Solovay のモデルにおける almost disjoint family

藤田 博司

愛媛大学大学院理工学研究科

2024 年 11 月 7 日

今回の内容

- Solovay のモデルのこと
- Almost Disjoint Family (a.d. 族) のこと
- Törnquist の証明の紹介

Solovay のモデルとは

Robert M. Solovay が論文 [Solovay 1970] で発表した集合論のモデルで, そこでは ZF+DC (従属選択の原理) のほかに, regularity properties と呼ばれる

- 実数のどんな集合もルベーグ可測である,
- 実数のどんな集合もベールの性質をもつ,
- 実数の不可算集合はどれも完全集合を含む

といったことが成立する.

論文 [Solovay 1970] は, このモデルの構成のほかに, 関連するさまざまな問題に対するコメントや新たな問題提起をも含んでいて, 以後の集合論研究の源流の一つとなった基本文献であった.

Solovay のモデルの重要性は 50 年以上経った現在も失われていない.

Solovay のモデルとは

Robert M. Solovay が論文 [Solovay 1970] で発表した集合論のモデルで, そこでは ZF+DC (従属選択の原理) のほかに, regularity properties と呼ばれる

- 実数のどんな集合もルベーグ可測である,
- 実数のどんな集合もベールの性質をもつ,
- 実数の不可算集合はどれも完全集合を含む

といったことが成立する.

論文 [Solovay 1970] は, このモデルの構成のほかに, 関連するさまざまな問題に対するコメントや新たな問題提起をも含んでいて, 以後の集合論研究の源流の一つとなった基本文献であった.

Solovay のモデルの重要性は 50 年以上経った現在も失われていない.

Solovay のモデルとは

Robert M. Solovay が論文 [Solovay 1970] で発表した集合論のモデルで, そこでは ZF+DC (従属選択の原理) のほかに, regularity properties と呼ばれる

- 実数のどんな集合もルベーグ可測である,
- 実数のどんな集合もベールの性質をもつ,
- 実数の不可算集合はどれも完全集合を含む

といったことが成立する.

論文 [Solovay 1970] は, このモデルの構成のほかに, 関連するさまざまな問題に対するコメントや新たな問題提起をも含んでいて, 以後の集合論研究の源流の一つとなった基本文献であった.

Solovay のモデルの重要性は 50 年以上経った現在も失われていない.

Solovay のモデルとは

Robert M. Solovay が論文 [Solovay 1970] で発表した集合論のモデルで, そこでは ZF+DC (従属選択の原理) のほかに, regularity properties と呼ばれる

- 実数のどんな集合もルベーグ可測である,
- 実数のどんな集合もベールの性質をもつ,
- 実数の不可算集合はどれも完全集合を含む

といったことが成立する.

論文 [Solovay 1970] は, このモデルの構成のほかに, 関連するさまざまな問題に対するコメントや新たな問題提起をも含んでいて, 以後の集合論研究の源流の一つとなった基本文献であった.

Solovay のモデルの重要性は 50 年以上経った現在も失われていない.

Solovay のモデルとは

Robert M. Solovay が論文 [Solovay 1970] で発表した集合論のモデルで, そこでは ZF+DC (従属選択の原理) のほかに, regularity properties と呼ばれる

- 実数のどんな集合もルベーグ可測である,
- 実数のどんな集合もベールの性質をもつ,
- 実数の不可算集合はどれも完全集合を含む

といったことが成立する.

論文 [Solovay 1970] は, このモデルの構成のほかに, 関連するさまざまな問題に対するコメントや新たな問題提起をも含んでいて, 以後の集合論研究の源流の一つとなった基本文献であった.

Solovay のモデルの重要性は 50 年以上経った現在も失われていない.

Solovay のモデルとは

Robert M. Solovay が論文 [Solovay 1970] で発表した集合論のモデルで, そこでは ZF+DC (従属選択の原理) のほかに, regularity properties と呼ばれる

- 実数のどんな集合もルベーグ可測である,
- 実数のどんな集合もベールの性質をもつ,
- 実数の不可算集合はどれも完全集合を含む

といったことが成立する.

論文 [Solovay 1970] は, このモデルの構成のほかに, 関連するさまざまな問題に対するコメントや新たな問題提起をも含んでいて, 以後の集合論研究の源流の一つとなった基本文献であった.

Solovay のモデルの重要性は 50 年以上経った現在も失われていない.

Solovay のモデルとは

Robert M. Solovay が論文 [Solovay 1970] で発表した集合論のモデルで, そこでは ZF+DC (従属選択の原理) のほかに, regularity properties と呼ばれる

- 実数のどんな集合もルベーグ可測である,
- 実数のどんな集合もベールの性質をもつ,
- 実数の不可算集合はどれも完全集合を含む

といったことが成立する.

論文 [Solovay 1970] は, このモデルの構成のほかに, 関連するさまざまな問題に対するコメントや新たな問題提起をも含んでいて, 以後の集合論研究の源流の一つとなった基本文献であった.

Solovay のモデルの重要性は 50 年以上経った現在も失われていない.

Solovay のモデルの作り方 (1/2)

材料 (1 人前)

1. ZFC+“到達不能基数の存在” のモデル M, 1 個
2. $M \models$ (λ は到達不能基数) をみたす $\lambda \in M$, 1 個
3. 強制法の知識と経験, 適量

Solovay のモデルの作り方 (2/2)

作り方

1. $\mathrm{Lev}(\lambda)$ を, $\lambda \times \omega$ の有限部分集合から λ への関数 p で, すべての $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$ について $p(\alpha, n) < \alpha$ をみたすもの全体とする. (Levy の半順序)
2. $p, q \in \mathrm{Lev}(\lambda)$ に対して p が q の拡張であるとき $p \leqslant q$ として $\mathrm{Lev}(\lambda)$ に順序を入れる.
3. M 上 $\mathrm{Lev}(\lambda)$-ジェネリックなフィルター G をとり, ジェネリック拡大 $M[G]$ を作る.
4. $M[G]$ において順序数の可算列をパラメータとして定義可能な集合全体のクラス D を考える.
5. $M[G]$ の要素 x で $\mathrm{tc}(\{x\}) \subset D$ となるもの全体のクラスを N とする.

こうしてできる N が Solovay のモデル. ④⑤が難しければ N の代わりに $L(\mathbb{R})^{M[G]}$ を使っても OK.

Solovay のモデルの作り方 (2/2)

作り方

1. $\mathrm{Lev}(\lambda)$ を, $\lambda \times \omega$ の有限部分集合から λ への関数 p で, すべての $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$ について $p(\alpha, n) < \alpha$ をみたすもの全体とする. (Levy の半順序)
2. $p, q \in \mathrm{Lev}(\lambda)$ に対して p が q の拡張であるとき $p \leqslant q$ として $\mathrm{Lev}(\lambda)$ に順序を入れる.
3. M 上 $\mathrm{Lev}(\lambda)$-ジェネリックなフィルター G をとり, ジェネリック拡大 $M[G]$ を作る.
4. $M[G]$ において順序数の可算列をパラメータとして定義可能な集合全体のクラス D を考える.
5. $M[G]$ の要素 x で $\mathrm{tc}(\{x\}) \subset D$ となるもの全体のクラスを N とする.

こうしてできる N が Solovay のモデル. ④⑤が難しければ N の代わりに $L(\mathbb{R})^{M[G]}$ を使っても OK.

Solovay のモデルの作り方 (2/2)

作り方

1. $\mathrm{Lev}(\lambda)$ を, $\lambda \times \omega$ の有限部分集合から λ への関数 p で, すべての $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$ について $p(\alpha, n) < \alpha$ をみたすもの全体とする. (Levy の半順序)
2. $p, q \in \mathrm{Lev}(\lambda)$ に対して p が q の拡張であるとき $p \leqslant q$ として $\mathrm{Lev}(\lambda)$ に順序を入れる.
3. M 上 $\mathrm{Lev}(\lambda)$-ジェネリックなフィルター G をとり, ジェネリック拡大 $M[G]$ を作る.
4. $M[G]$ において順序数の可算列をパラメータとして定義可能な集合全体のクラス D を考える.
5. $M[G]$ の要素 x で $\mathrm{tc}(\{x\}) \subset D$ となるもの全体のクラスを N とする.

こうしてできる N が Solovay のモデル. ④⑤が難しければ N の代わりに $L(\mathbb{R})^{M[G]}$ を使っても OK.

Solovay のモデルの作り方 (2/2)

作り方

1. $\mathrm{Lev}(\lambda)$ を, $\lambda \times \omega$ の有限部分集合から λ への関数 p で, すべての $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$ について $p(\alpha, n) < \alpha$ をみたすもの全体とする. (Levy の半順序)
2. $p, q \in \mathrm{Lev}(\lambda)$ に対して p が q の拡張であるとき $p \leqslant q$ として $\mathrm{Lev}(\lambda)$ に順序を入れる.
3. M 上 $\mathrm{Lev}(\lambda)$-ジェネリックなフィルター G をとり, ジェネリック拡大 $M[G]$ を作る.
4. $M[G]$ において順序数の可算列をパラメータとして定義可能な集合全体のクラス D を考える.
5. $M[G]$ の要素 x で $\mathrm{tc}(\{x\}) \subset D$ となるもの全体のクラスを N とする.

こうしてできる N が Solovay のモデル. ④⑤が難しければ N の代わりに $L(\mathbb{R})^{M[G]}$ を使っても OK.

Solovay のモデルの作り方 (2/2)

作り方

1. $\mathrm{Lev}(\lambda)$ を, $\lambda \times \omega$ の有限部分集合から λ への関数 p で, すべての $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$ について $p(\alpha, n) < \alpha$ をみたすもの全体とする. (Levy の半順序)
2. $p, q \in \mathrm{Lev}(\lambda)$ に対して p が q の拡張であるとき $p \leqslant q$ として $\mathrm{Lev}(\lambda)$ に順序を入れる.
3. M 上 $\mathrm{Lev}(\lambda)$-ジェネリックなフィルター G をとり, ジェネリック拡大 $M[G]$ を作る.
4. $M[G]$ において順序数の可算列をパラメータとして定義可能な集合全体のクラス D を考える.
5. $M[G]$ の要素 x で $\mathrm{tc}(\{x\}) \subset D$ となるもの全体のクラスを N とする.

こうしてできる N が Solovay のモデル. ④⑤が難しければ N の代わりに $L(\mathbb{R})^{M[G]}$ を使っても OK.

Solovay のモデルの作り方 (2/2)

作り方

1. $\mathrm{Lev}(\lambda)$ を, $\lambda \times \omega$ の有限部分集合から λ への関数 p で, すべての $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$ について $p(\alpha, n) < \alpha$ をみたすもの全体とする. (Levy の半順序)
2. $p, q \in \mathrm{Lev}(\lambda)$ に対して p が q の拡張であるとき $p \leqslant q$ として $\mathrm{Lev}(\lambda)$ に順序を入れる.
3. M 上 $\mathrm{Lev}(\lambda)$-ジェネリックなフィルター G をとり, ジェネリック拡大 $M[G]$ を作る.
4. $M[G]$ において順序数の可算列をパラメータとして定義可能な集合全体のクラス D を考える.
5. $M[G]$ の要素 x で $\mathrm{tc}(\{x\}) \subset D$ となるもの全体のクラスを N とする.

こうしてできる N が Solovay のモデル. ④⑤が難しければ N の代わりに $L(\mathbb{R})^{M[G]}$ を使っても OK.

Solovay のモデルの作り方 (2/2)

作り方

1. $\mathrm{Lev}(\lambda)$ を, $\lambda \times \omega$ の有限部分集合から λ への関数 p で, すべての $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$ について $p(\alpha, n) < \alpha$ をみたすもの全体とする. (Levy の半順序)
2. $p, q \in \mathrm{Lev}(\lambda)$ に対して p が q の拡張であるとき $p \leqslant q$ として $\mathrm{Lev}(\lambda)$ に順序を入れる.
3. M 上 $\mathrm{Lev}(\lambda)$-ジェネリックなフィルター G をとり, ジェネリック拡大 $M[G]$ を作る.
4. $M[G]$ において順序数の可算列をパラメータとして定義可能な集合全体のクラス D を考える.
5. $M[G]$ の要素 x で $\mathrm{tc}(\{x\}) \subset D$ となるもの全体のクラスを N とする.

こうしてできる N が Solovay のモデル. ④⑤が難しければ N の代わりに $L(\mathbb{R})^{M[G]}$ を使っても OK.

Solovay のモデルの作り方 (2/2)

作り方

1. $\mathrm{Lev}(\lambda)$ を, $\lambda \times \omega$ の有限部分集合から λ への関数 p で, すべての $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$ について $p(\alpha, n) < \alpha$ をみたすもの全体とする. (Levy の半順序)
2. $p, q \in \mathrm{Lev}(\lambda)$ に対して p が q の拡張であるとき $p \leqslant q$ として $\mathrm{Lev}(\lambda)$ に順序を入れる.
3. M 上 $\mathrm{Lev}(\lambda)$-ジェネリックなフィルター G をとり, ジェネリック拡大 $M[G]$ を作る.
4. $M[G]$ において順序数の可算列をパラメータとして定義可能な集合全体のクラス D を考える.
5. $M[G]$ の要素 x で $\mathrm{tc}(\{x\}) \subset D$ となるもの全体のクラスを N とする.

