Hyperdegree の minimal cover について

藤田 博司

愛媛大学大学院理工学研究科

2022 年 10 月 20 日

Turing degrees

自然数の集合 $x, y \subset \omega$ について, x が y に相対的に recursive であるとは y をオラクルとする計算プログラムによって x の characteristic function が計算可能であること.

これを $x \leqslant_{\mathrm{T}} y$ と書く. $\leqslant_{\mathrm{T}}$ は $\mathcal{P}(\omega)$ 上の二項関係として反射的かつ推移的なので,

$$x \leqslant_{\mathrm{T}} y \text{ かつ } y \leqslant_{\mathrm{T}} x \text{ のとき } x \equiv_{\mathrm{T}} y$$

とすれば, これは同値関係.

$x \subset \omega$ の $\equiv_{\mathrm{T}}$ に関する同値類を $\deg_{\mathrm{T}}(x)$ と書いて, x の Turing degree という.

Turing degree の全体すなわち商集合 $\mathcal{P}(\omega)/\equiv_{\mathrm{T}}$ を $\mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ と書く. $\mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ には $\leqslant_{\mathrm{T}}$ の誘導する半順序がつく.

Turing jump

Turing degree の理論で重要な役割をはたす jump operator を定義する.

$y \subset \omega$ をオラクルとする計算プログラム e に e 自身を入力として与えたとき計算が停止すれば $e \in K^y$, 計算が停止しなければ $e \notin K^y$ とする:

$$K^y = \{\, e \in \omega \mid \varphi_e^y(e) \downarrow \}$$

この K^y (y に相対化された停止問題の解集合) を y の Turing jump という. K^y は 1 階算術における $\Sigma_1^0(y)$-complete な集合である.

$$x \equiv_{\mathrm{T}} y \Rightarrow K^x \equiv_{\mathrm{T}} K^y$$

という意味で Turing jump は degree invariant であり, $\mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ 上の演算 $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}'$ を定めている.

hyperarithmetical sets

順序数 α が recursive であるとは, α が有限であるか, または, ある recursive function $f\colon \omega \times \omega \to \omega$ が存在して, 二項関係 $f(m,n) = 0$ が ω の順序型 α の整列順序づけになっていること.

recursive な順序数は可算個しか存在しない.

ω_1^{CK}: recursive でない最小の順序数. (Church-Kleene omega one)

hyperarithmetical sets

ω_1^{CK} は他にもいろいろな特徴づけをもつ.

重要なのは, ω_1^{CK} が

$$L_\alpha \models \Delta_0\text{-Collection Scheme}$$

をみたす最小の順序数 $\alpha > \omega$ であること. いいかえれば,

$$L_\alpha \models \mathrm{KP} + \mathrm{Infinity}$$

をみたす最小の順序数 α であること. (最小の admissible ordinal $> \omega$)

hyperarithmetical sets

$x \subset \omega$ に対して次の (1)–(4) は同値:

(1) ある $\alpha < \omega_1^{\mathrm{CK}}$ について $x \leqslant_{\mathrm{T}} \emptyset^{(\alpha)}$. ($\leftarrow$ Turing jump の iteration)

(2) higher type recursion の意味で x は recursive in ${}^2E$.

(3) $x \in L_{\omega_1^{\mathrm{CK}}}$.

(4) x は 2 階算術の標準的構造で (パラメタなしに) Δ^1_1 定義可能.

ただし ${}^2E$ とは

$$ {}^2E(f) = \begin{cases} 1, & (\exists n)\, f(n) > 0, \\ 0, & (\forall n)\, f(n) = 0 \end{cases} $$

で定義される高階関数 ${}^2E \colon {}^\omega\omega \to \omega$ で, Kleene の type-2 object と呼ばれる.

これらをみたす $x \subset \omega$ は hyperarithmetical (超算術的) であるという.

相対化

$y \subset \omega$ として, y に相対的に recursive でない最小の順序数を ω_1^y と表記する. これも可算順序数であり,

$$L_\alpha(y) \models \mathrm{KP} + \mathrm{Infinity}$$

となる最小の順序数である.

