ゲーデルの L とゼロ・シャープ

ジタさん (fujitapiroc1964@twitter)

2019 年 12 月 4 日

はじめに

これは未完原稿です!!

Alwe さんの企画なさった Mathematical Logic Advent Calendar 2019*1の 4 日目の記事として，ゲーデルの構成可能的集合の宇宙 L について，そして，それに関連する重要概念であるゼロ・シャープについて，概要を書きます．証明や説明を大幅に省略している部分が多数あります．興味を持たれた方は文末の参考文献を調べてみてください．

1　ゲーデルの L

クルト・ゲーデルは 1938 年に，公理的集合論に対する選択公理および一般連続体仮説の相対的無矛盾性を証明します．集合論の標準的な公理系であるツェルメロ・フレンケル集合論 (以下 ZF と略す) が矛盾しない限り，選択公理 (AC) と一般連続体仮説 (GCH) を ZF に付け加えても矛盾しない，という事実を証明したわけですが，そのさいに用いられたのが，こんにちゲーデルの L と呼ばれている構成可能的集合 (constructible sets) のクラスです．ここではまず L がどのように定義されるのかを説明します．

1.1　累積階層

すべての集合のなすクラスを V と書きます．ZF 集合論では基礎の公理があるおかげで，V を階層に分類することができます．次のような超限再帰的定義を考えましょう．

$$V_0 = \emptyset, \quad V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha), \quad \alpha \text{ が極限順序数のとき } V_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} V_\xi,$$

ただし $\mathcal{P}(V_\alpha)$ は V_α の **冪集合** すなわち V_α のすべての部分集合のなす集合を意味します．すべての順序数 α にわたっての V_α の和が V 全体に一致することを基礎の公理は保証してくれます．すべての順序数にわたる系列 $(V_\alpha \mid \alpha \in \mathit{Ord})$ を **累積階層** とよびます．

集合 x に対して，$x \in V_{\alpha+1}$ かつ $x \notin V_\alpha$ をみたす順序数 α が一意的に定まります．この順序数 α を x の **ランク** といって $\mathrm{rank}(x)$ と書きます．これについては

- $x \in y$ のとき $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$ となる，

*1 https://adventar.org/calendars/4015

- 各順序数 α について $\mathrm{rank}(\alpha) = \alpha$ である，
- V_α は $\mathrm{rank}(x) < \alpha$ であるような集合 x の全体である，

といった性質が重要です．

1.2 論理式のコード

集合論の形式言語の論理式ひとつひとつに形式的体系内の集合を対応させる規則を定義できます．細かくやりだすとかなり大変なのですが概略だけ示しましょう．集合論の形式言語は関数記号も定数記号ももたず，述語記号は等号と $\in$ だけなので，原子論理式は変数 v_i と v_j に関する $v_i = v_j$ あるいは $v_i \in v_j$ の形の式だけです．ここでは変数には自然数の番号が振ってあるものとしましょう．また論理記号としては $\to$ と $\neg$ と $\forall$ だけを用い，$\vee$ と $\wedge$ と $\exists$ は $\to$ と $\neg$ と $\forall$ を用いて表されているものとします．論理式の構成に関する再帰で次のように定義します．

- 原子論理式 $v_i = v_j$ のゲーデル数 $\ulcorner v_i = v_j \urcorner$ とは 3 つ組 $\langle 0, i, j \rangle$ のことである．
- 原子論理式 $v_i \in v_j$ のゲーデル数 $\ulcorner v_i \in v_j \urcorner$ とは 3 つ組 $\langle 1, i, j \rangle$ のことである．
- 論理式 A と B のゲーデル数 $\ulcorner A \urcorner$ と $\ulcorner B \urcorner$ がすでに定まっているものとして，$A \to B$ のゲーデル数 $\ulcorner A \to B \urcorner$ を $\langle 2, \ulcorner A \urcorner, \ulcorner B \urcorner \rangle$ と定める．
- 論理式 A のゲーデル数 $\ulcorner A \urcorner$ がすでに定まっているものとして，$\neg A$ のゲーデル数 $\ulcorner \neg A \urcorner$ を $\langle 3, \ulcorner A \urcorner, 0 \rangle$ と定める．
- 論理式 A のゲーデル数 $\ulcorner A \urcorner$ がすでに定まっているものとして，$\forall v_i A$ のゲーデル数 $\ulcorner \forall v_i A \urcorner$ を $\langle 4, i, \ulcorner A \urcorner \rangle$ と定める．