こうしてできる N が Solovay のモデル. ④⑤が難しければ N の代わりに $L(\mathbb{R})^{M[G]}$ を使っても OK.

Solovay のモデルのおいしさの秘密 (1/2)

おいしさの秘密その 1

$s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ のとき, $M \cup \{s\}$ を含む $M[G]$ の最小の内部モデル $M[s]$ が存在して,

$$M[s] \models (\lambda \text{ は到達不能基数})$$

であり, しかも

$$M[G] \text{ は } M[s] \text{ の } \mathrm{Lev}(\lambda)\text{-ジェネリック拡大}$$

である.

Solovay のモデルのおいしさの秘密 (2/2)

おいしさの秘密その 2

$A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^N$ のとき, ある $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ と, 集合論の論理式 $\varphi(x, y)$ が存在して, すべての $x \in (\mathbb{R})^{M[G]}$ に対して

$$x \in A \Leftrightarrow M[s][x] \models \varphi(x, s)$$

が成立する.

(このとき A は $M[G]$ において Solovay over $M[s]$ であるという.)

Solovay モデルでのルベーグ可測性 (1/2)

$A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^N$ とする．おいしさの秘密 2 により，ある $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ が存在して A は Solovay over $M[s]$ である．

また，おいしさの秘密 1 により，$M[G]$ の “ほとんどすべて” の実数は $M[s]$ 上のランダム実数である．

$A = \{\, x \in (\mathbb{R})^{M[G]} : (\varphi(x, s))^{M[s][x]} \,\}$ となる論理式 $\varphi(x, y)$ をとろう．$M[s]$ 上のランダム実数の標準的な名前を $\dot{r}$ とすると，$M[s]$ 上のランダム実数 r については

$$r \in A \Leftrightarrow \exists B : M[s] \text{ のボレル集合}, r \in B \,\&\, \left(B \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\dot{r}, \check{s})\right)^{M[s]}$$

となっている．($\mathbb{B}$ はランダム強制)

Solovay モデルでのルベーグ可測性 (1/2)

$A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^N$ とする．おいしさの秘密 2 により，ある $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ が存在して A は Solovay over $M[s]$ である．

また，おいしさの秘密 1 により，$M[G]$ の “ほとんどすべて” の実数は $M[s]$ 上のランダム実数である．

$A = \{\, x \in (\mathbb{R})^{M[G]} : (\varphi(x, s))^{M[s][x]} \,\}$ となる論理式 $\varphi(x, y)$ をとろう．$M[s]$ 上のランダム実数の標準的な名前を $\dot{r}$ とすると，$M[s]$ 上のランダム実数 r については

$$r \in A \Leftrightarrow \exists B : M[s] \text{ のボレル集合}, r \in B \,\&\, \left(B \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\dot{r}, \check{s})\right)^{M[s]}$$

となっている．($\mathbb{B}$ はランダム強制)

Solovay モデルでのルベーグ可測性 (1/2)

$A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^N$ とする．おいしさの秘密 2 により，ある $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ が存在して A は Solovay over $M[s]$ である．

また，おいしさの秘密 1 により，$M[G]$ の “ほとんどすべて” の実数は $M[s]$ 上のランダム実数である．

$A = \{\, x \in (\mathbb{R})^{M[G]} : (\varphi(x, s))^{M[s][x]} \,\}$ となる論理式 $\varphi(x, y)$ をとろう．$M[s]$ 上のランダム実数の標準的な名前を $\dot{r}$ とすると，$M[s]$ 上のランダム実数 r については

$$r \in A \Leftrightarrow \exists B : M[s] \text{ のボレル集合}, r \in B \,\&\, \left(B \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\dot{r}, \check{s})\right)^{M[s]}$$

となっている．($\mathbb{B}$ はランダム強制)

Solovay モデルでのルベーグ可測性 (1/2)

$A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^N$ とする．おいしさの秘密 2 により，ある $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ が存在して A は Solovay over $M[s]$ である．

また，おいしさの秘密 1 により，$M[G]$ の “ほとんどすべて” の実数は $M[s]$ 上のランダム実数である．

$A = \{\, x \in (\mathbb{R})^{M[G]} : (\varphi(x, s))^{M[s][x]} \,\}$ となる論理式 $\varphi(x, y)$ をとろう．$M[s]$ 上のランダム実数の標準的な名前を $\dot{r}$ とすると，$M[s]$ 上のランダム実数 r については

$$r \in A \Leftrightarrow \exists B : M[s] \text{ のボレル集合}, r \in B \,\&\, \left(B \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\dot{r}, \check{s})\right)^{M[s]}$$

となっている．($\mathbb{B}$ はランダム強制)

Solovay モデルでのルベーグ可測性 (1/2)

$A \in (\mathcal{P}(\mathbb{R}))^N$ とする．おいしさの秘密 2 により，ある $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ が存在して A は Solovay over $M[s]$ である．

また，おいしさの秘密 1 により，$M[G]$ の “ほとんどすべて” の実数は $M[s]$ 上のランダム実数である．

$A = \{\, x \in (\mathbb{R})^{M[G]} : (\varphi(x, s))^{M[s][x]} \,\}$ となる論理式 $\varphi(x, y)$ をとろう．$M[s]$ 上のランダム実数の標準的な名前を $\dot{r}$ とすると，$M[s]$ 上のランダム実数 r については

$$r \in A \Leftrightarrow \exists B : M[s] \text{ のボレル集合}, r \in B \,\&\, \left(B \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\dot{r}, \check{s})\right)^{M[s]}$$

となっている．($\mathbb{B}$ はランダム強制)

Solovay モデルでのルベーグ可測性 (2/2)

$M[s]$ 上のランダム実数 r については

$$r \in A \Leftrightarrow \exists B : M[s] \text{ のボレル集合}, r \in B \,\&\, \left(B \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\dot{r}, \check{s})\right)^{M[s]}$$

そこで $M[s]$ 上のランダム強制における $\varphi(\dot{r}, \check{s})$ のブール値の代表元となるボレル集合 B をとれば, $M[s]$ 上のランダム実数 r について

$$r \in A \Leftrightarrow r \in B$$

が成立する. 差集合 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ は $M[s]$ 上ランダムでない実数ばかりとなり, その全体はゼロ集合である. よって, A は $M[G]$ においてルベーグ可測である. N と $M[G]$ は同じ実数をもち, したがって同じボレル集合をもつから, N においても A はルベーグ可測である.

Solovay モデルでのルベーグ可測性 (2/2)

$M[s]$ 上のランダム実数 r については

$$r \in A \Leftrightarrow \exists B : M[s] \text{ のボレル集合}, r \in B \,\&\, \left(B \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\dot{r}, \check{s})\right)^{M[s]}$$

そこで $M[s]$ 上のランダム強制における $\varphi(\dot{r}, \check{s})$ のブール値の代表元となるボレル集合 B をとれば, $M[s]$ 上のランダム実数 r について

$$r \in A \Leftrightarrow r \in B$$

が成立する. 差集合 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ は $M[s]$ 上ランダムでない実数ばかりとなり, その全体はゼロ集合である. よって, A は $M[G]$ においてルベーグ可測である. N と $M[G]$ は同じ実数をもち, したがって同じボレル集合をもつから, N においても A はルベーグ可測である.

Solovay モデルでのルベーグ可測性 (2/2)

$M[s]$ 上のランダム実数 r については

$$r \in A \Leftrightarrow \exists B : M[s] \text{ のボレル集合}, r \in B \,\&\, \left(B \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\dot{r}, \check{s})\right)^{M[s]}$$

そこで $M[s]$ 上のランダム強制における $\varphi(\dot{r}, \check{s})$ のブール値の代表元となるボレル集合 B をとれば, $M[s]$ 上のランダム実数 r について

$$r \in A \Leftrightarrow r \in B$$

が成立する. 差集合 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ は $M[s]$ 上ランダムでない実数ばかりとなり, その全体はゼロ集合である. よって, A は $M[G]$ においてルベーグ可測である. N と $M[G]$ は同じ実数をもち, したがって同じボレル集合をもつから, N においても A はルベーグ可測である.

Solovay モデルでのルベーグ可測性 (2/2)

$M[s]$ 上のランダム実数 r については

$$r \in A \Leftrightarrow \exists B : M[s] \text{ のボレル集合}, r \in B \,\&\, \left(B \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\dot{r}, \check{s})\right)^{M[s]}$$

そこで $M[s]$ 上のランダム強制における $\varphi(\dot{r}, \check{s})$ のブール値の代表元となるボレル集合 B をとれば, $M[s]$ 上のランダム実数 r について

$$r \in A \Leftrightarrow r \in B$$

が成立する. 差集合 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ は $M[s]$ 上ランダムでない実数ばかりとなり, その全体はゼロ集合である. よって, A は $M[G]$ においてルベーグ可測である. N と $M[G]$ は同じ実数をもち, したがって同じボレル集合をもつから, N においても A はルベーグ可測である.

Solovay モデルでのルベーグ可測性 (2/2)

$M[s]$ 上のランダム実数 r については

$$r \in A \Leftrightarrow \exists B : M[s] \text{ のボレル集合}, r \in B \,\&\, \left(B \Vdash_{\mathbb{B}} \varphi(\dot{r}, \check{s})\right)^{M[s]}$$

そこで $M[s]$ 上のランダム強制における $\varphi(\dot{r}, \check{s})$ のブール値の代表元となるボレル集合 B をとれば, $M[s]$ 上のランダム実数 r について

$$r \in A \Leftrightarrow r \in B$$

が成立する. 差集合 $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ は $M[s]$ 上ランダムでない実数ばかりとなり, その全体はゼロ集合である. よって, A は $M[G]$ においてルベーグ可測である. N と $M[G]$ は同じ実数をもち, したがって同じボレル集合をもつから, N においても A はルベーグ可測である.

Almost Family (とは?)

Almost Family (Oct.2019–Feb.2020, on Fox)
https://www.fox.com/almost-family/

Almost Disjoint Family

ω の無限部分集合の全体を $[\omega]^\omega$ と書く.
$x \in [\omega]^\omega$ のとき x の無限部分集合の全体を $[x]^\omega$ と書く.

ω の部分集合 x, y がほとんど交わらない (almost disjoint) とは, $x \cap y$ が有限であること.

部分集合族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ が a.d. 族 (almost disjoint family) であるとは, $\mathcal{A}$ のどの 2 要素もほとんど交わらないこと.

Almost Disjoint Family

ω の無限部分集合の全体を $[\omega]^\omega$ と書く.
$x \in [\omega]^\omega$ のとき x の無限部分集合の全体を $[x]^\omega$ と書く.

ω の部分集合 x, y がほとんど交わらない (almost disjoint) とは, $x \cap y$ が有限であること.

部分集合族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ が a.d. 族 (almost disjoint family) であるとは, $\mathcal{A}$ のどの 2 要素もほとんど交わらないこと.

Almost Disjoint Family

ω の無限部分集合の全体を $[\omega]^\omega$ と書く.
$x \in [\omega]^\omega$ のとき x の無限部分集合の全体を $[x]^\omega$ と書く.

ω の部分集合 x, y がほとんど交わらない (almost disjoint) とは, $x \cap y$ が有限であること.

部分集合族 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ が a.d. 族 (almost disjoint family) であるとは, $\mathcal{A}$ のどの 2 要素もほとんど交わらないこと.

mad 族の定義

無限個のメンバーからなり, 包含関係の意味で極大な a.d. 族を mad 族 (mad family) という.

(無限個のメンバーを要請するのは $\{\omega\}$ のような自明な例を排除するため.)

mad 族の存在と不存在について (1/4)

可算な mad 族は存在しない.

ZFC では (Zorn の補題を用いて) mad 族の存在が証明できる.

疑問

mad 族の存在証明に AC の使用は必須だろうか?

この問いに関連したいくつかの結果を紹介する.

mad 族の存在と不存在について (1/4)

可算な mad 族は存在しない.

ZFC では (Zorn の補題を用いて) mad 族の存在が証明できる.

疑問

mad 族の存在証明に AC の使用は必須だろうか?

この問いに関連したいくつかの結果を紹介する.

mad 族の存在と不存在について (1/4)

可算な mad 族は存在しない.

ZFC では (Zorn の補題を用いて) mad 族の存在が証明できる.

疑問

mad 族の存在証明に AC の使用は必須だろうか?

この問いに関連したいくつかの結果を紹介する.

mad 族の存在と不存在について (1/4)

可算な mad 族は存在しない.

ZFC では (Zorn の補題を用いて) mad 族の存在が証明できる.

疑問

mad 族の存在証明に AC の使用は必須だろうか?

この問いに関連したいくつかの結果を紹介する.

mad 族の存在と不存在について (2/4)

$[\omega]^\omega$ はカントール空間としての $\mathcal{P}(\omega) \approx 2^\omega$ の $\mathbf{\Pi}^0_2$ $(=\mathrm{G}_\delta)$ 部分集合として, 無理数全体の集合と同相なポーランド空間になっている.