相対化

$x, y \subset \omega$ に対して次の (1)–(4) は同値:

(1) ある $\alpha < \omega_1^y$ について $x \leqslant_{\mathrm{T}} y^{(\alpha)}$. ($\leftarrow$ Turing jump の iteration)

(2) higher type recursion の意味で x は recursive in $y, {}^2E$.

(3) $x \in L_{\omega_1^y}(y)$.

(4) x は 2 階算術の標準的構造で y をパラメタとして Δ^1_1 定義可能. ($x \in \Delta^1_1(y)$)

このとき x は hyperarithmetical in y であるといい,

$$x \leqslant_{\mathrm{h}} y$$

と書く.

hyperdegrees

二項関係 $\leqslant_{\mathrm{h}}$ は ($\leqslant_{\mathrm{T}}$ 同様) 反射的で推移的である:

$$x \leqslant_{\mathrm{h}} x,$$
$$x \leqslant_{\mathrm{h}} y \leqslant_{\mathrm{h}} z \to x \leqslant_{\mathrm{h}} z.$$

そこで $x \leqslant_{\mathrm{h}} y$ かつ $y \leqslant_{\mathrm{h}} x$ のことを

$$x \equiv_{\mathrm{h}} y$$

と定めれば, これは $\mathcal{P}(\omega)$ 上の同値関係になる. 商集合 $\mathcal{P}(\omega)/\equiv_{\mathrm{h}}$ を $\mathcal{D}_{\mathrm{h}}$ と書く. $x \subset \omega$ の $\equiv_{\mathrm{h}}$-同値類を $\deg_{\mathrm{h}}(x)$ と書き, x の hyperdegree という.

$\leqslant_{\mathrm{h}}$ は $\mathcal{D}_{\mathrm{h}}$ 上の半順序づけ $\leqslant$ を定める.

hyperjump

hyperdegree の理論においても jump operator が考えられる．以下の定義は正統的な定義と異なるが hyperdegree の意味で同値である．

$y \subset \omega$ に相対化された recursive な部分関数 φ_e^y が整列順序づけのコードになっていれば $e \in \mathcal{O}^y$ とし，整列順序づけのコードになっていなければ $e \notin \mathcal{O}^y$ とする．

この $\mathcal{O}^y$ を y の hyperjump という．$\mathcal{O}^y$ は 2 階算術において ω 上 $\Pi^1_1(y)$-complete な集合である．

$$x \equiv_{\mathrm{h}} y \Rightarrow \mathcal{O}^x \equiv_{\mathrm{h}} \mathcal{O}^y$$

という意味で hyperjump は hyperdegree invariant であり，$\mathcal{D}_{\mathrm{h}}$ 上の演算 $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}'$ を定めている．

Turing degrees と hyperdegrees

半順序集合 $(\mathcal{D}_{\mathsf{T}}, \leqslant)$ と $(\mathcal{D}_{\mathsf{h}}, \leqslant)$ の類似点:

- どちらも上半束である: $x \oplus y = \{2n \mid n \in x\} \cup \{2n{+}1 \mid n \in y\}$.
- どちらもジャンプ演算をもつ:
  - Turing jump $x \mapsto K^x$ (=相対化された停止問題の解集合, complete $\Sigma^0_1(x)$-set)
  - hyperjump $x \mapsto \mathcal{O}^x$ (=相対化された再帰的順序数のコードの集合, complete $\Pi^1_1(x)$-set)
- どちらも束ではない.
- どちらも 2 階算術の標準的構造 $(\omega, \mathcal{P}(\omega))$ を解釈できる.

hyperdegrees

構造 $(\mathcal{D}_{\mathrm{T}}, \leqslant, \ ')$ と $(\mathcal{D}_{\mathrm{h}}, \leqslant, \ ')$ の相違点の例:

Turing degree の列 $\langle \mathbf{a}_n \mid n \in \omega \rangle$ で

$$\mathbf{a}'_{n+1} \leqslant \mathbf{a}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

となるものが存在する. (recursive pseudo wellordering に沿って hyperarithmetical hierarchy の模造品を作ることで得られる)

hyperdegree と hyperjump について同様の条件をみたす列は存在しない.

hyperdegrees

hyperdegree の列 $\langle \mathbf{a}_n \mid n \in \omega \rangle$ で

$$\mathbf{a}'_{n+1} \leqslant \mathbf{a}_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

となるものは存在しない.

