定義 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が 加法的 であるとはすべての $x,y\in\mathbb{R}$ について等式

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

が成立することをいう.

連続な加法的函数は正比例函数: $x\mapsto Ax$ だけである (コーシーの定理.) 不連続な加法的函数の存在証明には選択公理が必要である.

命題 1 少なくともひとつの区間上で上または下に有界であるような加法的函数は連続である.

[証明] 加法的函数 f について, 実数 c を中点とする幅 $2R>0$ の区間において $f(x)\leq\beta$ が成立したとする. すると $|t|<R$ なら $f(c+t)\leq\beta$ ということになるので, 加法性によって,

$$f(t)=f(c+t)-f(c)\leq\beta-f(c)$$

となる. 同様に $-f(t)=f(-t)=f(c-t)-f(c)\leq\beta-f(c)$ であるから,

$$|t|<R\ \Rightarrow\ |f(t)|\leq\beta-f(c)$$

すなわち f は原点の近傍で有界となる. 以下, 右辺の定数 $\beta-f(c)$ を M と書こう. このとき整数 $k\geq 2$ について

$$|t|<\frac{R}{k}\ \Rightarrow\ |kt|<R\ \Rightarrow\ |kf(t)|=|f(kt)|\leq M\ \Rightarrow\ |f(t)|\leq\frac{M}{k}$$

となる. このことから

$$\lim_{t\to 0}f(t)=0$$

が導かれ, f は原点において連続である. 他の任意の点 $p\in\mathbb{R}$ においても

$$\lim_{x\to p}f(x)=\lim_{t\to 0}f(p+t)=f(p)+\lim_{t\to 0}f(t)=f(p)$$

となるので, f はいたるところ連続となる. 下に有界の場合も同様に議論すればよい. □

命題 2 函数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が加法的で, かつ不連続であるとき, そのグラフ

$$\left\{\,\langle x,y\rangle\in\mathbb{R}^2\ :\ y=f(x)\,\right\}$$

は $\mathbb{R}^2$ において稠密である.

[証明] グラフが稠密でなかったとしたら, 実数 a, b, c, d を, $a < b$ かつ $c < d$ で

$$a \leq x \leq b \ \Rightarrow\ f(x) \leq c \vee f(x) \geq d$$

となるようにとれる. 命題 1 によれば, 区間 $[a, b]$ において f は上にも下にも非有界なので,

$$\alpha = \sup\Big(\,(-\infty, c] \cap f\big([a, b]\big)\Big), \quad \beta = \inf\Big(\,[d, +\infty) \cap f\big([a, b]\big)\Big)$$

という二つの実数がとれる. $\alpha \leq c < d \leq \beta$ である. このとき実数 u, v を

$$a \leq u \leq b, \quad \alpha - \frac{\beta - \alpha}{2} < f(u) \leq \alpha,$$
$$a \leq v \leq b, \quad \beta \leq f(v) < \beta + \frac{\beta - \alpha}{2}$$

となるようにとれる. 実数 $(u + v)/2$ を x と書くことにしよう. このとき $a \leq x \leq b$ であるから, 仮定により $f(x) \leq \alpha$ または $f(x) \geq \beta$ となる. いっぽう, 加法性により

$$2f(x) = f(x) + f(x) = f(x + x) = f(u + v) = f(u) + f(v),$$

したがって $f(x) = \frac{f(u)+f(v)}{2}$ となる. これは

$$\alpha < \frac{3\alpha + \beta}{4} < f(x) < \frac{\alpha + 3\beta}{4} < \beta$$

を導き, 矛盾が生じる. □

2011 年 9 月 7 日

ゼルプスト殿下 こと 藤田 博司