そこで, 記述集合論的な意味で mad 族の定義可能性について議論できる.

[Mathias 1977]　$\mathbf{\Sigma}^1_1$ な mad 族は存在しない.

[Miller 1989]　$V = L$ のとき $\mathbf{\Pi}^1_1$ な mad 族が存在する.

mad 族の存在と不存在について (2/4)

$[\omega]^\omega$ はカントール空間としての $\mathcal{P}(\omega) \approx 2^\omega$ の $\mathbf{\Pi}^0_2$ $(=\mathrm{G}_\delta)$ 部分集合として, 無理数全体の集合と同相なポーランド空間になっている.

そこで, 記述集合論的な意味で mad 族の定義可能性について議論できる.

[Mathias 1977]　$\mathbf{\Sigma}^1_1$ な mad 族は存在しない.

[Miller 1989]　$V = L$ のとき $\mathbf{\Pi}^1_1$ な mad 族が存在する.

mad 族の存在と不存在について (2/4)

$[\omega]^\omega$ はカントール空間としての $\mathcal{P}(\omega) \approx 2^\omega$ の $\mathbf{\Pi}^0_2$ $(=\mathrm{G}_\delta)$ 部分集合として, 無理数全体の集合と同相なポーランド空間になっている.

そこで, 記述集合論的な意味で mad 族の定義可能性について議論できる.

[Mathias 1977]　$\mathbf{\Sigma}^1_1$ な mad 族は存在しない.

[Miller 1989]　$V = L$ のとき $\mathbf{\Pi}^1_1$ な mad 族が存在する.

mad 族の存在と不存在について (3/4)

[Mathias 1977] では, Σ^1_1 な mad 族の不存在のほかに, 次のことが証明されていた,

Mathias の結果

Mahlo 基数を潰して Solovay のモデルを作れば, そこには mad 族は存在しない.

この Mahlo 基数の仮定を弱められるかが当然問題になるわけで,

Mathias の問題

(1) 到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族が存在しないといえるか.
(2) mad 族の不存在の無矛盾性に巨大基数は必要か.

が問題として残された. [Törnquist 2018] はこの (1) に答える.

mad 族の存在と不存在について (3/4)

[Mathias 1977] では, Σ^1_1 な mad 族の不存在のほかに, 次のことが証明されていた,

Mathias の結果

Mahlo 基数を潰して Solovay のモデルを作れば, そこには mad 族は存在しない.

この Mahlo 基数の仮定を弱められるかが当然問題になるわけで,

Mathias の問題

(1) 到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族が存在しないといえるか.
(2) mad 族の不存在の無矛盾性に巨大基数は必要か.

が問題として残された. [Törnquist 2018] はこの (1) に答える.

mad 族の存在と不存在について (3/4)

[Mathias 1977] では, Σ^1_1 な mad 族の不存在のほかに, 次のことが証明されていた,

Mathias の結果

Mahlo 基数を潰して Solovay のモデルを作れば, そこには mad 族は存在しない.

この Mahlo 基数の仮定を弱められるかが当然問題になるわけで,

Mathias の問題

(1) 到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族が存在しないといえるか.
(2) mad 族の不存在の無矛盾性に巨大基数は必要か.

が問題として残された. [Törnquist 2018] はこの (1) に答える.

mad 族の存在と不存在について (3/4)

[Mathias 1977] では, Σ^1_1 な mad 族の不存在のほかに, 次のことが証明されていた,

Mathias の結果

Mahlo 基数を潰して Solovay のモデルを作れば, そこには mad 族は存在しない.

この Mahlo 基数の仮定を弱められるかが当然問題になるわけで,

Mathias の問題

(1) 到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族が存在しないといえるか.
(2) mad 族の不存在の無矛盾性に巨大基数は必要か.

が問題として残された. [Törnquist 2018] はこの (1) に答える.

mad 族の存在と不存在について (3/4)

[Mathias 1977] では, Σ^1_1 な mad 族の不存在のほかに, 次のことが証明されていた,

Mathias の結果

Mahlo 基数を潰して Solovay のモデルを作れば, そこには mad 族は存在しない.

この Mahlo 基数の仮定を弱められるかが当然問題になるわけで,

Mathias の問題

(1) 到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族が存在しないといえるか.
(2) mad 族の不存在の無矛盾性に巨大基数は必要か.

が問題として残された. [Törnquist 2018] はこの (1) に答える.

mad 族の存在と不存在について (4/4)

Mathias の問題

(1) 到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族が存在しないといえるか.
(2) mad 族の不存在の無矛盾性に巨大基数は必要か.

これに対して,

[Törnquist 2018] の結果

到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族は存在しない.

この結果の証明の概略を述べよう.

mad 族の存在と不存在について (4/4)

Mathias の問題

(1) 到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族が存在しないといえるか.
(2) mad 族の不存在の無矛盾性に巨大基数は必要か.

これに対して,

[Törnquist 2018] の結果

到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族は存在しない.

この結果の証明の概略を述べよう.

mad 族の存在と不存在について (4/4)

Mathias の問題

(1) 到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族が存在しないといえるか.
(2) mad 族の不存在の無矛盾性に巨大基数は必要か.

これに対して,

[Törnquist 2018] の結果

到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族は存在しない.

この結果の証明の概略を述べよう.

mad 族の存在と不存在について (4/4)

Mathias の問題

(1) 到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族が存在しないといえるか.
(2) mad 族の不存在の無矛盾性に巨大基数は必要か.

これに対して,

[Törnquist 2018] の結果

到達不能基数を潰してできる Solovay のモデルに, mad 族は存在しない.

この結果の証明の概略を述べよう.

Törnquist の証明 (1/13)

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ が与えられたとき, 各 $p \in P$ に対して

$$x(\sigma, p) = \{\, n \in \omega : \exists q \leqslant p [\, q \Vdash_P (\check{n} \in \sigma) \,] \,\}$$

と定義する.

これは p を採用するジェネリック G に対して $\sigma[G]$ に属する可能性がちょっとでもある $n \in \omega$ の全体である.

G が P-ジェネリックで $p \in G$ のとき必ず $\sigma[G] \subseteq x(\sigma, p)$ であることと, $x(\sigma, p)$ が基礎モデルにあることが重要.

Törnquist の証明 (1/13)

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ が与えられたとき, 各 $p \in P$ に対して

$$x(\sigma, p) = \left\{ n \in \omega : \exists q \leqslant p [\, q \Vdash_P (\check{n} \in \sigma) \,] \right\}$$

と定義する.

これは p を採用するジェネリック G に対して $\sigma[G]$ に属する可能性がちょっとでもある $n \in \omega$ の全体である.

G が P-ジェネリックで $p \in G$ のとき必ず $\sigma[G] \subseteq x(\sigma, p)$ であることと, $x(\sigma, p)$ が基礎モデルにあることが重要.

Törnquist の証明 (1/13)

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ が与えられたとき, 各 $p \in P$ に対して

$$x(\sigma, p) = \left\{ n \in \omega : \exists q \leqslant p [\, q \Vdash_P (\check{n} \in \sigma) \,] \right\}$$

と定義する.

これは p を採用するジェネリック G に対して $\sigma[G]$ に属する可能性がちょっとでもある $n \in \omega$ の全体である.

G が P-ジェネリックで $p \in G$ のとき必ず $\sigma[G] \subseteq x(\sigma, p)$ であることと, $x(\sigma, p)$ が基礎モデルにあることが重要.

Törnquist の証明 (1/13)

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ が与えられたとき, 各 $p \in P$ に対して

$$x(\sigma, p) = \left\{ n \in \omega : \exists q \leqslant p [\, q \Vdash_P (\check{n} \in \sigma) \,] \right\}$$

と定義する.

これは p を採用するジェネリック G に対して $\sigma[G]$ に属する可能性がちょっとでもある $n \in \omega$ の全体である.

G が P-ジェネリックで $p \in G$ のとき必ず $\sigma[G] \subseteq x(\sigma, p)$ であることと, $x(\sigma, p)$ が基礎モデルにあることが重要.

Törnquist の証明 (1/13)

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ が与えられたとき, 各 $p \in P$ に対して

$$x(\sigma, p) = \left\{ n \in \omega : \exists q \leqslant p [\, q \Vdash_P (\check{n} \in \sigma) \,] \right\}$$

と定義する.

これは p を採用するジェネリック G に対して $\sigma[G]$ に属する可能性がちょっとでもある $n \in \omega$ の全体である.

G が P-ジェネリックで $p \in G$ のとき必ず $\sigma[G] \subseteq x(\sigma, p)$ であることと, $x(\sigma, p)$ が基礎モデルにあることが重要.

Törnquist の証明 (2/13)

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ と $r \in P$ が与えられたとき,
r の下の (P, σ)-対角列 ((P, σ)-diagonal sequence) とは, 次のような系列 $(p_i^j, n_i)_{i \in \omega}^{j \in \{0,1\}}$ のことだとする.

1. $p_0^j \leqslant r$ $(j = 0, 1)$,
2. $p_{i+1}^j \leqslant p_i^1$ $(j = 0, 1)$,
3. $x(\sigma, p_i^0) \cap x(\sigma, p_i^1) \subseteq n_i$.

Törnquist の証明 (2/13)

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ と $r \in P$ が与えられたとき,
r の下の (P, σ)-対角列 ((P, σ)-diagonal sequence) とは, 次のような系列 $(p_i^j, n_i)_{i \in \omega}^{j \in \{0,1\}}$ のことだとする.

1. $p_0^j \leqslant r \ (j = 0, 1)$,
2. $p_{i+1}^j \leqslant p_i^1 \ (j = 0, 1)$,
3. $x(\sigma, p_i^0) \cap x(\sigma, p_i^1) \subseteq n_i$.

Törnquist の証明 (2/13)

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ と $r \in P$ が与えられたとき,
r の下の (P, σ)-対角列 ((P, σ)-diagonal sequence) とは, 次のような系列 $(p_i^j, n_i)_{i \in \omega}^{j \in \{0,1\}}$ のことだとする.

1. $p_0^j \leqslant r$ $(j = 0, 1)$,
2. $p_{i+1}^j \leqslant p_i^1$ $(j = 0, 1)$,
3. $x(\sigma, p_i^0) \cap x(\sigma, p_i^1) \subseteq n_i$.

Törnquist の証明 (2/13)

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ と $r \in P$ が与えられたとき,
r の下の (P, σ)-対角列 ((P, σ)-diagonal sequence) とは, 次のような系列 $(p_i^j, n_i)_{i \in \omega}^{j \in \{0,1\}}$ のことだとする.

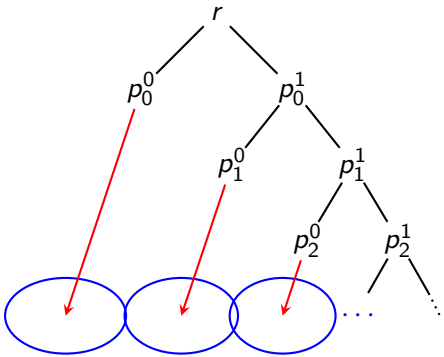
1. $p_0^j \leqslant r$ $(j = 0, 1)$,
2. $p_{i+1}^j \leqslant p_i^1$ $(j = 0, 1)$,
3. $x(\sigma, p_i^0) \cap x(\sigma, p_i^1) \subseteq n_i$.

Törnquist の証明 (2/13)

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ と $r \in P$ が与えられたとき,
r の下の (P, σ)-対角列 ((P, σ)-diagonal sequence) とは, 次のような系列 $(p_i^j, n_i)_{i \in \omega}^{j \in \{0,1\}}$ のことだとする.

1. $p_0^j \leqslant r$ $(j = 0, 1)$,
2. $p_{i+1}^j \leqslant p_i^1$ $(j = 0, 1)$,
3. $x(\sigma, p_i^0) \cap x(\sigma, p_i^1) \subseteq n_i$.

(P, σ)-対角列のイメージ



ほとんど交わりのない $x(\sigma, p_i^0)$ たち

Törnquist の証明 (3/13)

P-名前 σ に対し, $(\sigma)_0$ と $(\sigma)_1$ は $P \times P$-名前であって, $P \times P$-ジェネリックな $H = H_0 \times H_1$ に対して,

$$(\sigma)_0[H] = \sigma[H_0], \quad (\sigma)_1[H] = \sigma[H_1]$$

となるようなものとする. これは σ の rank に関する再帰的定義で定められる.

Shoenfield-Kunen 流の定義では,

$$(\sigma)_0 = \{ \langle (\tau)_0, \langle p, 1_P \rangle \rangle \ : \ \langle \tau, p \rangle \in \sigma \}$$
$$(\sigma)_1 = \{ \langle (\tau)_1, \langle 1_P, p \rangle \rangle \ : \ \langle \tau, p \rangle \in \sigma \}$$

とすればよい.

Törnquist の証明 (3/13)

P-名前 σ に対し, $(\sigma)_0$ と $(\sigma)_1$ は $P \times P$-名前であって, $P \times P$-ジェネリックな $H = H_0 \times H_1$ に対して,

$$(\sigma)_0[H] = \sigma[H_0], \quad (\sigma)_1[H] = \sigma[H_1]$$

となるようなものとする. これは σ の rank に関する再帰的定義で定められる.