- $x \leqslant_{\mathrm{h}} y$ のとき $\omega_1^x \leq \omega_1^y$ である.
- $\omega_1^x < \omega_1^{\mathcal{O}^x}$ である.

このことから, すべての n で $\mathcal{O}^{x_{n+1}} \leqslant_{\mathrm{h}} x_n$ ならば,

$$\cdots < \omega_1^{x_{n+1}} < \omega_1^{x_n} < \cdots < \omega_1^{x_1} < \omega_1^{x_0}$$

と順序数の無限降下列が生じてしまう!!

minimal cover について

半順序集合 $(P, \leqslant)$ において, $x < y$ であり, かつ, $x < z < y$ をみたす z が存在しないとき (y が x の上で極小であるとき), y を x の minimal cover であるという.

最小要素 $\mathbf{0}$ (空集合の degree) の minimal cover の存在は, $\mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ については [Spector 1956], $\mathcal{D}_{\mathrm{h}}$ については [Gandy and Sacks 1967] で示された.

これらの証明は適切に相対化できて, $\mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ でも $\mathcal{D}_{\mathrm{h}}$ でも, 任意の degree が minimal cover をもつことが示される.

minimal cover について

すなわち,

$$\forall x \exists y [\deg_{\mathrm{T}}(y) \text{ は } \deg_{\mathrm{T}}(x) \text{ の minimal cover}]$$

および

$$\forall x \exists y [\deg_{\mathrm{h}}(y) \text{ は } \deg_{\mathrm{h}}(x) \text{ の minimal cover}]$$

となる.

minimal cover について

自分より小さいある degree の minimal cover であるような degree 全体のクラスを

$$\mathcal{M}_{\mathsf{T}} = \{\, \mathbf{a} \in \mathcal{D}_{\mathsf{T}} \mid \mathbf{a} \text{ はある } \mathbf{b} \text{ の minimal cover} \,\}$$
$$\mathcal{M}_{\mathsf{h}} = \{\, \mathbf{a} \in \mathcal{D}_{\mathsf{h}} \mid \mathbf{a} \text{ はある } \mathbf{b} \text{ の minimal cover} \,\}$$

としよう．すると，

$$\forall \mathbf{b} \in \mathcal{D}_{\mathsf{T}} \exists \mathbf{a} \in \mathcal{D}_{\mathsf{T}} [\mathbf{b} \leqslant \mathbf{a} \in \mathcal{M}_{\mathsf{T}}]$$
$$\forall \mathbf{b} \in \mathcal{D}_{\mathsf{h}} \exists \mathbf{a} \in \mathcal{D}_{\mathsf{h}} [\mathbf{b} \leqslant \mathbf{a} \in \mathcal{M}_{\mathsf{h}}]$$

となっている．

degree の upper cone について

$\mathbf{a} \in \mathcal{D}_{\mathsf{T}}$ に対して

$$\mathcal{D}_{\mathsf{T}}(\geqslant \mathbf{a}) = \{\, \mathbf{d} \in \mathcal{D}_{\mathsf{T}} \mid \mathbf{a} \leqslant \mathbf{d} \,\}$$

と定義する．これを Turing degree の upper cone と呼ぶ．このとき $\mathbf{a}$ をこの upper cone の base という．

hyperdegree の upper cone $\mathcal{D}_{\mathsf{h}}(\geqslant \mathbf{a})$ も同様に定義する．

degree の upper cone について

$\mathcal{M}_{\mathrm{T}}$ は, Turing degree のすべての upper cone と交わる. ($\mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ において cofinal である)

$\mathcal{M}_{\mathrm{h}}$ は, hyperdegree のすべての upper cone と交わる. ($\mathcal{D}_{\mathrm{h}}$ において cofinal である)

degree に関する determinacy

Turing degree の集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_{\mathrm{T}}$ に対して, 次のような無限ゲーム $G(\mathcal{A})$ を考える.

