真クラスをなす構造の充足関係の定義可能性について

藤田 博司

愛媛大学大学院理工学研究科

2025 年 8 月 25 日

前おき

今回の発表は、愛媛大学大学院を平成 26 年度に修了した 小野一樹さんの修士論文の内容をまとめなおしたものです.

1 階論理の形式言語

例として 2 項述語記号 $\in$ だけから構成される集合論の言語 LST を考える.
言語 LST には無限個の変数

$$v_0, v_1, v_2, \ldots$$

がある. 原子論理式は, 番号 i と j に関して

$$v_i \in v_j \quad \text{あるいは} \quad v_i = v_j$$

の形の記号列である.

LST の論理式は, 原子論理式そのものであるか, あるいはより単純な論理式から命題結合記号 $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ を用いて然るべく構成されたもの, あるいは, より単純な論理式 φ と変数 v_i から $\exists v_i(\varphi)$, $\forall v_i(\varphi)$ の形で構成されたもの, のいずれかである.

1 階論理の形式言語

ただし, 以下の話で「1 階論理の形式言語」と言った場合, メタ理論において集合論を記述するための形式言語 LST だけでなく, その集合論の中で定式化される形式言語, すなわち論理式のゲーデル数の集まりのことをも意味する.

1 階論理の形式言語

定式化には若干の恣意性があるが, たとえば集合論の言語の場合,

- 原子論理式 $v_i \in v_j$ のゲーデル数 $\ulcorner v_i \in v_j \urcorner$ は $\langle 0, i, j \rangle$ である.
- 原子論理式 $v_i = v_j$ のゲーデル数 $\ulcorner v_i = v_j \urcorner$ は $\langle 1, i, j \rangle$ である.
- $\ulcorner \neg\varphi \urcorner$ は $\langle 2, \ulcorner\varphi\urcorner, 0 \rangle$ である.
- $\ulcorner \varphi \wedge \psi \urcorner$ は $\langle 3, \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle$ である.
- $\ulcorner \varphi \vee \psi \urcorner$ は $\langle 4, \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle$ である.
- $\ulcorner \varphi \to \psi \urcorner$ は $\langle 5, \ulcorner\varphi\urcorner, \ulcorner\psi\urcorner \rangle$ である.
- $\ulcorner \exists v_i(\varphi) \urcorner$ は $\langle 6, i, \ulcorner\varphi\urcorner \rangle$ である.
- $\ulcorner \forall v_i(\varphi) \urcorner$ は $\langle 7, i, \ulcorner\varphi\urcorner \rangle$ である.

のようにして, LST のすべての論理式 φ に対してそのゲーデル数 $\ulcorner\varphi\urcorner$ を定義できる.

1 階論理の形式言語

このことに対応して, 集合論の中で定義される形式言語 $\mathcal{L}$ は, ゲーデル数の全体の集合として次のように定義できる:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_0 &= \{0,1\} \times \omega \times \omega, \\
\mathcal{L}_{n+1} &= \mathcal{L}_n \cup (\{2\} \times \mathcal{L}_n \times \{0\}) \\
&\quad \cup (\{3,4,5\} \times \mathcal{L}_n \times \mathcal{L}_n) \\
&\quad \cup (\{6,7\} \times \omega \times \mathcal{L}_n), \\
\mathcal{L} &= \bigcup_{n<\omega} \mathcal{L}_n \ .
\end{aligned}
$$

1 階論理の形式言語

注意: LST の論理式 φ に対しては, そのゲーデル数 $\ulcorner\varphi\urcorner$ が $\mathcal{L}$ の要素として確定するが, その逆は言えない.

「言えない」というのは, 成立しないことの証明があるという意味ではなく, そもそもステートメントが書けない.

ここでは集合論の言語を例にとったが, 他の 1 階論理の形式言語でも同様に, 集合論の中で項や論理式のゲーデル数を定義でき, 言語を再定式化できる.