Shoenfield-Kunen 流の定義では,

$$(\sigma)_0 = \{ \langle (\tau)_0, \langle p, 1_P \rangle \rangle \ : \ \langle \tau, p \rangle \in \sigma \}$$
$$(\sigma)_1 = \{ \langle (\tau)_1, \langle 1_P, p \rangle \rangle \ : \ \langle \tau, p \rangle \in \sigma \}$$

とすればよい.

Törnquist の証明 (3/13)

P-名前 σ に対し, $(\sigma)_0$ と $(\sigma)_1$ は $P \times P$-名前であって, $P \times P$-ジェネリックな $H = H_0 \times H_1$ に対して,

$$(\sigma)_0[H] = \sigma[H_0], \quad (\sigma)_1[H] = \sigma[H_1]$$

となるようなものとする. これは σ の rank に関する再帰的定義で定められる.

Shoenfield-Kunen 流の定義では,

$$(\sigma)_0 = \{ \langle (\tau)_0, \langle p, 1_P \rangle \rangle \ : \ \langle \tau, p \rangle \in \sigma \}$$
$$(\sigma)_1 = \{ \langle (\tau)_1, \langle 1_P, p \rangle \rangle \ : \ \langle \tau, p \rangle \in \sigma \}$$

とすればよい.

Törnquist の証明 (3/13)

P-名前 σ に対し, $(\sigma)_0$ と $(\sigma)_1$ は $P \times P$-名前であって, $P \times P$-ジェネリックな $H = H_0 \times H_1$ に対して,

$$(\sigma)_0[H] = \sigma[H_0], \quad (\sigma)_1[H] = \sigma[H_1]$$

となるようなものとする. これは σ の rank に関する再帰的定義で定められる.

Shoenfield-Kunen 流の定義では,

$$(\sigma)_0 = \{ \langle (\tau)_0, \langle p, 1_P \rangle \rangle \ : \ \langle \tau, p \rangle \in \sigma \}$$
$$(\sigma)_1 = \{ \langle (\tau)_1, \langle 1_P, p \rangle \rangle \ : \ \langle \tau, p \rangle \in \sigma \}$$

とすればよい.

Törnquist の証明 (4/13)

補題

半順序 P と ω の部分集合の P-名前 σ について, $p \in P$ が

1. $p \Vdash_P (\sigma \notin V)$
2. $(p, p) \Vdash_{P \times P} \left((\sigma)_0 \neq (\sigma)_1 \Rightarrow |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty\right) \ldots (*)$

となっているとする. このとき p の下の (P, σ)-対角列が存在する.

Törnquist の証明 (5/13)

補題の証明

P-ジェネリックな g を $p \in g$ となるようにとる. $\sigma[g] \notin V$ なので $x(\sigma, p) \neq \sigma[g]$ である. $x(\sigma, p)$ に属し $\sigma[g]$ に属しない $n \in \omega$ があるので, $q, r \leqslant p$ を $q \Vdash (\check{n} \in \sigma)$ かつ $r \Vdash (\check{n} \notin \sigma)$ となるようにとれる. このとき $(q, r) \Vdash_{P \times P} ((\sigma)_0 \neq (\sigma)_1)$ だから $(*)$ と合わせて $(q, r) \Vdash_{P \times P} |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. そこで $p_0^0 \leqslant q$ と $p_0^1 \leqslant r$ と $n_0 \in \omega$ を $(p_0^0, p_0^1) \Vdash_{P \times P} ((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_0)$ となるようにとれる.

次に p の代わりに p_0^1 に対して同じ議論により $p_1^0, p_1^1 \leqslant p_0^1$ と $n_1 \in \omega$ をとって $(p_1^0, p_1^1) \Vdash_{P \times P} ((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_1)$ とできる. これをくり返せばよい. (証明終)

Törnquist の証明 (5/13)

補題の証明

P-ジェネリックな g を $p \in g$ となるようにとる. $\sigma[g] \notin V$ なので $x(\sigma, p) \neq \sigma[g]$ である. $x(\sigma, p)$ に属し $\sigma[g]$ に属しない $n \in \omega$ があるので, $q, r \leqslant p$ を $q \Vdash (\check{n} \in \sigma)$ かつ $r \Vdash (\check{n} \notin \sigma)$ となるようにとれる. このとき $(q, r) \Vdash_{P \times P} ((\sigma)_0 \neq (\sigma)_1)$ だから $(*)$ と合わせて $(q, r) \Vdash_{P \times P} |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. そこで $p_0^0 \leqslant q$ と $p_0^1 \leqslant r$ と $n_0 \in \omega$ を $(p_0^0, p_0^1) \Vdash_{P \times P} ((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_0)$ となるようにとれる.

次に p の代わりに p_0^1 に対して同じ議論により $p_1^0, p_1^1 \leqslant p_0^1$ と $n_1 \in \omega$ をとって $(p_1^0, p_1^1) \Vdash_{P \times P} ((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_1)$ とできる. これをくり返せばよい. (証明終)

Törnquist の証明 (5/13)

補題の証明

P-ジェネリックな g を $p \in g$ となるようにとる. $\sigma[g] \notin V$ なので $x(\sigma, p) \neq \sigma[g]$ である. $x(\sigma, p)$ に属し $\sigma[g]$ に属しない $n \in \omega$ があるので, $q, r \leqslant p$ を $q \Vdash (\check{n} \in \sigma)$ かつ $r \Vdash (\check{n} \notin \sigma)$ となるようにとれる. このとき $(q, r) \Vdash_{P \times P} ((\sigma)_0 \neq (\sigma)_1)$ だから $(*)$ と合わせて $(q, r) \Vdash_{P \times P} |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. そこで $p_0^0 \leqslant q$ と $p_0^1 \leqslant r$ と $n_0 \in \omega$ を $(p_0^0, p_0^1) \Vdash_{P \times P} ((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_0)$ となるようにとれる.

次に p の代わりに p_0^1 に対して同じ議論により $p_1^0, p_1^1 \leqslant p_0^1$ と $n_1 \in \omega$ をとって $(p_1^0, p_1^1) \Vdash_{P \times P} ((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_1)$ とできる. これをくり返せばよい. (証明終)

Törnquist の証明 (5/13)

補題の証明

P-ジェネリックな g を $p \in g$ となるようにとる. $\sigma[g] \notin V$ なので $x(\sigma, p) \neq \sigma[g]$ である. $x(\sigma, p)$ に属し $\sigma[g]$ に属しない $n \in \omega$ があるので, $q, r \leqslant p$ を $q \Vdash (\check{n} \in \sigma)$ かつ $r \Vdash (\check{n} \notin \sigma)$ となるようにとれる. このとき $(q, r) \Vdash_{P \times P} \big((\sigma)_0 \neq (\sigma)_1\big)$ だから $(*)$ と合わせて $(q, r) \Vdash_{P \times P} |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. そこで $p_0^0 \leqslant q$ と $p_0^1 \leqslant r$ と $n_0 \in \omega$ を $(p_0^0, p_0^1) \Vdash_{P \times P} \big((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_0\big)$ となるようにとれる.

次に p の代わりに p_0^1 に対して同じ議論により $p_1^0, p_1^1 \leqslant p_0^1$ と $n_1 \in \omega$ をとって $(p_1^0, p_1^1) \Vdash_{P \times P} \big((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_1\big)$ とできる. これをくり返せばよい. (証明終)

Törnquist の証明 (5/13)

補題の証明

P-ジェネリックな g を $p \in g$ となるようにとる. $\sigma[g] \notin V$ なので $x(\sigma, p) \neq \sigma[g]$ である. $x(\sigma, p)$ に属し $\sigma[g]$ に属しない $n \in \omega$ があるので, $q, r \leqslant p$ を $q \Vdash (\check{n} \in \sigma)$ かつ $r \Vdash (\check{n} \notin \sigma)$ となるようにとれる. このとき $(q, r) \Vdash_{P \times P} \big((\sigma)_0 \neq (\sigma)_1\big)$ だから $(*)$ と合わせて $(q, r) \Vdash_{P \times P} |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. そこで $p_0^0 \leqslant q$ と $p_0^1 \leqslant r$ と $n_0 \in \omega$ を $(p_0^0, p_0^1) \Vdash_{P \times P} \big((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_0\big)$ となるようにとれる.

次に p の代わりに p_0^1 に対して同じ議論により $p_1^0, p_1^1 \leqslant p_0^1$ と $n_1 \in \omega$ をとって $(p_1^0, p_1^1) \Vdash_{P \times P} \big((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_1\big)$ とできる. これをくり返せばよい. (証明終)

Törnquist の証明 (5/13)

補題の証明

P-ジェネリックな g を $p \in g$ となるようにとる．$\sigma[g] \notin V$ なので $x(\sigma, p) \neq \sigma[g]$ である．$x(\sigma, p)$ に属し $\sigma[g]$ に属しない $n \in \omega$ があるので，$q, r \leqslant p$ を $q \Vdash (\check{n} \in \sigma)$ かつ $r \Vdash (\check{n} \notin \sigma)$ となるようにとれる．このとき $(q, r) \Vdash_{P \times P} \big((\sigma)_0 \neq (\sigma)_1\big)$ だから $(*)$ と合わせて $(q, r) \Vdash_{P \times P} |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である．そこで $p_0^0 \leqslant q$ と $p_0^1 \leqslant r$ と $n_0 \in \omega$ を $(p_0^0, p_0^1) \Vdash_{P \times P} \big((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_0\big)$ となるようにとれる．

次に p の代わりに p_0^1 に対して同じ議論により $p_1^0, p_1^1 \leqslant p_0^1$ と $n_1 \in \omega$ をとって $(p_1^0, p_1^1) \Vdash_{P \times P} \big((\sigma)_0 \cap (\sigma)_1 \subseteq \check{n}_1\big)$ とできる．これをくり返せばよい．(証明終)

Törnquist の証明 (6/13)

Solovay のモデル N において a.d. 族 $\mathcal{A}$ をとる.
($\mathcal{A}$ は不可算 $)^N$ と仮定してよい.
おいしさの秘密 2 により $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ が存在して $\mathcal{A}$ は Solovay over $M[s]$ となっている.
このとき, おいしさの秘密 1 により $s \in M$ と仮定しても一般性は損なわれない.
そこで論理式 $\varphi(x, y)$ が存在してすべての $x \in ([\omega]^{\omega})^{M[G]}$ について

$$x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M[x] \models \varphi(x, s)$$

となっている.

Törnquist の証明 (6/13)

Solovay のモデル N において a.d. 族 $\mathcal{A}$ をとる.
($\mathcal{A}$ は不可算)^N と仮定してよい.
おいしさの秘密 2 により $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ が存在して $\mathcal{A}$ は Solovay over $M[s]$ となっている.
このとき, おいしさの秘密 1 により $s \in M$ と仮定しても一般性は損なわれない.
そこで論理式 $\varphi(x, y)$ が存在してすべての $x \in ([\omega]^{\omega})^{M[G]}$ について

$$x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M[x] \models \varphi(x, s)$$

となっている.

Törnquist の証明 (6/13)

Solovay のモデル N において a.d. 族 $\mathcal{A}$ をとる.
($\mathcal{A}$ は不可算)^N と仮定してよい.
おいしさの秘密 2 により $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ が存在して $\mathcal{A}$ は Solovay over $M[s]$ となっている.
このとき, おいしさの秘密 1 により $s \in M$ と仮定しても一般性は損なわれない.
そこで論理式 $\varphi(x, y)$ が存在してすべての $x \in ([\omega]^{\omega})^{M[G]}$ について

$$x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M[x] \models \varphi(x, s)$$

となっている.

Törnquist の証明 (6/13)

Solovay のモデル N において a.d. 族 $\mathcal{A}$ をとる.
($\mathcal{A}$ は不可算 $)^N$ と仮定してよい.
おいしさの秘密 2 により $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ が存在して $\mathcal{A}$ は Solovay over $M[s]$ となっている.
このとき, おいしさの秘密 1 により $s \in M$ と仮定しても一般性は損われない.
そこで論理式 $\varphi(x, y)$ が存在してすべての $x \in ([\omega]^{\omega})^{M[G]}$ について

$$x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M[x] \models \varphi(x, s)$$

となっている.

Törnquist の証明 (6/13)

Solovay のモデル N において a.d. 族 $\mathcal{A}$ をとる.
($\mathcal{A}$ は不可算 $)^N$ と仮定してよい.
おいしさの秘密 2 により $s \in ({}^{\omega}\mathrm{ON})^{M[G]}$ が存在して $\mathcal{A}$ は Solovay over $M[s]$ となっている.
このとき, おいしさの秘密 1 により $s \in M$ と仮定しても一般性は損なわれない.
そこで論理式 $\varphi(x, y)$ が存在してすべての $x \in ([\omega]^{\omega})^{M[G]}$ について

$$x \in \mathcal{A} \Leftrightarrow M[x] \models \varphi(x, s)$$

となっている.

Törnquist の証明 (7/13)

$(P_\xi, r_\xi, \sigma_\xi)_{\xi<\lambda}$ は M において次の条件をみたす 3 つ組すべてを数え上げる (M における) 系列だとする:

(i) P_ξ はある $\kappa < \lambda$ についての $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$ である.