先手と後手が交互に $x_i, y_i \in \{0, 1\}$ を言いあう:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{先手:} & x_0 & & & x_1 & & & \cdots \\ & & \searrow & \nearrow & & \searrow & \nearrow & \\ \text{後手:} & & & y_0 & & & y_1 & \cdots \end{array}$$

すると ${}^{\omega}2$ の要素 $x = (x_0, x_1, \ldots)$ と $y = (y_0, y_1, \ldots)$ ができる. 勝敗は

$$\text{先手の勝ち} \Leftrightarrow \deg_{\mathrm{T}}(y) \leqslant \deg_{\mathrm{T}}(x) \in \mathcal{A}$$

と定める.

degree に関する determinacy

ゲーム $G(\mathcal{A})$ に先手の必勝法 σ が存在したとする．σ を ${}^{\omega}2$ の要素と同一視して考える．後手が $\sigma \leqslant_{\mathsf{T}} y$ をみたす $y \in {}^{\omega}2$ を作り，先手が σ を用いて応戦して $x = \sigma * [y]$ を作ったとすると，$x \leqslant_{\mathsf{T}} \sigma \oplus y \equiv_{\mathsf{T}} y$ である．σ は先手の必勝法なので，$y \leqslant_{\mathsf{T}} x$ かつ $\deg_{\mathsf{T}}(x) \in \mathcal{A}$ となる．したがって $\deg_{\mathsf{T}}(y) = \deg_{\mathsf{T}}(x) \in \mathcal{A}$ である．よって，このとき

$$\mathcal{D}_{\mathsf{T}}(\geqslant \deg_{\mathsf{T}}(\sigma)) \subset \mathcal{A}$$

となっている．同様に考えると，後手の必勝法 τ が存在すれば

$$\mathcal{D}_{\mathsf{T}}(\geqslant \deg_{\mathsf{T}}(\tau)) \cap \mathcal{A} = \emptyset$$

となる．

minimal cover からなる upper cone

Turing degree の minimal cover の集合 $\mathcal{M}_{\mathsf{T}}$ を ${}^{\omega}2$ の部分集合と同一視すると, Σ^0_4 集合.
$G(\mathcal{M}_{\mathsf{T}})$ は Σ^0_4 ゲーム.

Σ^0_4 ゲームは determined (先手または後手の必勝法が存在). [Paris 1972]
より強く, すべての Borel ゲームは determined. [Martin 1975]

$\mathcal{M}_{\mathsf{T}}$ はすべての upper cone と交わるので, 後手には必勝法がない.

先手の必勝法 σ について $\mathbf{s} := \deg_{\mathsf{T}}(\sigma)$ とすれば,

$$\mathcal{D}_{\mathsf{T}}(\geqslant \mathbf{s}) \subset \mathcal{M}_{\mathsf{T}}$$

すなわち, Turing degree の minimal cover のクラスは upper cone を含む. [Jocksch 1973]

minimal cover からなる upper cone

Σ^0_4-determinacy は 2 階算術の命題として書け, ZFC で証明できるが, 2 階算術で証明できない.

Jockusch の定理は 2 階算術で証明できるか？

minimal cover からなる upper cone

[Harrington and Kechris 1975] は, 2 階算術で determinacy が証明できる Σ^0_3 ゲームに問題を帰着させ,

$$\mathcal{D}_{\mathsf{T}}(\geqslant \mathcal{O}) \subset \mathcal{M}_{\mathsf{T}}$$

を示した.

$\mathcal{O}$ より低い degree の base はとれる？

minimal cover からなる upper cone

[Jocksch and Shore 1985] は, (ゲームとは違う)pseudo-jump operator の理論を発展させて,

$$\mathcal{D}_{\mathsf{T}}(\geqslant \emptyset^{(\omega)}) \subset \mathcal{M}_{\mathsf{T}}$$

を示した.

どの $n \in \omega$ に対する $\emptyset^{(n)}$ も $\mathcal{M}_{\mathsf{T}}$ に含まれない [Jocksch and Soare 1970] という意味で, この結果は ほぼ 最良といえる.

hyperdegree の場合

類似の結果を hyperdegree の場合に求めるとどうなるか.

hyperdegree の minimal cover の集合 $\mathcal{M}_{\mathrm{h}}$ を ${}^{\omega}2$ の部分集合と同一視すると, Δ^1_2 集合.
$G(\mathcal{M}_{\mathrm{h}})$ は Δ^1_2 ゲーム.

したがって, Δ^1_2-determinacy が成立すれば, $\mathcal{M}_{\mathrm{h}}$ は upper cone を含む.