1 階論理の形式言語

$\mathcal{L}$ に属する “論理式” e に対して, $\mathrm{free}(e)$ を次のように再帰的に定義する:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{free}(\langle k, i, j\rangle) &= \{i, j\} && (k \in \{0, 1\}),\\
\mathrm{free}(\langle 2, e, 0\rangle) &= \mathrm{free}(e), &&\\
\mathrm{free}(\langle k, e_1, e_2\rangle) &= \mathrm{free}(e_1) \cup \mathrm{free}(e_2) && (k \in \{3, 4, 5\}),\\
\mathrm{free}(\langle k, i, e\rangle) &= \mathrm{free}(e) \setminus \{i\} && (k \in \{6, 7\}).
\end{aligned}
$$

このとき, $\mathrm{free}(e)$ は “論理式” e の “自由変数” の集合である.

集合 $\mathcal{L}$ や関数 free() は, 遺伝的有限集合全体の集合 V_ω 上 Δ_1-定義可能, いいかえれば computable である.

形式言語に対する構造

再定式化された集合論の言語 $\mathcal{L}$ に対する構造とは, 集合 A と 二項関係 $R \subseteq A \times A$ の組 (A, R) のことである.

集合論以外の 1 階論理の形式言語においては, 述語記号のほかに関数記号や定数記号が前もって定められている. それらに対応する A 上の関数や A の要素を定めることで, その言語に対する構造を定義できる. たとえば, 群の言語においては, 群の演算に対応する A 上の二項関数を定めることで, その言語に対する構造を定義できる.

充足関係

言語 $\mathcal{L}$ に対する構造 (A, R) が与えられたとする. ω の有限部分集合から A への関数のことを一般に A への 割当て と呼ぶことにする. 割当て $a\colon \mathrm{dom}(a) \to A$ が $\mathcal{L}$ の "論理式" e に対する割当てであるとは, $\mathrm{free}(e) \subseteq \mathrm{dom}(a)$ を満たすことをいう.

構造 (A, R) と, $\mathcal{L}$ の "論理式" e と, e に対する A への割当て a が与えられたとき, 述語 $\mathrm{Sat}(A, e, a)$ を次のように再帰的に定義する:

充足関係

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Sat}(A, \langle 0, i, j\rangle, a) &\leftrightarrow \langle a(i), a(j)\rangle \in R,\\
\mathrm{Sat}(A, \langle 1, i, j\rangle, a) &\leftrightarrow a(i) = a(j),\\
\mathrm{Sat}(A, \langle 2, e, 0\rangle, a) &\leftrightarrow \neg\mathrm{Sat}(A, e, a),\\
\mathrm{Sat}(A, \langle 3, e_1, e_2\rangle, a) &\leftrightarrow \mathrm{Sat}(A, e_1, a) \wedge \mathrm{Sat}(A, e_2, a)\\
\mathrm{Sat}(A, \langle 4, e_1, e_2\rangle, a) &\leftrightarrow \mathrm{Sat}(A, e_1, a) \vee \mathrm{Sat}(A, e_2, a)\\
\mathrm{Sat}(A, \langle 5, e_1, e_2\rangle, a) &\leftrightarrow (\neg\mathrm{Sat}(A, e_1, a)) \vee \mathrm{Sat}(A, e_2, a)\\
\mathrm{Sat}(A, \langle 6, i, e\rangle, a) &\leftrightarrow (\exists x \in A)\mathrm{Sat}(A, e, a[i : x]),\\
\mathrm{Sat}(A, \langle 7, i, e\rangle, a) &\leftrightarrow (\forall x \in A)\mathrm{Sat}(A, e, a[i : x]).
\end{aligned}
$$

ここで $a[i : x]$ は, (すでに $a(i)$ が定義されていたらその値を忘れて) 新たに $a(i) = x$ と定義しなおし, その他の値は a のままにした割当てのことをいう.

充足関係

このとき, メタ理論における言語 LST のすべての論理式 φ と $\ulcorner\varphi\urcorner$ に対する A への割当て a に対して,

$$\mathrm{Sat}(A, \ulcorner\varphi\urcorner, a) \leftrightarrow (A, R) \models \varphi[a]$$

が成立するという意味で, 論理式 Sat は構造 (A, R) の充足関係を定めている. ここで, 右辺の

$$(A, R) \models \varphi[a]$$

は, LST の論理式 φ を構造 (A, R) に相対化したものを意味し, A と R と a を自由変数にもつ LST の論理式である.