(ii) $r_\xi \in P_\xi$.

(iii) $1_{P_\xi} \Vdash_{P_\xi} (\sigma_\xi \in [\omega]^\omega)$.

(iv) $r_\xi \Vdash_{P_\xi} (\varphi(\sigma_\xi, \check{s}) \,\&\, \sigma_\xi \notin M)$.

Törnquist の証明 (7/13)

$(P_\xi, r_\xi, \sigma_\xi)_{\xi<\lambda}$ は M において次の条件をみたす 3 つ組すべてを数え上げる (M における) 系列だとする:

(i) P_ξ はある $\kappa < \lambda$ についての $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$ である.

(ii) $r_\xi \in P_\xi$.

(iii) $1_{P_\xi} \Vdash_{P_\xi} (\sigma_\xi \in [\omega]^\omega)$.

(iv) $r_\xi \Vdash_{P_\xi} (\varphi(\sigma_\xi, \check{s}) \,\&\, \sigma_\xi \notin M)$.

Törnquist の証明 (7/13)

$(P_\xi, r_\xi, \sigma_\xi)_{\xi<\lambda}$ は M において次の条件をみたす 3 つ組すべてを数え上げる (M における) 系列だとする:

(i) P_ξ はある $\kappa < \lambda$ についての $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$ である.

(ii) $r_\xi \in P_\xi$.

(iii) $1_{P_\xi} \Vdash_{P_\xi} (\sigma_\xi \in [\omega]^\omega)$.

(iv) $r_\xi \Vdash_{P_\xi} (\varphi(\sigma_\xi, \check{s}) \,\&\, \sigma_\xi \notin M)$.

Törnquist の証明 (7/13)

$(P_\xi, r_\xi, \sigma_\xi)_{\xi<\lambda}$ は M において次の条件をみたす 3 つ組すべてを数え上げる (M における) 系列だとする:

(i) P_ξ はある $\kappa < \lambda$ についての $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$ である.

(ii) $r_\xi \in P_\xi$.

(iii) $1_{P_\xi} \Vdash_{P_\xi} (\sigma_\xi \in [\omega]^\omega)$.

(iv) $r_\xi \Vdash_{P_\xi} (\varphi(\sigma_\xi, \check{s}) \,\&\, \sigma_\xi \notin M)$.

Törnquist の証明 (7/13)

$(P_\xi, r_\xi, \sigma_\xi)_{\xi<\lambda}$ は M において次の条件をみたす 3 つ組すべてを数え上げる (M における) 系列だとする:

(i) P_ξ はある $\kappa < \lambda$ についての $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$ である.

(ii) $r_\xi \in P_\xi$.

(iii) $1_{P_\xi} \Vdash_{P_\xi} (\sigma_\xi \in [\omega]^\omega)$.

(iv) $r_\xi \Vdash_{P_\xi} \left(\varphi(\sigma_\xi, \check{s}) \,\&\, \sigma_\xi \notin M\right)$.

Törnquist の証明 (8/13)

M において ω の部分集合の系列 A_i^α $(i \in \omega,\ \alpha < \alpha^*)$ を再帰的に定める.

各 $\beta < \alpha$ と $i \in \omega$ に対して A_i^β が定まったとして, r_ξ の下の (P_ξ, σ_ξ)-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在してかつ

$$r_\xi \Vdash_{P_\xi} (\forall k \in \omega)(\forall \beta_0, \ldots, \beta_k < \alpha)(\forall i_0, \ldots, i_k \in \omega) \left| \sigma_\xi \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}^{\beta_j} \right| = \infty \quad \cdots (**)$$

となるような ξ があればそのような最小のものをとって $A_i^\alpha = x(\sigma_\xi, p_i^0)$ と定める.

もしもそのような ξ がない場合は $\alpha^* = \alpha$ として再帰を終了する.

Törnquist の証明 (8/13)

M において ω の部分集合の系列 A_i^α $(i \in \omega,\ \alpha < \alpha^*)$ を再帰的に定める.

各 $\beta < \alpha$ と $i \in \omega$ に対して A_i^β が定まったとして, r_ξ の下の (P_ξ, σ_ξ)-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在してかつ

$$r_\xi \Vdash_{P_\xi} (\forall k \in \omega)(\forall \beta_0, \ldots, \beta_k < \alpha)(\forall i_0, \ldots, i_k \in \omega) \left| \sigma_\xi \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}^{\beta_j} \right| = \infty \quad \cdots (**)$$

となるような ξ があればそのような最小のものをとって $A_i^\alpha = x(\sigma_\xi, p_i^0)$ と定める.

もしもそのような ξ がない場合は $\alpha^* = \alpha$ として再帰を終了する.

Törnquist の証明 (8/13)

M において ω の部分集合の系列 A_i^α $(i \in \omega,\ \alpha < \alpha^*)$ を再帰的に定める.

各 $\beta < \alpha$ と $i \in \omega$ に対して A_i^β が定まったとして, r_ξ の下の (P_ξ, σ_ξ)-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在してかつ

$$r_\xi \Vdash_{P_\xi} (\forall k \in \omega)(\forall \beta_0, \ldots, \beta_k < \alpha)(\forall i_0, \ldots, i_k \in \omega) \left| \sigma_\xi \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}^{\beta_j} \right| = \infty \quad \cdots \ (**)$$

となるような ξ があればそのような最小のものをとって $A_i^\alpha = x(\sigma_\xi, p_i^0)$ と定める.

もしもそのような ξ がない場合は $\alpha^* = \alpha$ として再帰を終了する.

Törnquist の証明 (8/13)

M において ω の部分集合の系列 A_i^α $(i \in \omega,\ \alpha < \alpha^*)$ を再帰的に定める.

各 $\beta < \alpha$ と $i \in \omega$ に対して A_i^β が定まったとして, r_ξ の下の (P_ξ, σ_ξ)-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在してかつ

$$r_\xi \Vdash_{P_\xi} (\forall k \in \omega)(\forall \beta_0, \ldots, \beta_k < \alpha)(\forall i_0, \ldots, i_k \in \omega) \left| \sigma_\xi \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}^{\beta_j} \right| = \infty \quad \cdots \ (**)$$

となるような ξ があればそのような最小のものをとって $A_i^\alpha = x(\sigma_\xi, p_i^0)$ と定める.

もしもそのような ξ がない場合は $\alpha^* = \alpha$ として再帰を終了する.

Törnquist の証明 (8/13)

M において ω の部分集合の系列 A_i^α $(i \in \omega,\ \alpha < \alpha^*)$ を再帰的に定める.

各 $\beta < \alpha$ と $i \in \omega$ に対して A_i^β が定まったとして, r_ξ の下の (P_ξ, σ_ξ)-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在してかつ

$$r_\xi \Vdash_{P_\xi} (\forall k \in \omega)(\forall \beta_0, \ldots, \beta_k < \alpha)(\forall i_0, \ldots, i_k \in \omega) \left| \sigma_\xi \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}^{\beta_j} \right| = \infty \quad \cdots \ (**)$$

となるような ξ があればそのような最小のものをとって $A_i^\alpha = x(\sigma_\xi, p_i^0)$ と定める.

もしもそのような ξ がない場合は $\alpha^* = \alpha$ として再帰を終了する.

Törnquist の証明 (9/13)

Claim 1: $\alpha^* > 0$ である.

$M[G]$ において $\mathcal{A}$ において不可算なので $\mathcal{A} \not\subseteq ([\omega]^\omega)^V$ である. そこで, $\kappa < \lambda$ と $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-名前 σ と V 上 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ が存在して, $\sigma[g] \in \mathcal{A}$ かつ $\sigma[g] \notin M$ となる. $p \in g$ を,

$$p \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} (\varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M)$$

となるようにとると,

$$(p, p) \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)\times\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} \varphi((\sigma)_0) \,\&\, \varphi((\sigma)_1) \,\&\, (\sigma)_0 \neq (\sigma)_1$$

となる. $\mathcal{A}$ が a.d. 族であることから $(p, p) \Vdash |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. よって補題の条件 $(*)$ がみたされており, p の下の $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), \sigma)$-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在する. いまは $\alpha = 0$ なので条件 $(**)$ は無内容にみたされている. このような 3 つ組 $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), p, \sigma)$ が存在することから, $A_i^0 = x(\sigma, p_i^0)$ は定義される.

Törnquist の証明 (9/13)

Claim 1: $\alpha^* > 0$ である.

$M[G]$ において $\mathcal{A}$ において不可算なので $\mathcal{A} \not\subseteq ([\omega]^\omega)^V$ である. そこで, $\kappa < \lambda$ と $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-名前 σ と V 上 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ が存在して, $\sigma[g] \in \mathcal{A}$ かつ $\sigma[g] \notin M$ となる. $p \in g$ を,

$$p \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} (\varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M)$$

となるようにとると,

$$(p, p) \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)\times\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} \varphi((\sigma)_0) \,\&\, \varphi((\sigma)_1) \,\&\, (\sigma)_0 \neq (\sigma)_1$$

となる. $\mathcal{A}$ が a.d. 族であることから $(p, p) \Vdash |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. よって補題の条件 $(*)$ がみたされており, p の下の $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), \sigma)$-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在する. いまは $\alpha = 0$ なので条件 $(**)$ は無内容にみたされている. このような 3 つ組 $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), p, \sigma)$ が存在することから, $A_i^0 = x(\sigma, p_i^0)$ は定義される.

Törnquist の証明 (9/13)

Claim 1: $\alpha^* > 0$ である.

$M[G]$ において $\mathcal{A}$ において不可算なので $\mathcal{A} \not\subseteq ([\omega]^\omega)^V$ である. そこで, $\kappa < \lambda$ と $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-名前 σ と V 上 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ が存在して, $\sigma[g] \in \mathcal{A}$ かつ $\sigma[g] \notin M$ となる. $p \in g$ を,

$$p \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} (\varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M)$$

となるようにとると,

$$(p, p) \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)\times\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} \varphi((\sigma)_0) \,\&\, \varphi((\sigma)_1) \,\&\, (\sigma)_0 \neq (\sigma)_1$$

となる. $\mathcal{A}$ が a.d. 族であることから $(p, p) \Vdash |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. よって補題の条件 $(*)$ がみたされており, p の下の $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), \sigma)$-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在する. いまは $\alpha = 0$ なので条件 $(**)$ は無内容にみたされている. このような 3 つ組 $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), p, \sigma)$ が存在することから, $A_i^0 = x(\sigma, p_i^0)$ は定義される.

Törnquist の証明 (9/13)

Claim 1: $\alpha^* > 0$ である.

$M[G]$ において $\mathcal{A}$ において不可算なので $\mathcal{A} \not\subseteq ([\omega]^\omega)^V$ である. そこで, $\kappa < \lambda$ と $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-名前 σ と V 上 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ が存在して, $\sigma[g] \in \mathcal{A}$ かつ $\sigma[g] \notin M$ となる. $p \in g$ を,

$$p \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} (\varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M)$$

となるようにとると,

$$(p, p) \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)\times\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} \varphi((\sigma)_0) \,\&\, \varphi((\sigma)_1) \,\&\, (\sigma)_0 \neq (\sigma)_1$$

となる. $\mathcal{A}$ が a.d. 族であることから $(p, p) \Vdash |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. よって補題の条件 $(*)$ がみたされており, p の下の $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), \sigma)$-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在する. いまは $\alpha = 0$ なので条件 $(**)$ は無内容にみたされている. このような 3 つ組 $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), p, \sigma)$ が存在することから, $A_i^0 = x(\sigma, p_i^0)$ は定義される.

Törnquist の証明 (9/13)

Claim 1: $\alpha^* > 0$ である.

$M[G]$ において $\mathcal{A}$ において不可算なので $\mathcal{A} \not\subseteq ([\omega]^\omega)^V$ である. そこで, $\kappa < \lambda$ と $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-名前 σ と V 上 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ が存在して, $\sigma[g] \in \mathcal{A}$ かつ $\sigma[g] \notin M$ となる. $p \in g$ を,

$$p \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} (\varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M)$$

となるようにとると,

$$(p, p) \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)\times\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} \varphi((\sigma)_0) \,\&\, \varphi((\sigma)_1) \,\&\, (\sigma)_0 \neq (\sigma)_1$$

となる. $\mathcal{A}$ が a.d. 族であることから $(p, p) \Vdash |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. よって補題の条件 $(*)$ がみたされており, p の下の $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), \sigma)$-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在する. いまは $\alpha = 0$ なので条件 $(**)$ は無内容にみたされている. このような 3 つ組 $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), p, \sigma)$ が存在することから, $A_i^0 = x(\sigma, p_i^0)$ は定義される.

Törnquist の証明 (9/13)

Claim 1: $\alpha^* > 0$ である.

