の無限順序数)**

順序型と順序数 (3)

$$0, 2, 4, \ldots, 2n, \ldots \mid 1, 3, 5, \ldots 2n{+}1, \ldots$$

の順序型は順序数 $\omega + \omega$ **または** $\omega \cdot 2$

$$0, 3, 6, \ldots, 3n, \ldots \mid 1, 4, 7, \ldots, 3n{+}1, \ldots \mid 2, 5, 8, \ldots, 3n{+}2, \ldots$$

の順序型は順序数 $\omega + \omega + \omega$ **または** $\omega \cdot 3$
これらはすべてカゴに入った可算無限個の玉をひとつずつ順に取り出す順序づけに対応している (可算順序数)

整列定理と選択公理

整列定理

どんな集合 X に対しても X 上の整列順序が少なくとも一つ存在する.

整列定理と選択公理

整列定理

どんな集合 X に対しても X 上の整列順序が少なくとも一つ存在する.

整列定理は, 写像

$$F: \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$$

で, すべての $A \subseteq X$ $(A \neq \emptyset)$ について $F(A) \in A$ となるもの (X の部分集合全体にかんする選択写像) の存在と同値.

整列定理と選択公理

整列定理

どんな集合 X に対しても X 上の整列順序が少なくとも一つ存在する.

整列定理は, 写像

$$F\colon \mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\}\to X$$

で, すべての $A\subseteq X$ $(A\neq\emptyset)$ について $F(A)\in A$ となるもの (X の部分集合全体にかんする選択写像) の存在と同値.

整列定理は選択公理の別表現

不可算順序数と濃度 $\aleph_1$

不可算集合を整列順序づければ，不可算順序数の存在も保証される．

不可算順序数と濃度 $\aleph_1$

不可算集合を整列順序づけすれば，不可算順序数の存在も保証される．そこで，最小の不可算順序数が存在する．

不可算順序数と濃度 $\aleph_1$

不可算集合を整列順序づけすれば，不可算順序数の存在も保証される．そこで，最小の不可算順序数が存在する．それを ω_1 と書く．

不可算順序数と濃度 $\aleph_1$

不可算集合を整列順序づけすれば，不可算順序数の存在も保証される．そこで，最小の不可算順序数が存在する．それを ω_1 と書く．

すべての始切片が可算だが，それ自身は可算でないような整列集合の順序型

不可算順序数と濃度 $\aleph_1$

不可算集合を整列順序づけすれば，不可算順序数の存在も保証される．そこで，最小の不可算順序数が存在する．それを ω_1 と書く．

すべての始切片が可算だが，それ自身は可算でないような整列集合の順序型 $=$ すべての有限および可算の順序数のなす整列集合の順序型

不可算順序数と濃度 $\aleph_1$

順序型 ω_1 をもつ整列集合の濃度を $\aleph_1$ と書く.
$\aleph_1$ は高々可算な順序数全体のなす集合の濃度である.

濃度 $\aleph_1$ をもつ集合の構成

$\mathbb{Q}$:有理数全体

$$W = \{\, A \subset \mathbb{Q} \;:\; (A, <_{\mathbb{Q}}) \text{ は整列集合} \,\}$$

W 上に順序同型による同値関係 $\equiv$ を入れる

$$A \equiv B \iff (A, <_{\mathbb{Q}}) \cong (B, <_{\mathbb{Q}})$$

商集合 $W/\equiv$ をとると

$$\left| W/{\equiv} \right| = \aleph_1$$

となる.

濃度 $\aleph_1$ をもつ集合の構成 (2)

このとき

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \subset W \subset \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

なので, $|W| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$ である.
連続体濃度の集合 W から濃度 $\aleph_1$ の集合 $W/\equiv$ への全射が存在するので, (選択公理のもとで)

$$\aleph_1 \leqq \mathfrak{c}$$

となる. しかし

$$\aleph_1 \stackrel{?}{=} \mathfrak{c}$$

は通常の集合論の枠内で真偽が決定できない.