論理式 Sat は A と R と e と a を自由変数にもつ LST の論理式である.

充足関係

論理式 Sat を再帰的に定義するにあたっては, 再帰のステップを記述する “関数” の存在を主張することになる.

特に $\mathcal{L}$ の “論理式” e が量化記号を含む場合, $\mathrm{Sat}(A, e, a)$ の真理値を定義するには, e のすべての (真の) 部分 “論理式” e' と $a[i : x]$ の形のすべての割り当てに対して $\mathrm{Sat}(A, e', a[i : x])$ の真理値が定まっていることが前提となる.

ということは, 再帰のステップを記述する “関数” は $a[i : x]$ の形のすべての割り当てを定義域に含む “関数” でなければならない.

そのような “関数” は, 構造 (A, R) の要素としては取れない. $\mathrm{Sat}(A, e, a)$ の再帰的定義は, (A, R) にとっての真クラスに言及しており, (A, R) 上 1 階の論理式では書けない.

充足関係

論理式 $\mathrm{Sat}(A, e, a)$ の再帰的定義は (A, R) 上 1 階の論理式では書けない. 特に A が真クラスである場合, 先ほど述べた再帰的定義は LST の論理式で書けないことになる.

このことは, 真クラスである (A, R) における充足関係が, 他のなんらかの方法で, 1 階の論理式で定義できる可能性を排除しない.

とはいえ, いわゆるタルスキの定理により, 集合論の宇宙 $(V, \in)$ における充足関係は $(V, \in)$ 上では定義できない.

ゲーデルの対角化定理

不完全性定理の証明のキーポイントとして知られる次の定理を利用する:

対角化定理

LST の任意の 1 変数論理式 $\varphi(v_0)$ に対して LST の閉論理式 σ が存在して,

$$\mathrm{ZF} \vdash \sigma \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \sigma \urcorner)$$

となる.

時間があれば, 後で証明を述べる.

タルスキの定理

さて, $(V, \in)$ の充足関係 $\mathrm{Sat}(V, e, a)$ が $(V, \in)$ 上 LST の論理式で定義可能だったと仮定する. すると $\mathcal{L}$ の "閉論理式" e に 関係 $\mathrm{Sat}(V, e, \emptyset)$ を制限したものは, LST のなんらかの 1 変数論理式 $\psi(e)$ で書けることになる. ここで論理式 $\neg\psi(e)$ に対して, 対角化定理を適用すれば, LST の閉論理式 σ が存在して,

$$\mathsf{ZF} \vdash \sigma \leftrightarrow \neg\psi(\ulcorner\sigma\urcorner)$$

となる. ところがこれは $\sigma \leftrightarrow \neg\mathrm{Sat}(V, \ulcorner\sigma\urcorner, \emptyset)$ が $(V, \in)$ において成立することを意味し, Sat が充足関係であるという仮定に矛盾する. よって

タルスキの定理

タルスキの定理

集合論の宇宙 $(V, \in)$ の充足関係は $(V, \in)$ 上 LST の論理式で定義できない.

タルスキの定理は真理の定義不可能性定理とも呼ばれ, 集合論の宇宙 $(V, \in)$ のみならず, 一般にロビンソン算術 Q を解釈できる任意の構造で成立する.

タルスキの定理

あとの議論のために, タルスキの定理のパラメータ付きバージョンが必要になる. これはゲーデルの対角化定理を次のように拡張することで得られる:

ゲーデルの対角化定理 (パラメータつき)

LST の $n+1$ 変数論理式 $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ に対して LST の n 変数論理式 $\sigma(v_1, \ldots, v_n)$ が存在して,

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall v_1 \cdots \forall v_n \big[\sigma(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \sigma \urcorner, v_1, \ldots, v_n) \big]$$

となる.

これにより, $(V, \in)$ の充足関係が $(V, \in)$ 上でパラメータを用いても定義できないことが示される.

真クラス構造の充足関係が定義できる場合

こうして $(V, \in)$ の充足関係は $(V, \in)$ 上で定義できないことがわかった.