$M[G]$ において $\mathcal{A}$ において不可算なので $\mathcal{A} \not\subseteq ([\omega]^\omega)^V$ である. そこで, $\kappa < \lambda$ と $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-名前 σ と V 上 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ が存在して, $\sigma[g] \in \mathcal{A}$ かつ $\sigma[g] \notin M$ となる. $p \in g$ を,

$$p \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} (\varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M)$$

となるようにとると,

$$(p, p) \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)\times\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} \varphi((\sigma)_0) \,\&\, \varphi((\sigma)_1) \,\&\, (\sigma)_0 \neq (\sigma)_1$$

となる. $\mathcal{A}$ が a.d. 族であることから $(p, p) \Vdash |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. よって補題の条件 $(*)$ がみたされており, p の下の $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), \sigma)$-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在する. いまは $\alpha = 0$ なので条件 $(**)$ は無内容にみたされている. このような 3 つ組 $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), p, \sigma)$ が存在することから, $A_i^0 = x(\sigma, p_i^0)$ は定義される.

Törnquist の証明 (9/13)

Claim 1: $\alpha^* > 0$ である.

$M[G]$ において $\mathcal{A}$ において不可算なので $\mathcal{A} \not\subseteq ([\omega]^\omega)^V$ である. そこで, $\kappa < \lambda$ と $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-名前 σ と V 上 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ が存在して, $\sigma[g] \in \mathcal{A}$ かつ $\sigma[g] \notin M$ となる. $p \in g$ を,

$$p \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} (\varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M)$$

となるようにとると,

$$(p, p) \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)\times\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} \varphi((\sigma)_0) \,\&\, \varphi((\sigma)_1) \,\&\, (\sigma)_0 \neq (\sigma)_1$$

となる. $\mathcal{A}$ が a.d. 族であることから $(p, p) \Vdash |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. よって補題の条件 $(*)$ がみたされており, p の下の $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), \sigma)$-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在する. いまは $\alpha = 0$ なので条件 $(**)$ は無内容にみたされている. このような 3 つ組 $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), p, \sigma)$ が存在することから, $A_i^0 = x(\sigma, p_i^0)$ は定義される.

Törnquist の証明 (9/13)

Claim 1: $\alpha^* > 0$ である.

$M[G]$ において $\mathcal{A}$ において不可算なので $\mathcal{A} \not\subseteq ([\omega]^\omega)^V$ である. そこで, $\kappa < \lambda$ と $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-名前 σ と V 上 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ が存在して, $\sigma[g] \in \mathcal{A}$ かつ $\sigma[g] \notin M$ となる. $p \in g$ を,

$$p \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} (\varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M)$$

となるようにとると,

$$(p, p) \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)\times\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} \varphi((\sigma)_0) \,\&\, \varphi((\sigma)_1) \,\&\, (\sigma)_0 \neq (\sigma)_1$$

となる. $\mathcal{A}$ が a.d. 族であることから $(p, p) \Vdash |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. よって補題の条件 $(*)$ がみたされており, p の下の $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), \sigma)$-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在する. いまは $\alpha = 0$ なので条件 $(**)$ は無内容にみたされている. このような 3 つ組 $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), p, \sigma)$ が存在することから, $A_i^0 = x(\sigma, p_i^0)$ は定義される.

Törnquist の証明 (9/13)

Claim 1: $\alpha^* > 0$ である.

$M[G]$ において $\mathcal{A}$ において不可算なので $\mathcal{A} \not\subseteq ([\omega]^\omega)^V$ である. そこで, $\kappa < \lambda$ と $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-名前 σ と V 上 $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ が存在して, $\sigma[g] \in \mathcal{A}$ かつ $\sigma[g] \notin M$ となる. $p \in g$ を,

$$p \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} (\varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M)$$

となるようにとると,

$$(p, p) \Vdash_{\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)\times\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)} \varphi((\sigma)_0) \,\&\, \varphi((\sigma)_1) \,\&\, (\sigma)_0 \neq (\sigma)_1$$

となる. $\mathcal{A}$ が a.d. 族であることから $(p, p) \Vdash |(\sigma)_0 \cap (\sigma)_1| < \infty$ である. よって補題の条件 $(*)$ がみたされており, p の下の $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), \sigma)$-対角列 $(p_i^j, n_i)_{i\in\omega}^{j\in\{0,1\}}$ が存在する. いまは $\alpha = 0$ なので条件 $(**)$ は無内容にみたされている. このような 3 つ組 $(\mathrm{Coll}(\omega, \kappa), p, \sigma)$ が存在することから, $A_i^0 = x(\sigma, p_i^0)$ は定義される.

Törnquist の証明 (10/13)

Claim 2: $\alpha^* < \lambda$ である.

A_i^α $(i \in \omega, \alpha < \alpha^*)$ はすべて異なる. なぜならステージ α における σ_ξ はどの A_i^β $(i \in \omega, \beta < \alpha)$ にも含まれないことが r_ξ によって強制されているから. よって $(\alpha, i) \mapsto A_i^\alpha$ は M における 1 対 1 対応 $\alpha^* \times \omega \to ([\omega]^\omega)^M$ であり, M において $|([\omega]^\omega)^M| < \lambda$ であるから $\alpha^* < \lambda$ である.

Törnquist の証明 (10/13)

Claim 2: $\alpha^* < \lambda$ である.

A_i^α $(i \in \omega, \alpha < \alpha^*)$ はすべて異なる. なぜならステージ α における σ_ξ はどの A_i^β $(i \in \omega, \beta < \alpha)$ にも含まれないことが r_ξ によって強制されているから. よって $(\alpha, i) \mapsto A_i^\alpha$ は M における 1 対 1 対応 $\alpha^* \times \omega \to ([\omega]^\omega)^M$ であり, M において $|([\omega]^\omega)^M| < \lambda$ であるから $\alpha^* < \lambda$ である.

Törnquist の証明 (10/13)

Claim 2: $\alpha^* < \lambda$ である.

A_i^α $(i \in \omega, \alpha < \alpha^*)$ はすべて異なる. なぜならステージ α における σ_ξ はどの A_i^β $(i \in \omega, \beta < \alpha)$ にも含まれないことが r_ξ によって強制されているから. よって $(\alpha, i) \mapsto A_i^\alpha$ は M における 1 対 1 対応 $\alpha^* \times \omega \to ([\omega]^\omega)^M$ であり, M において $|([\omega]^\omega)^M| < \lambda$ であるから $\alpha^* < \lambda$ である.

Törnquist の証明 (10/13)

Claim 2: $\alpha^* < \lambda$ である.

A_i^α $(i \in \omega, \alpha < \alpha^*)$ はすべて異なる. なぜならステージ α における σ_ξ はどの A_i^β $(i \in \omega, \beta < \alpha)$ にも含まれないことが r_ξ によって強制されているから. よって $(\alpha, i) \mapsto A_i^\alpha$ は M における 1 対 1 対応 $\alpha^* \times \omega \to ([\omega]^\omega)^M$ であり, M において $|([\omega]^\omega)^M| < \lambda$ であるから $\alpha^* < \lambda$ である.

Törnquist の証明 (11/13)

$M[G]$ において $\{ A_i^\alpha : i \in \omega, \alpha < \alpha^* \} \cup (\mathcal{A} \cap M)$ は可算集合だから, これらすべてを数え上げて $(A_j)_{j\in\omega}$ としよう.

Claim 3: 任意の $x \in \mathcal{A}$ は有限個の A_j の和集合に有限個の要素を除いて含まれる.

そうでないと, $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ と $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$-名前 σ と $r \in g$ をとって $r \Vdash \varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M$ かつ

$$r \Vdash (\forall k \in \omega)(\forall \beta_0, \ldots, \beta_k < \alpha^*)(\forall i_0, \ldots, i_k \in \omega) \left| \sigma \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}^{\beta_j} \right| = \infty$$

となるようにできる. これは A_i^α の再帰的定義がステージ α^* 以上に続くことになって α^* の取り方に矛盾する.

Törnquist の証明 (11/13)

$M[G]$ において $\{ A_i^\alpha : i \in \omega, \alpha < \alpha^* \} \cup (\mathcal{A} \cap M)$ は可算集合だから, これらすべてを数え上げて $(A_j)_{j\in\omega}$ としよう.

Claim 3: 任意の $x \in \mathcal{A}$ は有限個の A_j の和集合に有限個の要素を除いて含まれる.

そうでないと, $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ と $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$-名前 σ と $r \in g$ をとって $r \Vdash \varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M$ かつ

$$r \Vdash (\forall k \in \omega)(\forall \beta_0, \ldots, \beta_k < \alpha^*)(\forall i_0, \ldots, i_k \in \omega) \left| \sigma \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}^{\beta_j} \right| = \infty$$

となるようにできる. これは A_i^α の再帰的定義がステージ α^* 以上に続くことになって α^* の取り方に矛盾する.

Törnquist の証明 (11/13)

$M[G]$ において $\{ A_i^\alpha : i \in \omega, \alpha < \alpha^* \} \cup (\mathcal{A} \cap M)$ は可算集合だから, これらすべてを数え上げて $(A_j)_{j\in\omega}$ としよう.

Claim 3: 任意の $x \in \mathcal{A}$ は有限個の A_j の和集合に有限個の要素を除いて含まれる.

そうでないと, $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ と $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$-名前 σ と $r \in g$ をとって $r \Vdash \varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M$ かつ

$$r \Vdash (\forall k \in \omega)(\forall \beta_0, \ldots, \beta_k < \alpha^*)(\forall i_0, \ldots, i_k \in \omega) \left| \sigma \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}^{\beta_j} \right| = \infty$$

となるようにできる. これは A_i^α の再帰的定義がステージ α^* 以上に続くことになって α^* の取り方に矛盾する.

Törnquist の証明 (11/13)

$M[G]$ において $\{ A_i^\alpha : i \in \omega, \alpha < \alpha^* \} \cup (\mathcal{A} \cap M)$ は可算集合だから, これらすべてを数え上げて $(A_j)_{j\in\omega}$ としよう.

Claim 3: 任意の $x \in \mathcal{A}$ は有限個の A_j の和集合に有限個の要素を除いて含まれる.

そうでないと, $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ と $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$-名前 σ と $r \in g$ をとって $r \Vdash \varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M$ かつ

$$r \Vdash (\forall k \in \omega)(\forall \beta_0, \ldots, \beta_k < \alpha^*)(\forall i_0, \ldots, i_k \in \omega) \left| \sigma \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}^{\beta_j} \right| = \infty$$

となるようにできる. これは A_i^α の再帰的定義がステージ α^* 以上に続くことになって α^* の取り方に矛盾する.

Törnquist の証明 (11/13)

$M[G]$ において $\{ A_i^\alpha : i \in \omega, \alpha < \alpha^* \} \cup (\mathcal{A} \cap M)$ は可算集合だから, これらすべてを数え上げて $(A_j)_{j\in\omega}$ としよう.

Claim 3: 任意の $x \in \mathcal{A}$ は有限個の A_j の和集合に有限個の要素を除いて含まれる.

そうでないと, $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$-ジェネリックな $g \in M[G]$ と $\mathrm{Coll}(\omega,\kappa)$-名前 σ と $r \in g$ をとって $r \Vdash \varphi(\sigma) \,\&\, \sigma \notin M$ かつ

$$r \Vdash (\forall k \in \omega)(\forall \beta_0, \ldots, \beta_k < \alpha^*)(\forall i_0, \ldots, i_k \in \omega) \left| \sigma \setminus \bigcup_{j=0}^{k} A_{i_j}^{\beta_j} \right| = \infty$$

となるようにできる. これは A_i^α の再帰的定義がステージ α^* 以上に続くことになって α^* の取り方に矛盾する.

Törnquist の証明 (12/13)

Claim 4: $(A_j)_{j\in\omega}$ のメンバーの任意の有限和の補集合は, 無限集合である.

$(A_j)_{j\in\omega}$ のうち $A^{\beta_0}_{i_0},\ldots,A^{\beta_k}_{i_k}$ の形のものが $k+1$ 個あったとして, $\alpha=\max\{\beta_0,\ldots,\beta_k\}$, $\ell=\max\{i_0,\ldots,i_k\}$ とおく. $A^\alpha_{\ell+1}=x(\sigma_\xi,p^0_{\ell+1})$ だったとして, P_ξ-ジェネリックな $g\in M[G]$ を $p^0_{\ell+1}\in g$ となるようにとれば, $p^0_{\ell+1}\leqslant r_\xi$ より $\sigma_\xi[g]\subseteq A^\alpha_{\ell+1}$ かつ $\sigma_\xi[g]\setminus\bigcup_{j\leq k,\beta_j\neq\alpha}A^{\beta_j}_{i_j}$ は無限集合であるし, $i<\ell+1$ のとき $A^\alpha_{\ell+1}\cap A^\alpha_i$ は (P_ξ,σ_ξ)-対角列の定義から有限集合であるから $A^\alpha_{\ell+1}\cap\bigcup_{i\leq\ell}A^\alpha_i$ は有限集合である. また $\sigma_\xi[g]$ は $\mathcal{A}\cap M$ のメンバーのどれともほとんど交わりがない. 以上のことから $\bigcup_{j=0}^k A^{\beta_j}_{i_j}$ と $\mathcal{A}\cap M$ の任意有限個の要素の和に含まれない $A^\alpha_{\ell+1}$ の要素が無数に存在する.

Törnquist の証明 (12/13)

Claim 4: $(A_j)_{j\in\omega}$ のメンバーの任意の有限和の補集合は, 無限集合である.