このようにして，形式言語の論理式 A に対して A のゲーデル数と呼ばれる集合 $\ulcorner A \urcorner$ が定まります．

この定義に対応して次のような関数 F を再帰的に定義してみましょう．まず $F(0) = \{0, 1\} \times \omega \times \omega$ とします．すると，$F(0)$ は「原子論理式のゲーデル数全体の集合」に相当します．$F(n)$ が定まっているものとして $F(n+1)$ を

$$\begin{aligned} F(n+1) = F(n) &\cup (\{2\} \times F(n) \times F(n)) \\ &\cup (\{3\} \times F(n) \times \{0\}) \\ &\cup (\{4\} \times \omega \times F(n)) \end{aligned}$$

と定めます．そうしておいて $FORM = \bigcup_{n<\omega} F(n)$ としましょう．するとこの $FORM$ が「論理式のゲーデル数全体の集合」に相当します．ここで「相当する」などと奥歯に物がはさまったような言い方をしているのには理由があります．個々の論理式 A についてはそのゲーデル数 $\ulcorner A \urcorner$ が定まって $\ulcorner A \urcorner \in FORM$ となることが示せますし，$FORM$ の定義はゲーデル数の再帰的定義を忠実になぞったものなのですが，だからといって，$FORM$ に属する集合がすべてわれわれの形式言語の論理式のゲーデル数になっている保証などはないのです．その点には注意が必要なのですが，$FORM$ の要素たちが，あたかも論理式のように振るまうのも確かです．たとえば，次の条件をみたす $FORM$ 上の関数 FreeVar を，条件

- $\mathrm{FreeVar}(\langle 0, i, j \rangle) = \{i, j\}$,
- $\mathrm{FreeVar}(\langle 1, i, j \rangle) = \{i, j\}$,
- $\mathrm{FreeVar}(\langle 2, p, q \rangle) = \mathrm{FreeVar}(p) \cup \mathrm{FreeVar}(q)$,
- $\mathrm{FreeVar}(\langle 3, p, 0 \rangle) = \mathrm{FreeVar}(p)$,

- $\mathrm{FreeVar}(\langle 4, i, p\rangle) = \mathrm{FreeVar}(p) \setminus \{i\}$

をみたすように定められます．すると $p \in \mathit{FORM}$ のとき $\mathrm{FreeVar}(p)$ は「論理式」p の「自由変数」の番号全体の集合ということになります．

集合 u と FORM のメンバー p に対して，有限な関数 $a\colon \mathrm{dom}(a) \to \omega$，$|\mathrm{dom}(a)| < \omega$ で $\mathrm{FreeVar}(p) \subset \mathrm{dom}(a) \subset \omega$ と $\mathrm{range}(a) \subset u$ をみたすもののことを，p に関する u への割当てと呼び，その全体を $\mathrm{Asmt}(u, p)$ と書きましょう．$\mathrm{Asmt}(u, p)$ に属する関数は「論理式」p の各「自由変数」に u の要素を代入する働きをしてくれるわけです．これらの道具立てを使うと「構造 $(u, \in)$ において論理式 p が割当て a のもとで成立する」という意味をもつ (本来の意味での形式言語の) 論理式

$$\mathrm{Sat}(u, p, a)$$

を書くことができます[*2]．

1.3 構成可能的階層

累積階層の V_α から $V_{\alpha+1}$ を作るときは V_α のすべての部分集合を集めました．ここでは，すべての部分集合ではなく，必要最小限度の部分集合だけを集めて作られる階層を考えましょう．