Δ^1_2-determinacy は ZFC で証明できないが, 巨大基数公理から導かれる.

hyperdegree の場合

[Simpson 1975] は Δ^1_2-determinacy の仮定を Σ^1_1-determinacy にまで弱めた.

その議論をよく読むと, 実は

$$\mathcal{D}_{\mathrm{h}}(\geqslant 0^\sharp) \subset \mathcal{M}_{\mathrm{h}}$$

であることがわかる.

- $0^\sharp$ より低い hyperdegree の base はとれる？
- なんらかの巨大基数公理は必須？

$V = L$ の場合

[Simpson 1975] は $V = L$ のとき $\mathcal{M}_{\mathrm{h}}$ は upper cone を含まないことを示した.

$$Q = \{\, y \subset \omega \mid y \in L_{\omega_1^y} \,\}$$

とおき, Q の要素を quickly constructible real と呼ぶ. Q は完全集合を含まない最大の (lightface) Π^1_1 集合として知られている.

$V = L$ の場合

$x <_{\mathrm{h}} y \in Q$ とすると, $\omega_1^x \leq \omega_1^y$ かつ $L_{\omega_1^y}(y) = L_{\omega_1^y} \not\subset L_{\omega_1^x}(x)$ なので $\omega_1^x < \omega_1^y$ である. このとき $\mathcal{O}^x \leqslant_{\mathrm{h}} y$ であり, x と $\mathcal{O}^x$ の間に多数の hyperdegree があることから, $\deg_{\mathrm{h}}(y)$ は $\deg_{\mathrm{h}}(x)$ の minimal cover ではない. よって, quickly constructible real の hyperdegree は minimal cover にならない.

$V = L$ のとき, どの $x \subset \omega$ もある $y \in Q$ に Turing reducible である. よってどの hyperdegree の上にも Q のメンバーの hyperdegree が存在する.

こうして, $V = L$ のとき, hyperdegree の minimal cover の集合 $\mathcal{M}_{\mathrm{h}}$ は upper cone を含まない.

L 上 set-generic の場合

[Simpson 1975] はさらに, V が L の set generic extension の場合にこの結果を拡張した.

$$S = \{\, y \subset \omega \mid (\forall x)[\, x <_{\mathrm{h}} y \Rightarrow \omega_1^x < \omega_1^y \,]\,\}$$

としよう. この S は Δ^1_2 集合である. $Q \subset S$ であり, Q の場合と同様, S のメンバーの hyperdegree は minimal cover にならない.

$x \subset \omega$ が L 上 set-generic であるとき, $x \leqslant_{\mathrm{h}} y \in S$ となる y が存在する. これを証明しよう.

まず, 結論となる命題 $(\exists y)[\, x \leqslant_{\mathrm{h}} y \in S\,]$ が x に関する Σ^1_2-predicate であることに注目.

L 上 set-generic の場合

Sacks の定理:

ω より大きな可算 admissible ordinal はすべて, ある $z \in S$ について ω_1^z の形に書ける.

この定理 [Sacks, 1976] が証明の鍵になる.

L 上 set-generic の場合

半順序 $\mathbb{P} \in L$ とし, L 上 generic な $G \subset \mathbb{P}$ について $x \in \mathcal{P}(\omega) \cap L(G)$ だったとする. $L(G)$ において結論を否定して $x \leqslant_{\mathrm{h}} y \in S$ となる y が存在しなかったと仮定する. $x = \dot{x}(G)$ となる $\mathbb{P}$-name $\dot{x} \in L$ と, $\neg(\exists y)[\dot{x} \leqslant_{\mathrm{h}} y \in S]$ を強制する $p \in \mathbb{P}$ をとる.