$(A_j)_{j\in\omega}$ のうち $A_{i_0}^{\beta_0},\ldots,A_{i_k}^{\beta_k}$ の形のものが $k+1$ 個あったとして, $\alpha=\max\{\beta_0,\ldots,\beta_k\}$, $\ell=\max\{i_0,\ldots,i_k\}$ とおく. $A_{\ell+1}^{\alpha}=x(\sigma_\xi,p_{\ell+1}^0)$ だったとして, P_ξ-ジェネリックな $g\in M[G]$ を $p_{\ell+1}^0\in g$ となるようにとれば, $p_{\ell+1}^0\leqslant r_\xi$ より $\sigma_\xi[g]\subseteq A_{\ell+1}^{\alpha}$ かつ $\sigma_\xi[g]\setminus\bigcup_{j\leq k,\beta_j\neq\alpha}A_{i_j}^{\beta_j}$ は無限集合であるし, $i<\ell+1$ のとき $A_{\ell+1}^{\alpha}\cap A_i^{\alpha}$ は (P_ξ,σ_ξ)-対角列の定義から有限集合であるから $A_{\ell+1}^{\alpha}\cap\bigcup_{i\leq\ell}A_i^{\alpha}$ は有限集合である. また $\sigma_\xi[g]$ は $\mathcal{A}\cap M$ のメンバーのどれともほとんど交わりがない. 以上のことから $\bigcup_{j=0}^{k}A_{i_j}^{\beta_j}$ と $\mathcal{A}\cap M$ の任意有限個の要素の和に含まれない $A_{\ell+1}^{\alpha}$ の要素が無数に存在する.

Törnquist の証明 (12/13)

Claim 4: $(A_j)_{j\in\omega}$ のメンバーの任意の有限和の補集合は, 無限集合である.

$(A_j)_{j\in\omega}$ のうち $A^{\beta_0}_{i_0},\ldots,A^{\beta_k}_{i_k}$ の形のものが $k+1$ 個あったとして, $\alpha=\max\{\beta_0,\ldots,\beta_k\}$, $\ell=\max\{i_0,\ldots,i_k\}$ とおく. $A^{\alpha}_{\ell+1}=x(\sigma_\xi,p^0_{\ell+1})$ だったとして, P_ξ-ジェネリックな $g\in M[G]$ を $p^0_{\ell+1}\in g$ となるようにとれば, $p^0_{\ell+1}\leqslant r_\xi$ より $\sigma_\xi[g]\subseteq A^{\alpha}_{\ell+1}$ かつ $\sigma_\xi[g]\setminus\bigcup_{j\leq k,\beta_j\neq\alpha}A^{\beta_j}_{i_j}$ は無限集合であるし, $i<\ell+1$ のとき $A^{\alpha}_{\ell+1}\cap A^{\alpha}_{i}$ は (P_ξ,σ_ξ)-対角列の定義から有限集合であるから $A^{\alpha}_{\ell+1}\cap\bigcup_{i\leq\ell}A^{\alpha}_{i}$ は有限集合である. また $\sigma_\xi[g]$ は $\mathcal{A}\cap M$ のメンバーのどれともほとんど交わりがない. 以上のことから $\bigcup_{j=0}^{k}A^{\beta_j}_{i_j}$ と $\mathcal{A}\cap M$ の任意有限個の要素の和に含まれない $A^{\alpha}_{\ell+1}$ の要素が無数に存在する.

Törnquist の証明 (12/13)

Claim 4: $(A_j)_{j\in\omega}$ のメンバーの任意の有限和の補集合は, 無限集合である.

$(A_j)_{j\in\omega}$ のうち $A^{\beta_0}_{i_0},\ldots,A^{\beta_k}_{i_k}$ の形のものが $k+1$ 個あったとして, $\alpha=\max\{\beta_0,\ldots,\beta_k\}$, $\ell=\max\{i_0,\ldots,i_k\}$ とおく. $A^\alpha_{\ell+1}=x(\sigma_\xi,p^0_{\ell+1})$ だったとして, P_ξ-ジェネリックな $g\in M[G]$ を $p^0_{\ell+1}\in g$ となるようにとれば, $p^0_{\ell+1}\leqslant r_\xi$ より $\sigma_\xi[g]\subseteq A^\alpha_{\ell+1}$ かつ $\sigma_\xi[g]\setminus\bigcup_{j\le k,\beta_j\neq\alpha}A^{\beta_j}_{i_j}$ は無限集合であるし, $i<\ell+1$ のとき $A^\alpha_{\ell+1}\cap A^\alpha_i$ は (P_ξ,σ_ξ)-対角列の定義から有限集合であるから $A^\alpha_{\ell+1}\cap\bigcup_{i\le\ell}A^\alpha_i$ は有限集合である. また $\sigma_\xi[g]$ は $\mathcal{A}\cap M$ のメンバーのどれともほとんど交わりがない. 以上のことから $\bigcup_{j=0}^k A^{\beta_j}_{i_j}$ と $\mathcal{A}\cap M$ の任意有限個の要素の和に含まれない $A^\alpha_{\ell+1}$ の要素が無数に存在する.

Törnquist の証明 (12/13)

Claim 4: $(A_j)_{j\in\omega}$ のメンバーの任意の有限和の補集合は, 無限集合である.

$(A_j)_{j\in\omega}$ のうち $A^{\beta_0}_{i_0},\ldots,A^{\beta_k}_{i_k}$ の形のものが $k+1$ 個あったとして, $\alpha=\max\{\beta_0,\ldots,\beta_k\}$, $\ell=\max\{i_0,\ldots,i_k\}$ とおく. $A^\alpha_{\ell+1}=x(\sigma_\xi,p^0_{\ell+1})$ だったとして, P_ξ-ジェネリックな $g\in M[G]$ を $p^0_{\ell+1}\in g$ となるようにとれば, $p^0_{\ell+1}\leqslant r_\xi$ より $\sigma_\xi[g]\subseteq A^\alpha_{\ell+1}$ かつ $\sigma_\xi[g]\setminus\bigcup_{j\le k,\beta_j\neq\alpha}A^{\beta_j}_{i_j}$ は無限集合であるし, $i<\ell+1$ のとき $A^\alpha_{\ell+1}\cap A^\alpha_i$ は (P_ξ,σ_ξ)-対角列の定義から有限集合であるから $A^\alpha_{\ell+1}\cap\bigcup_{i\le\ell}A^\alpha_i$ は有限集合である. また $\sigma_\xi[g]$ は $\mathcal{A}\cap M$ のメンバーのどれともほとんど交わりがない. 以上のことから $\bigcup_{j=0}^k A^{\beta_j}_{i_j}$ と $\mathcal{A}\cap M$ の任意有限個の要素の和に含まれない $A^\alpha_{\ell+1}$ の要素が無数に存在する.

Törnquist の証明 (12/13)

Claim 4: $(A_j)_{j\in\omega}$ のメンバーの任意の有限和の補集合は, 無限集合である.

$(A_j)_{j\in\omega}$ のうち $A^{\beta_0}_{i_0},\ldots,A^{\beta_k}_{i_k}$ の形のものが $k+1$ 個あったとして, $\alpha=\max\{\beta_0,\ldots,\beta_k\}$, $\ell=\max\{i_0,\ldots,i_k\}$ とおく. $A^\alpha_{\ell+1}=x(\sigma_\xi,p^0_{\ell+1})$ だったとして, P_ξ-ジェネリックな $g\in M[G]$ を $p^0_{\ell+1}\in g$ となるようにとれば, $p^0_{\ell+1}\leqslant r_\xi$ より $\sigma_\xi[g]\subseteq A^\alpha_{\ell+1}$ かつ $\sigma_\xi[g]\setminus\bigcup_{j\le k,\beta_j\neq\alpha}A^{\beta_j}_{i_j}$ は無限集合であるし, $i<\ell+1$ のとき $A^\alpha_{\ell+1}\cap A^\alpha_i$ は (P_ξ,σ_ξ)-対角列の定義から有限集合であるから $A^\alpha_{\ell+1}\cap\bigcup_{i\le\ell}A^\alpha_i$ は有限集合である. また $\sigma_\xi[g]$ は $\mathcal{A}\cap M$ のメンバーのどれともほとんど交わりがない. 以上のことから $\bigcup_{j=0}^k A^{\beta_j}_{i_j}$ と $\mathcal{A}\cap M$ の任意有限個の要素の和に含まれない $A^\alpha_{\ell+1}$ の要素が無数に存在する.

Törnquist の証明 (12/13)

Claim 4: $(A_j)_{j\in\omega}$ のメンバーの任意の有限和の補集合は, 無限集合である.

$(A_j)_{j\in\omega}$ のうち $A_{i_0}^{\beta_0},\ldots,A_{i_k}^{\beta_k}$ の形のものが $k+1$ 個あったとして, $\alpha=\max\{\beta_0,\ldots,\beta_k\}$, $\ell=\max\{i_0,\ldots,i_k\}$ とおく. $A_{\ell+1}^{\alpha}=x(\sigma_\xi,p_{\ell+1}^0)$ だったとして, P_ξ-ジェネリックな $g\in M[G]$ を $p_{\ell+1}^0\in g$ となるようにとれば, $p_{\ell+1}^0\leqslant r_\xi$ より $\sigma_\xi[g]\subseteq A_{\ell+1}^{\alpha}$ かつ $\sigma_\xi[g]\setminus\bigcup_{j\leq k,\beta_j\neq\alpha}A_{i_j}^{\beta_j}$ は無限集合であるし, $i<\ell+1$ のとき $A_{\ell+1}^{\alpha}\cap A_i^{\alpha}$ は (P_ξ,σ_ξ)-対角列の定義から有限集合であるから $A_{\ell+1}^{\alpha}\cap\bigcup_{i\leq\ell}A_i^{\alpha}$ は有限集合である. また $\sigma_\xi[g]$ は $\mathcal{A}\cap M$ のメンバーのどれともほとんど交わりがない. 以上のことから $\bigcup_{j=0}^{k}A_{i_j}^{\beta_j}$ と $\mathcal{A}\cap M$ の任意有限個の要素の和に含まれない $A_{\ell+1}^{\alpha}$ の要素が無数に存在する.

Törnquist の証明 (13/13)

Claim4 から, $M[G]$ において, 自然数の増大列

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

を, $n_k \notin \bigcup_{j=0}^{k} A_j$ となるようにとれる. $x^* = \{ n_0, n_1, n_2, \ldots \}$ とおく. x^* は $(A_j)_{j\in\omega}$ の任意有限個のメンバーの和集合とほとんど交わりがない. このことと Claim3 から, x^* は $\mathcal{A}$ のどのメンバーともほとんど交わりがないことになり, $\mathcal{A}$ は $M[G]$ において mad 族でないことになる. このことと $([\omega]^\omega)^N = ([\omega]^\omega)^{M[G]}$ であることから, $\mathcal{A}$ は N においても mad 族でない. こうして N に mad 族が存在しないことが示された. (証明終)

Törnquist の証明 (13/13)

Claim4 から, $M[G]$ において, 自然数の増大列

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

を, $n_k \notin \bigcup_{j=0}^{k} A_j$ となるようにとれる. $x^* = \{ n_0, n_1, n_2, \ldots \}$ とおく. x^* は $(A_j)_{j\in\omega}$ の任意有限個のメンバーの和集合とほとんど交わりがない. このことと Claim3 から, x^* は $\mathcal{A}$ のどのメンバーともほとんど交わりがないことになり, $\mathcal{A}$ は $M[G]$ において mad 族でないことになる. このことと $([\omega]^\omega)^N = ([\omega]^\omega)^{M[G]}$ であることから, $\mathcal{A}$ は N においても mad 族でない. こうして N に mad 族が存在しないことが示された. (証明終)

Törnquist の証明 (13/13)

Claim4 から, $M[G]$ において, 自然数の増大列

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

を, $n_k \notin \bigcup_{j=0}^{k} A_j$ となるようにとれる. $x^* = \{ n_0, n_1, n_2, \ldots \}$ とおく. x^* は $(A_j)_{j\in\omega}$ の任意有限個のメンバーの和集合とほとんど交わりがない. このことと Claim3 から, x^* は $\mathcal{A}$ のどのメンバーともほとんど交わりがないことになり, $\mathcal{A}$ は $M[G]$ において mad 族でないことになる. このことと $([\omega]^\omega)^N = ([\omega]^\omega)^{M[G]}$ であることから, $\mathcal{A}$ は N においても mad 族でない. こうして N に mad 族が存在しないことが示された. (証明終)

Törnquist の証明 (13/13)

Claim4 から, $M[G]$ において, 自然数の増大列

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

を, $n_k \notin \bigcup_{j=0}^{k} A_j$ となるようにとれる. $x^* = \{ n_0, n_1, n_2, \ldots \}$ とおく. x^* は $(A_j)_{j\in\omega}$ の任意有限個のメンバーの和集合とほとんど交わりがない. このことと Claim3 から, x^* は $\mathcal{A}$ のどのメンバーともほとんど交わりがないことになり, $\mathcal{A}$ は $M[G]$ において mad 族でないことになる. このことと $([\omega]^\omega)^N = ([\omega]^\omega)^{M[G]}$ であることから, $\mathcal{A}$ は N においても mad 族でない. こうして N に mad 族が存在しないことが示された. (証明終)