集合 A に対して $\mathcal{D}(A)$ とは，構造 $(A, \in)$ において A の要素をパラメータとして定義可能な A の部分集合をすべて集めてできる集合，とします．$B \in \mathcal{D}(A)$ ということを，p と a を

- $p \in \mathit{FORM}$，
- $0 \in \mathrm{FreeVar}(p)$，
- $a \in \mathrm{Asmt}(A, p)$，
- $B = \{\, x \in A \mid \mathrm{Sat}(A, p, a(0/x)) \,\}$，ただし，$a(0/x)$ とは $i \in \mathrm{dom}(a) \setminus \{0\}$ のとき $a(i)$ を返し $i = 0$ のとき x を返すような割当てのこと

という条件をみたすようにとれる，ということだとすればよいので，$\mathcal{D}(A)$ の定義は集合論の形式言語で書くことができます．

先ほど定義した $\mathcal{D}$ を用いて次のような超限再帰的定義を考えましょう．

$$L_0 = \emptyset, \quad L_{\alpha+1} = \mathcal{D}(L_\alpha), \quad \alpha \text{ が極限順序数のとき } L_\alpha = \bigcup_{\xi<\alpha} L_\xi.$$

すべての順序数にわたる系列 $(L_\alpha \mid \alpha \in \mathit{Ord})$ を **構成可能的階層** とよびます．その全体からなるクラスを

$$L = \bigcup_{\alpha \in \mathit{Ord}} L_\alpha$$

と書き，その要素のことを **構成可能的集合** と呼びます．

クラス L は次の意味で ZF 集合論のモデルになっています．φ を集合論の論理式とするとき，φ に出現する量化 $\forall x(\dots)$ を $\forall x(x \in L \to \dots)$ に，また $\exists x(\dots)$ を $\exists x(x \in L \land \dots)$ に，すべて書き替えることで，論理式 φ^L が得られます．論理式 φ^L は φ の L への **相対化** とよびます．相対化 φ^L は φ がすべての集合について語っているのと同じことを構成可能的集合について語るもので，L において φ が成立する，と主張して

[*2] このあたりの詳細は，現在準備中の著作『公理的集合論入門講義』に書きます．

いると解釈できます．そうして，φ が ZF 集合論の公理であったとすると，φ^L が ZF 集合論で証明できる定理になるという意味で，L において ZF 集合論が成立しているのです．

さらに選択公理 AC と一般連続体仮説 GCH についても，相対化 AC^L と GCH^L が (選択公理を含まない)ZF 集合論で証明できる定理になります．このことから，最初に述べた相対的無矛盾性の結果《ZF 集合論が矛盾しない限り，選択公理と一般連続体仮説を ZF に付け加えても矛盾しない》が得られることになります．

1.4 構成可能性公理

「すべての集合が構成可能的集合である」と主張する $\forall x \exists \alpha (x \in L_\alpha)$ という論理式を $V = L$ と表記し，これを **構成可能性公理** と呼びます．$(V = L)^L$ が ZF 集合論で証明できるので，$V = L$ も ZF 集合論と相対的に無矛盾です．ZF 集合論に $V = L$ を公理として追加すると，選択公理や一般連続体仮説のほか「ススリン木が存在する」「すべてのホワイトヘッド群は自由アーベル群である」「ルベーグ可測でない射影集合が存在する」などといった興味ある数学的命題が証明できることが知られています．

2 可測基数とラムゼイ型定理

話はいったん L を離れて可測基数において成立するラムゼイ型定理に移ります．選択公理を全面的に用います．

2.1 可測基数

集合 X 上の **フィルター** とは X の部分集合の族 F であって

(1) $X \in F$,
(2) $\emptyset \notin F$,
(3) $A \subset B \subset X$ かつ $A \in F$ のとき $B \in F$,
(4) $A \in F$ かつ $B \in F$ のとき $A \cap B \in F$