ただし, 真クラスをなす構造の充足関係がどれもこれも定義不可能というわけではない.
簡単な例を見てみよう.

群 $(V, +, \emptyset)$ の場合

2 つの集合 x と y に対して, 対称差 $(x \setminus y) \cup (y \setminus x)$ のことを $x + y$ と書くことにしよう.
この演算のもとで構造 $(V, +, \emptyset)$ は $\emptyset$ を単位元とするアーベル群になる.

このアーベル群は真クラスであるが, その充足関係は $(V, \in)$ 上で定義できる.

一般に指数 p のアーベル群はモデル完全で, すべての部分群が初等部分群になっている.
したがって, 群論の言語の任意の "論理式" φ について

$$(V, +, \emptyset) \models \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leftrightarrow (\exists \alpha)\big[\, x_0, \ldots, x_{n-1} \in V_\alpha \wedge (V_\alpha, +, \emptyset) \models \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \,\big]$$

となり, 右辺は $(V, \in)$ 上で LST の論理式で書ける. (Kunen2011, Exercise I.15.22 参照)

このように, 真クラスをなす構造の充足関係が定義可能な場合もあるわけだ.

L の充足関係

構成可能的集合のクラス L について, 構造 $(L, \in)$ の充足関係が $(V, \in)$ で定義可能かどうか考えてみよう.

タルスキの定理により, $V = L$ だったら, $(L, \in)$ の充足関係は $(V, \in)$ において定義できない. これは当然だ. 他の場合を考えてみよう.

- V が L 上 set-generic である場合
- $0^\sharp$ が存在する場合
- V が L 上 class-generic である場合

V が L 上 set-generic だった場合

V が L 上 set-generic である場合, $(L, \in)$ の充足関係は $(V, \in)$ において定義可能でない.

半順序集合 $\mathbb{P} \in L$ におけるジェネリック $G \subseteq \mathbb{P}$ について $V = L[G]$ だったとする. このとき,

$$\begin{aligned} V \models \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \Leftrightarrow (\exists c_1, \ldots, c_n \in L^{\mathbb{P}})(\exists p \in G)\big[& \\ & x_0 = c_0[G] \wedge \ldots \wedge x_{n-1} = c_{n-1}[G] \\ & \wedge L \models [\, p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(c_0, \ldots, c_{n-1}) \,] \,\big] \end{aligned}$$

となっている. もしも $(L, \in)$ の充足関係が $(V, \in)$ において定義可能であれば, $(V, \in)$ の充足関係も $\mathbb{P}$ と G をパラメータとして $(V, \in)$ において定義できてしまうが, タルスキの定理により, これはありえない. ここで, タルスキの定理をパラメータ付きで用いている.

$0^\sharp$ が存在する場合

$0^\sharp$ が存在すると仮定しよう．このとき L の充足関係は定義可能である．

$0^\sharp$ が存在するとき，二つの不可算基数 $\kappa < \lambda$ に対して $L_\kappa \prec L_\lambda$ となっている．

$$L_{\aleph_1} \prec L_{\aleph_2} \prec \cdots \prec L_{\aleph_\omega} \prec L_{\aleph_{\omega+1}} \prec \cdots$$

と初等部分モデルの超限列になっていることから，すべての不可算基数 κ に対して $L_\kappa \prec L$ であり，

$$L \models \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \Leftrightarrow (\exists \kappa > \omega)[\, x_0, \ldots, x_{n-1} \in L_\kappa \wedge L_\kappa \models \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})\,]$$

となっている．右辺は $(V, \in)$ において定義可能である．

だとすると . . .

L の充足関係が $(V, \in)$ において定義可能であるために, $0^\sharp$ が必要だろうか?

ジェンセンの Coding Theorem の応用

$(L, \in)$ の充足関係をあらわす述語を一つの真クラス A として与えたとする.

クラス A は構造 $(L, \in)$ で定義可能ではないが, 構造 $(L, \in, A)$ は A を新しい述語記号として拡張された言語で書き直した ZFC を満たす.

この議論は ZF では書けないが, MK で定式化でき, 確認できる.

この構造 $(L, \in, A)$ にジェンセンの Coding Theorem を適用する . . .