Törnquist の証明 (13/13)

Claim4 から, $M[G]$ において, 自然数の増大列

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

を, $n_k \notin \bigcup_{j=0}^{k} A_j$ となるようにとれる. $x^* = \{ n_0, n_1, n_2, \ldots \}$ とおく. x^* は $(A_j)_{j\in\omega}$ の任意有限個のメンバーの和集合とほとんど交わりがない. このことと Claim3 から, x^* は $\mathcal{A}$ のどのメンバーともほとんど交わりがないことになり, $\mathcal{A}$ は $M[G]$ において mad 族でないことになる. このことと $([\omega]^\omega)^N = ([\omega]^\omega)^{M[G]}$ であることから, $\mathcal{A}$ は N においても mad 族でない. こうして N に mad 族が存在しないことが示された. (証明終)

Törnquist の証明 (13/13)

Claim4 から, $M[G]$ において, 自然数の増大列

$$n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$$

を, $n_k \notin \bigcup_{j=0}^{k} A_j$ となるようにとれる. $x^* = \{ n_0, n_1, n_2, \ldots \}$ とおく. x^* は $(A_j)_{j\in\omega}$ の任意有限個のメンバーの和集合とほとんど交わりがない. このことと Claim3 から, x^* は $\mathcal{A}$ のどのメンバーともほとんど交わりがないことになり, $\mathcal{A}$ は $M[G]$ において mad 族でないことになる. このことと $([\omega]^\omega)^N = ([\omega]^\omega)^{M[G]}$ であることから, $\mathcal{A}$ は N においても mad 族でない. こうして N に mad 族が存在しないことが示された. (証明終)

関連する結果 (1/7)

同じ論文 [Törnquist 2018] では次のことも証明されている:

MA(ω_1) のもとでは, Σ^1_2 な mad 族は存在しない.

$\forall r \in \mathbb{R}[\omega_1^{L[r]} < \omega_1]$ のもとでは, Σ^1_2 な mad 族は存在しない.

関連する結果 (1/7)

同じ論文 [Törnquist 2018] では次のことも証明されている:

MA(ω_1) のもとでは, $\mathbf{\Sigma}^1_2$ な mad 族は存在しない.

$\forall r \in \mathbb{R}[\omega_1^{L[r]} < \omega_1]$ のもとでは, $\mathbf{\Sigma}^1_2$ な mad 族は存在しない.

関連する結果 (1/7)

同じ論文 [Törnquist 2018] では次のことも証明されている:

MA(ω_1) のもとでは, $\mathbf{\Sigma}^1_2$ な mad 族は存在しない.

$\forall r \in \mathbb{R}[\omega_1^{L[r]} < \omega_1]$ のもとでは, $\mathbf{\Sigma}^1_2$ な mad 族は存在しない.

関連する結果 (2/7)

Mathias の問題 (2): mad 族の不存在の無矛盾性に巨大基数は必要か は Horowitz と Shelah によって 2016 年に解決している.

Horowitz と Shelah の結果その 1 [Horowitz and Shelah 2016-1]

ZFC が矛盾しない限り ZF+DC+“mad 族の不存在” も矛盾しない.

関連する結果 (3/7)

ベール空間 ${}^{\omega}\omega$ における mad 族の類似物として “med 族” が考えられる.

$f, g \in {}^{\omega}\omega$ が eventually different(e.d.) とは $f(n) = g(n)$ が有限個の $n \in \omega$ でしか成立しないことをいう. どの 2 要素も互いに e.d. であるような $\mathcal{A} \subset {}^{\omega}\omega$ を e.d. 族といい, 包含関係の意味で極大な e.d. 族を med 族という.

mad 族と med 族の定義上の類似から, たとえば Σ^1_1 な med 族は存在しないのかと予想されていたが, これも 2016 年に Horowitz と Shelah によって次のことが示された:

Horowitz と Shelah の結果その 2 [Horowitz and Shelah 2016-2]

ボレル集合であるような med 族が存在する.

関連する結果 (3/7)

ベール空間 ${}^{\omega}\omega$ における mad 族の類似物として “med 族” が考えられる.

$f, g \in {}^{\omega}\omega$ が eventually different(e.d.) とは $f(n) = g(n)$ が有限個の $n \in \omega$ でしか成立しないことをいう. どの 2 要素も互いに e.d. であるような $\mathcal{A} \subset {}^{\omega}\omega$ を e.d. 族といい, 包含関係の意味で極大な e.d. 族を med 族という.

mad 族と med 族の定義上の類似から, たとえば Σ^1_1 な med 族は存在しないのかと予想されていたが, これも 2016 年に Horowitz と Shelah によって次のことが示された:

Horowitz と Shelah の結果その 2 [Horowitz and Shelah 2016-2]

ボレル集合であるような med 族が存在する.

関連する結果 (3/7)

ベール空間 ${}^{\omega}\omega$ における mad 族の類似物として “med 族” が考えられる.

$f, g \in {}^{\omega}\omega$ が eventually different(e.d.) とは $f(n) = g(n)$ が有限個の $n \in \omega$ でしか成立しないことをいう. どの 2 要素も互いに e.d. であるような $\mathcal{A} \subset {}^{\omega}\omega$ を e.d. 族といい, 包含関係の意味で極大な e.d. 族を med 族という.

mad 族と med 族の定義上の類似から, たとえば Σ^1_1 な med 族は存在しないのかと予想されていたが, これも 2016 年に Horowitz と Shelah によって次のことが示された:

Horowitz と Shelah の結果その 2 [Horowitz and Shelah 2016-2]

ボレル集合であるような med 族が存在する.

関連する結果 (3/7)

ベール空間 ${}^{\omega}\omega$ における mad 族の類似物として “med 族” が考えられる.

$f, g \in {}^{\omega}\omega$ が eventually different(e.d.) とは $f(n) = g(n)$ が有限個の $n \in \omega$ でしか成立しないことをいう. どの 2 要素も互いに e.d. であるような $\mathcal{A} \subset {}^{\omega}\omega$ を e.d. 族といい, 包含関係の意味で極大な e.d. 族を med 族という.

mad 族と med 族の定義上の類似から, たとえば Σ^1_1 な med 族は存在しないのかと予想されていたが, これも 2016 年に Horowitz と Shelah によって次のことが示された:

Horowitz と Shelah の結果その 2 [Horowitz and Shelah 2016-2]

ボレル集合であるような med 族が存在する.

関連する結果 (3/7)

ベール空間 ${}^{\omega}\omega$ における mad 族の類似物として “med 族” が考えられる.

$f, g \in {}^{\omega}\omega$ が eventually different(e.d.) とは $f(n) = g(n)$ が有限個の $n \in \omega$ でしか成立しないことをいう. どの 2 要素も互いに e.d. であるような $\mathcal{A} \subset {}^{\omega}\omega$ を e.d. 族といい, 包含関係の意味で極大な e.d. 族を med 族という.

mad 族と med 族の定義上の類似から, たとえば Σ^1_1 な med 族は存在しないのかと予想されていたが, これも 2016 年に Horowitz と Shelah によって次のことが示された:

Horowitz と Shelah の結果その 2 [Horowitz and Shelah 2016-2]

ボレル集合であるような med 族が存在する.

関連する結果 (3/7)

ベール空間 ${}^{\omega}\omega$ における mad 族の類似物として “med 族” が考えられる.

$f, g \in {}^{\omega}\omega$ が eventually different(e.d.) とは $f(n) = g(n)$ が有限個の $n \in \omega$ でしか成立しないことをいう. どの 2 要素も互いに e.d. であるような $\mathcal{A} \subset {}^{\omega}\omega$ を e.d. 族といい, 包含関係の意味で極大な e.d. 族を med 族という.

mad 族と med 族の定義上の類似から, たとえば Σ^1_1 な med 族は存在しないのかと予想されていたが, これも 2016 年に Horowitz と Shelah によって次のことが示された:

Horowitz と Shelah の結果その 2 [Horowitz and Shelah 2016-2]

ボレル集合であるような med 族が存在する.

関連する結果 (4/7)

Ramsey Uniformization (略して R-Unif) とは次の命題だとする

$R \subseteq [\omega]^\omega \times \mathbb{R}$ を任意の関係とする. $x \in [\omega]^\omega$ が $[x]^\omega \subseteq \mathrm{dom}(R)$ をみたすとき, $y \in [x]^\omega$ と関数 $\theta\colon [y]^\omega \to \mathbb{R}$ が存在して,

$$\forall z \in [y]^\omega\ R(z, \theta(z))$$

をみたす.

R-Unif は Solovay のモデルで成立する.

関連する結果 (4/7)

Ramsey Uniformization (略して R-Unif) とは次の命題だとする

$R \subseteq [\omega]^\omega \times \mathbb{R}$ を任意の関係とする. $x \in [\omega]^\omega$ が $[x]^\omega \subseteq \mathrm{dom}(R)$ をみたすとき, $y \in [x]^\omega$ と関数 $\theta\colon [y]^\omega \to \mathbb{R}$ が存在して,

$$\forall z \in [y]^\omega\ R(z, \theta(z))$$

をみたす.

R-Unif は Solovay のモデルで成立する.

関連する結果 (4/7)

Ramsey Uniformization (略して R-Unif) とは次の命題だとする

$R \subseteq [\omega]^\omega \times \mathbb{R}$ を任意の関係とする. $x \in [\omega]^\omega$ が $[x]^\omega \subseteq \mathrm{dom}(R)$ をみたすとき, $y \in [x]^\omega$ と関数 $\theta\colon [y]^\omega \to \mathbb{R}$ が存在して,

$$\forall z \in [y]^\omega\ R(z, \theta(z))$$

をみたす.

R-Unif は Solovay のモデルで成立する.

関連する結果 (5/7)

集合 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ が Ramsey の性質を有するとは, ある $x \in [\omega]^\omega$ が存在して $[x]^\omega \subseteq \mathcal{A}$ または $[x]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$ となることをいう.

Mathias は論文 [Mathias 1977] で, Solovay モデルにおいてはすべての集合 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ が Ramsey の性質を有することを証明した.

関連する結果 (5/7)

集合 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ が Ramsey の性質を有するとは, ある $x \in [\omega]^\omega$ が存在して $[x]^\omega \subseteq \mathcal{A}$ または $[x]^\omega \cap \mathcal{A} = \emptyset$ となることをいう.

Mathias は論文 [Mathias 1977] で, Solovay モデルにおいてはすべての集合 $\mathcal{A} \subseteq [\omega]^\omega$ が Ramsey の性質を有することを証明した.

関連する結果 (6/7)

Schrittesser と Törnquist の次の結果は, 先ほどの Solovay モデルに関する Törnquist の結果を強化するものである:

Schrittesser と Törnquist の結果 [Schrittesser and Törnquist 2019]

R-Unif と “すべての集合は Ramsey の性質をもつ” から, mad 族の不存在が導かれる.

関連する結果 (6/7)

Schrittesser と Törnquist の次の結果は, 先ほどの Solovay モデルに関する Törnquist の結果を強化するものである:

Schrittesser と Törnquist の結果 [Schrittesser and Törnquist 2019]

R-Unif と “すべての集合は Ramsey の性質をもつ” から, mad 族の不存在が導かれる.

関連する結果 (7/7)

こうして mad 族についてのいろいろな問題が解かれてしまったわけだが, 次のことはまだわかっていない:

未解決問題

ZF+DC+AD から mad 族の不存在は導かれるか?

[Törnquist 2018] によれば, AD^+ からは mad 族の不存在が導かれるという. (Neeman と Norwood の 2016 年の結果)

関連する結果 (7/7)

こうして mad 族についてのいろいろな問題が解かれてしまったわけだが, 次のことはまだわかっていない:

未解決問題

ZF+DC+AD から mad 族の不存在は導かれるか?

[Törnquist 2018] によれば, AD^+ からは mad 族の不存在が導かれるという. (Neeman と Norwood の 2016 年の結果)

関連する結果 (7/7)

こうして mad 族についてのいろいろな問題が解かれてしまったわけだが, 次のことはまだわかっていない:

未解決問題

ZF+DC+AD から mad 族の不存在は導かれるか?

[Törnquist 2018] によれば, AD^+ からは mad 族の不存在が導かれるという. (Neeman と Norwood の 2016 年の結果)

参考文献

[Horowitz and Shelah 2016-1] arXiv:1605.02419v1

[Horowitz and Shelah 2016-2] arXiv:1605.07123v1

[Mathias 1977] *Happy Families*, Ann.Math.Logic **12**-1 (1977) pp.59-111.

[Miller 1989] *Infinite Combinatorics and Definability*, Ann. Pure App. Logic **41** (1989) pp.179-203.

[Schrittesser and Törnquist 2019] arXiv:1904.05824v2

[Solovay 1970] *A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable*, Ann. of Math. **92**-1 (1970), pp.1-56

[Törnquist 2018] *Definability and Almost Disjoint Families*, Adv. in Math. **330** (2018) pp.61-73.