基数 κ を $\mathcal{P}(\mathbb{P})^L \in L_\kappa$ となるようにとり, V の $\mathrm{Coll}(\omega, \kappa)$-generic 拡大 V^* を考える. V^* においては κ は可算なので, Sacks の定理により $z \in S$ かつ $\kappa < \omega_1^z$ となるように z をとれる. このとき, $\mathbb{P}$ の L 上 generic な部分集合 G^* を $p \in G^*$ かつ $G^* \in L_{\omega_1^z}(z)$ となるようにとれる. すると, $\dot{x}(G^*) \leqslant_{\mathrm{h}} z \in S$ であり, V^* においては $(\exists y)[\dot{x}(G^*) \leqslant_{\mathrm{h}} y \in S]$ が成立している. この式は Σ^1_2 なので (Shoenfield Absoluteness Lemma により) $L(G^*)$ でも成立しているはずである. このことは, $p \in G^*$ と $p \Vdash \neg(\exists y)[\dot{x} \leqslant_{\mathrm{h}} y \in S]$ に矛盾する.

この矛盾により $L(G)$ において $(\exists y)[x \leqslant_{\mathrm{h}} y \in S]$ である. ふたたび Shoenfield Absoluteness Lemma により V においても $(\exists y)[x \leqslant_{\mathrm{h}} y \in S]$ が成立する. (証明終)

hyperdegree の minimal cover

こうして次のことがわかった:

- $0^\sharp$ が存在 $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{\mathrm{h}}$ は upper cone を含む.
- V が L 上 set-generic $\Rightarrow$ $\mathcal{M}_{\mathrm{h}}$ は upper cone を含まない.

そこで次のことが知りたくなる:

$$0^\sharp \text{ が存在} \overset{?}{\Leftrightarrow} \mathcal{M}_{\mathrm{h}} \text{ は upper cone を含む}$$

hyperdegree の minimal cover

関連して, 次のことがわかった:

- $0^\sharp$ が存在 $\Rightarrow$ S は $\mathcal{D}_{\mathrm{h}}$ において cofinal でない.
- V が L 上 set-generic $\Rightarrow$ S は $\mathcal{D}_{\mathrm{h}}$ において cofinal.

そこで次のことが知りたくなる:

$$0^\sharp \text{ が存在} \overset{?}{\Leftrightarrow} S \text{ は } \mathcal{D}_{\mathrm{h}} \text{ において cofinal でない}$$

hyperdegree の minimal cover

$0^\sharp$ の存在

versus

すべての real が L 上 set-generic

両者は相容れないが, 相補的ではない. どちらでもないケースがあることが L 上の class forcing の理論によって解明されている. その線で

$$0^\sharp \text{ が存在} \not\Leftrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{h}} \text{ は upper cone を含む}$$

という答えが出るのではないかと, 期待している.

参考文献

[Gandy and Sacks 1967] *A minimal hyperdegree,* Fund. Math. 61 (1967), 215–223.

[Harrington and Kechris 1975] *A basis result for Σ^0_3 sets of reals with an application to minimal covers,* Proc. A.M.S. 53 (1975), 445–448.

[Jocksch 1973] *An application of Σ^0_4 determinacy to the degree of unsolvability,* J. Symb. Logic 38 (1973), 293–294.

[Jocksch and Shore 1985] *REA operators, r.e. degrees and minimal covers,* Recursion theory (Ithaca, N.Y., 1982), 3–11, Proc. Sympos. Pure Math., 42, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

[Jocksch and Soare 1970] *Minimal covers and arithmetical sets,* Proc. A.M.S. 25 (1970), 856–859.

[Martin 1975] *Borel determinacy,* Ann. of Math. (2), 102 (1975), 363–371.

[Paris 1972] *$ZF \vdash \Sigma^0_4$ determinateness,* J. Symb. Logic 37 (1972), 661–667.

[Sacks 1976] *Countable admissible ordinals and hyperdegrees,* Adv. Math. 19 (1976), 213–262.

[Simpson 1975] *Minimal covers and hyperdegrees,* Trans. A.M.S. 209 (1975), 45–64.

[Spector 1956] *On degrees of recursive unsolvability,* Ann. of Math. (2) 64, (1956), 581–592.

え？ まだ時間があるのですか？

警告!!

ここからはまったく無責任な「絵に描いた餅」をお送りします

問題の確認

というわけで、次の open problem がある：

問題

$$\mathcal{M}_{\mathrm{h}} \text{ が upper cone を含む} \overset{?}{\Rightarrow} 0^\sharp \text{ が存在}$$

[Simpson 1975] 以降、この問題について論文が出たようすがない.

2015 年の東工大のシンポジウムで本人に尋ねた時点では, S.G.Simpson 自身もまだ答えを聞いたことがないという. その後も, MathSciNet の検索に何もかからない.