という条件をみたすもののことを言います．

集合 X 上のフィルター F がさらに条件

(5) どんな $A \subset X$ についても $A \in F$ または $X \setminus A \in F$

をみたすならば，F のことを X 上の **超フィルター** といいます．たとえば，集合 X の要素 a に対して集合族 $\{ A \subset X \mid a \in A \}$ を作れば，これは超フィルターです．このようにひとつの要素で決まる超フィルターのことを **単項** 超フィルターといいます．そうでない超フィルター，すなわち

(6) どんな $x \in X$ についても $\{x\} \notin F$

をみたす超フィルターのことを **非単項** 超フィルターといいます．

どんなフィルター F も条件

(7) $A_0, \ldots, A_n \in F$ のとき $A_0 \cap \cdots \cap A_n \in F$

をみたします．この条件 (7) のメンバーが無限個になったバージョンを考えましょう．基数 κ に対してフィ

ルター F が条件

(8) $A_i \in F$ $(i \in I)$ かつ $|I| < \kappa$ のとき $\bigcap_{i\in I} A_i \in F$

をみたすとき，フィルター F は **κ-完備** であるといいます．条件 (7) により，どんなフィルターも $\aleph_0$-完備です．

基数 κ が **可測基数** であるとは，$\kappa > \omega$ であり，かつ，κ 上に κ-完備な非単項超フィルターが存在することをいいます．可測基数は巨大基数の一種で，ZFC においてその存在を証明することはできません．

定理 2.1.1 可測基数は到達不能基数である．すなわち，κ を可測基数とするとき (i) κ は正則である: $X \subset \kappa$ かつ $|X| < \kappa$ のとき $\sup X < \kappa$ である，(ii) κ は強極限基数である: $\nu < \kappa$ を任意の基数とするとき $2^\nu < \kappa$ である． ◀

可測基数 κ 上の超フィルターのうちで特に重要な役割を演じるのが，**正規超フィルター** です．

定理 2.1.2 可測基数 κ 上には次の条件をみたす超フィルター D が存在する: (i) D は κ-完備な非単項超フィルターである，(ii) 各 $\xi < \kappa$ に対し $A_\xi \in D$ のとき

$$\mathop{\triangle}_{\xi<\kappa} A_\xi := \{\, \alpha < \kappa \mid \forall \xi < \alpha (\alpha \in A_\xi) \,\} \in D$$

となる．(この集合 $\triangle_{\xi<\kappa} A_\xi$ のことを $\{A_\xi\}_{\xi<\kappa}$ の **対角共通部分** という．)

証明: U を κ 上の任意の κ-完備非単項超フィルターとする． ふたつの関数 $f, g \colon \kappa \to \kappa$ に対して

$$f \sim_U g \Leftrightarrow \{\, \xi < \kappa \mid f(\xi) = g(\xi) \,\} \in U$$

と定義する．U がフィルターであることから，$\sim_U$ は ${}^\kappa\kappa$ 上の同値関係となる．以下では関数 $f \colon \kappa \to \kappa$ の同値類を $[f]$ と書くことにする．$f, g \colon \kappa \to \kappa$ のとき