ジェンセンの Coding Theorem の応用

Coding Theorem (Jensen)

クラス A について $(V, \in, A) \models \mathrm{ZFC} + \neg\exists 0^\sharp$ であるとき, $(V, \in, A)$ で定義可能な半順序クラス $\mathbb{P}$ が存在して, ジェネリックな $G \subseteq \mathbb{P}$ について $V[G]$ はある $r \subseteq \omega$ について $V = L[r]$ をみたし, かつ $(L[r], \in)$ において A と G が定義可能になり, また $L[r] \models \neg\exists 0^\sharp$ である.

この定理を, A が $(L, \in)$ の充足関係を表す述語である場合に適用すれば, $(L[r], \in)$ においては $(L, \in)$ の充足関係が定義可能で, しかも $0^\sharp$ が存在しない.

したがって, $(L, \in)$ の充足関係が定義可能であるために, 必ずしも $0^\sharp$ が存在する必要はない.

ジェンセンの Coding Theorem の応用

注意: V が L 上の set-generic である場合との違いは, 半順序クラス $\mathbb{P}$ が $(L, \in, A)$ で定義可能だが $(L, \in)$ では定義可能でないことにある.

実際, $(L[r], \in)$ において $(L, \in, A)$ の充足関係は定義できない.

クラス A は $(L, \in)$ に実質新しいことは
何も付け加えていないはずなので,
なんだか変な話な気はする ...
このあたり解明してくれる人募集!!

初等鎖とは

真クラスをなす構造 $\mathcal{M} = (M, R_0, \ldots, R_{m-1})$ を考えよう．この構造 $\mathcal{M}$ の充足関係が定義可能であるためのひとつの十分条件として，定義可能な初等鎖 の存在がある．

初等鎖とは，M の部分集合の超限列 $\langle M_\alpha : \alpha \in \mathrm{ON} \rangle$ であって，$M = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{ON}} M_\alpha$ であり，しかも

$$\alpha < \beta \text{ のとき } M_\alpha \prec M_\beta$$

であるようなもののことをいう．

M_α と M_β が集合であることから，$M_\alpha \prec M_\beta$ という関係は集合論の言語で問題なく記述できる．

初等鎖から充足関係へ

$\mathcal{M}$ の初等鎖 $\langle M_\alpha : \alpha \in \mathrm{ON} \rangle$ が<u>定義できる</u>ならば, $\mathcal{M}$ の充足関係も定義できる.

$$\mathcal{M} \models \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1}) \Leftrightarrow (\exists \alpha)\big[x_0, \ldots, x_{n-1} \in M_\alpha \wedge M_\alpha \models \varphi(x_0, \ldots, x_{n-1})\big]$$

とすればよい.

$0^\sharp$ が存在するときの $(L, \in)$ の充足関係の定義と同様である.

充足関係から初等鎖へ

逆はどうだろうか?

$\mathcal{M}$ の充足関係が定義できるならば,
$\mathcal{M}$ の初等鎖も定義できるだろうか?

充足関係から初等鎖へ

ここでは次の部分的な解答を与える.

定理

真クラスをなす構造 $\mathcal{M}$ の充足関係が定義でき, かつ, $\mathcal{M}$ の領域 M の整列順序づけ $<_M$ が定義できるならば, $\mathcal{M}$ の初等鎖も定義できる.

(証明の概略) まず, $\mathcal{M}$ の充足関係と整列順序づけ $<_M$ を用いて, $\mathcal{M}$ に対する大域的なスコーレム関数を定義する. 次に, M の $<_M$ 最小要素 a に対して $\{a\}$ のスコーレム閉包を M_0 とする. M_α が定義されたら, M_α に属しない $<_M$ 最小の要素 a_α に対して $M_\alpha \cup \{a_\alpha\}$ のスコーレム閉包を $M_{\alpha+1}$ とし, α が極限順序数のときは $M_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$ とする.

要するに, レーヴェンハイム=スコーレム=タルスキの定理の構成を超限再帰的に反復するだけである.

充足関係から初等鎖へ

小野さんの修士論文はここで終わる.

そこで次の問題が残る.