どうアプローチするか (1)

この問いに否定的に答える方向での構想：

実数 x について

$$\Lambda(x) = \{\, \alpha \in \mathrm{ORD} \mid L_\alpha(x) \models \Delta_0\text{-Collection Scheme} \,\}$$

とおいて，これを x の admissibility spectrum という．

$\Lambda(\emptyset)$ が admissible ordinal の全体である．

$x \leqslant_{\mathrm{h}} y$ のとき $\Lambda(x) \supset \Lambda(y)$ となる．

どうアプローチするか (1)

次のような事実が知られている.

- $\Lambda(0^\sharp) \subset \{\text{Silver indiscernibles}\}$.
- (Silver の補題) $\Lambda(x) \subset L\text{-Cardinals} \Rightarrow 0^\sharp \in L(x)$.
- $0^\sharp \in L(x) \Rightarrow$ ある β について $\Lambda(x) \setminus \beta \subset \{\text{Silver indiscernibles}\}$.
- x が L 上 set-generic $\Rightarrow$ ある β について $\Lambda(x) \setminus \beta = \Lambda(\emptyset) \setminus \beta$.
- $0^\sharp$ が存在するなら, $\Lambda(x) = \{\text{Recursively inaccessible ordinals}\}$ をみたす x が存在する. [Sy Friedman 1987] (そのような x の存在自体は ZF と equiconsistent)

Sy Friedman の x は L 上 set-generic ではないし, $0^\sharp \notin L(x)$ であるという意味で $0^\sharp$ の存在も導かない.

どうアプローチするか (1)

このように $\Lambda(x)$ が "薄い" という仮定から, $\deg_{\mathrm{h}}(x)$ について何か言えないだろうか.

もしも,

$$\Lambda(x) \subset \{\text{Recursively inaccessible}\} \text{ のとき } x \in \mathcal{M}_{\mathrm{h}}$$

なんてことが言えたら, それで解決だが, どうか？

前提条件が "ω_1^x が recursively inaccessible" というだけでは十分でないことは, Sacks の定理からわかる.

どうアプローチするか (2)

いっぽう, (フジタの期待と裏腹に)

$$\mathcal{M}_{\mathrm{h}} \text{ が upper cone を含むなら } 0^\sharp \text{ が存在する}$$

という側に賭けるとすれば, Sacks の定理に登場した

$$S = \{\, y \subset \omega \mid (\forall x)[\, x <_{\mathrm{h}} y \Rightarrow \omega_1^x < \omega_1^y \,]\,\}$$

を [Harrington 1978] の証明で用いられた Harvey Friedman の集合

$$F = \left\{\, b \subset \omega \mid \forall \xi < \omega_1^b \left[\, \mathcal{P}(\xi) \cap L_{\omega_1^b} \subset L_{\xi+3}(b) \,\right] \,\right\}$$

と比較することになる.

Harrington は F が Turing degree の upper cone を含むなら $0^\sharp$ が存在することを示した.

どうアプローチするか (2)

Harvey Friedman の F は後にさまざまに改良された．たとえば [Sami 1999] では F にかえて

$$F' = \{\, b \subset \omega \mid \exists a \big[\forall x \leqslant_{\mathsf{h}} a (x \leqslant_{\mathsf{T}} b) \wedge \omega_1^a = \omega_1^b \big] \,\}$$

が用いられた．

$$\forall x \leqslant_{\mathsf{h}} a (x \leqslant_{\mathsf{T}} b) \Rightarrow a <_{\mathsf{h}} b$$

は明らかだから，$b \in F'$ は，$b \notin S$ をより強い意味で主張していることになる．

この意味で，Harrington や Sami の結果を強化する方向で考えるのが，ひとつの道と思われる．

追加の参考文献

[Sy Friedman 1987] *Strong coding*, Ann. Pure Appl. Logic 35 (1987), 1–98.

[Harrington 1978] *Analytic determinacy and* $0^\sharp$, J. Symb. Logic 43 (1978), 685–693.

[Sami 1999] *Analytic determinacy and* $0^\sharp$*: a forcing-free proof of Harrington's theorem*, Fund. Math. 160 (1999), 153–159.