問題

領域 M の定義可能な整列順序づけの条件は落とせるだろうか?

これにはまだ答えがないが, 一応のアイデアはある. $\mathcal{M}$ の充足関係の定義論理式と $\mathcal{M}$ 自身の定義論理式を含む必要最小限の論理式の有限集合を, V_δ が反映するように, 順序数 δ の CLUB クラス C を定めれば, $\langle \mathcal{M} \restriction V_\delta : \delta \in C \rangle$ が求める初等鎖になっていないだろうか.

このことの検証はまだできていない. というか, やっていない.

ON の充足関係

もうひとつ未解決で残った問題 (解決済みかもしれないけど)

問題

順序数の順序構造 $(\mathrm{ON}, <)$ の充足関係は $(V, \in)$ で定義できるだろうか?

知ってたら教えてください! ← 後藤達哉さんによると, 定義できるらしい.

構造 $(L, \in)$ の充足関係が定義できれば, もちろん $(\mathrm{ON}, <)$ の充足関係も定義できる.
逆は成り立ちそうに思えないが, どうだろうか. 上にコメントしたことにより成り立たない.

順序数上の算術などを導入して構造を拡張した場合どうなるかも知りたい.

おまけ

パラメータつき対角化定理の証明

パラメータつき対角化定理

ゲーデルの対角化定理 (パラメータつき)

LST の $n+1$ 変数論理式 $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ に対して LST の n 変数論理式 $\sigma(v_1, \ldots, v_n)$ が存在して,

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall v_1 \cdots \forall v_n \big[\sigma(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner \sigma \urcorner, v_1, \ldots, v_n) \big]$$

となる.

パラメータつき対角化定理の証明

メタ理論上の論理式の書き換え操作 $\psi(v_0, v_1, \ldots, v_n) \mapsto \psi(\ulcorner\psi\urcorner, v_1, \ldots, v_n)$ を ZF 集合論で再定式化することにより, LST の論理式 $\gamma(v_0, w)$ を

$$\mathrm{ZF} \vdash \forall v_0 \exists! w\, \gamma(v_0, w)$$

かつ, $v_0, v_1 \ldots, v_n$ を自由変数とする LST の任意の論理式 $\psi(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ に対して

$$\mathrm{ZF} \vdash \gamma(\ulcorner\psi(v_0, v_1, \ldots, v_n)\urcorner, \ulcorner\psi(\ulcorner\psi\urcorner, v_1, \ldots, v_n)\urcorner)$$

となるようにとれる. このとき,

$$(\forall w)[\gamma(v_0, w) \to \varphi(w, v_1, \ldots, v_n)] \quad \text{と} \quad (\exists w)[\gamma(v_0, w) \wedge \varphi(w, v_1, \ldots, v_n)]$$

は ZF 上で同値である. 後者を $\Delta(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ と書くことにしよう.

パラメータつき対角化定理の証明

$$\Delta(v_0, v_1, \ldots, v_n) \equiv (\exists w)[\gamma(v_0, w) \wedge \varphi(w, v_1, \ldots, v_n)]$$

さらに, $\Delta(\ulcorner\Delta\urcorner, v_1, \ldots, v_n)$ を $\sigma(v_1, \ldots, v_n)$ と書くことにする. このとき

$$\mathrm{ZF} \vdash \gamma(\ulcorner\Delta\urcorner, \ulcorner\sigma\urcorner)$$

である. また Δ と σ の定義から

$$\begin{aligned}\mathrm{ZF} \vdash \sigma(v_1, \ldots, v_n) &\leftrightarrow (\exists w)\big[\,\gamma(\ulcorner\Delta\urcorner, w) \wedge \varphi(w, v_1, \ldots, v_n)\,\big] \\ &\leftrightarrow (\forall w)\big[\,\gamma(\ulcorner\Delta\urcorner, w) \rightarrow \varphi(w, v_1, \ldots, v_n)\,\big]\end{aligned}$$

となっている. これらの式から

$$\mathrm{ZF} \vdash \sigma(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \varphi(\ulcorner\sigma\urcorner, v_1, \ldots, v_n)$$

を得る. (証明終)