$$f <_U g \Leftrightarrow \{\, \xi < \kappa \mid f(\xi) < g(\xi) \,\} \in U$$

と定義する．$<_U$ は同値関係 $\sim_U$ と整合するので商集合 ${}^\kappa\kappa/{\sim_U}$ 上の関係 $<^*$ を誘導する．U が超フィルターであることから，$<^*$ が ${}^\kappa\kappa/{\sim_U}$ の非反射的全順序関係であることがわかるが，さらに，U が $\aleph_1$-完備であることから，$<^*$ は ${}^\kappa\kappa/{\sim_U}$ 上の整列順序関係になっていることがわかる．この整列順序の順序型を λ とし，順序同型写像 $\varphi \colon {}^\kappa\kappa/{\sim_U} \to \lambda$ を考えよう．記法の簡略化のため $\varphi([f])$ を $\varphi(f)$ と書く．この意味で $f <_U g$ と $\varphi(f) < \varphi(g)$ は同値である．定数関数 $\check{\alpha} \colon \xi \mapsto \alpha$ と恒等関数 $\mathrm{id} \colon \xi \mapsto \xi$ を比較すると，$\alpha < \kappa$ のとき $\check{\alpha} <_U \mathrm{id}$ なので $\varphi(\check{\alpha}) < \varphi(\mathrm{id})$ である．また，$\alpha < \beta < \kappa$ のとき $\check{\alpha} <_U \check{\beta}$ だから $\varphi(\check{\alpha}) < \varphi(\check{\beta})$，したがって 各 $\alpha < \kappa$ について $\alpha \le \varphi(\check{\alpha})$ である．このことと，U が κ-完備超フィルターであることを用いると，α に関する帰納法で $\varphi(\check{\alpha}) = \alpha$ が示せる．以上のことから $\varphi(\mathrm{id}) \ge \sup_{\alpha<\kappa} \varphi(\check{\alpha}) = \kappa$ である．そこである関数 $f_0 \colon \kappa \to \kappa$ について $\varphi(f_0) = \kappa$ となる．そのような f_0 を用いて，集合族 D を

$$D := \{\, A \subset \kappa \mid f_0^{-1}[A] \in U \,\}$$

によって定める．D が κ 上の κ-完備な超フィルターになることは D の定義から容易に確かめられる．$\alpha < \kappa$ のとき $\varphi(\check{\alpha}) = \alpha < \kappa = \varphi(f_0)$ より $\check{\alpha} <_U f_0$ すなわち $\{\, \xi < \kappa \mid \alpha < f_0(\xi) \,\} \in U$ であるから $f_0^{-1}[\{\alpha\}] \notin U$ したがって $\{\alpha\} \notin D$ であり，D は非単項超フィルターである．最後に各 $\xi < \kappa$ に対して $A_\xi \in D$ であった

とする．このとき $\mathop{\triangle}_{\xi<\kappa} A_\xi \in D$ を示したい．仮にそうでなかったとしよう．すると $f_0^{-1}[\mathop{\triangle}_{\xi<\kappa} A_\xi] \notin U$ となるから

$$B_0 := \{\, \xi < \kappa \mid f_0(\xi) \notin \bigcap_{\eta < f_0(\xi)} A_\eta \,\} \in U$$

となっている．$f_0(\xi) \notin A_\eta$ となる最小の η があればそれを $g(\xi)$ とし，そのような η がなければ $g(\xi) = 0$ として $g\colon \kappa \to \kappa$ を定めよう．すると $\xi \in B_0$ のとき $g(\xi) < f_0(\xi)$ となっているから $g <_U f_0$ である．したがって $\varphi(g) < \varphi(f_0) = \kappa$ であり，ある α について $\varphi(g) = \alpha$ となる．このとき $g \sim_U \check{\alpha}$ であり，

$$B_1 := \{\, \xi < \kappa \mid g(\xi) = \alpha \,\} \in U$$

となる．$B_0 \cap B_1 \in U$ であり，$\xi \in B_0 \cap B_1$ のとき $f_0(\xi) \notin A_\alpha$ となる．すなわち $f_0^{-1}[A_\alpha] \cap B_0 \cap B_1 = \emptyset$ である．このことは $f_0^{-1}[A_\alpha] \notin U$，ひいては $A_\alpha \notin D$ を意味し，すべての $\xi < \kappa$ に対して $A_\xi \in D$ であるとしたことに矛盾する． ◀

定義 2.1.3 基数 κ 上のフィルター F が，対角共通部分をとる操作のもとで閉じており，かつすべての $\alpha < \kappa$ に対して $\kappa \setminus \alpha \in F$ となるとき，F を κ 上の **正規フィルター** という． ◀

正規フィルターはつねに κ-完備になります．定理 2.1.2 から，可測基数上には正規超フィルターが存在することがわかりました．

2.2 可測基数とラムゼイ基数

集合 X のちょうど n 個の要素からなる部分集合全体の集合を $[X]^n$ と書くことにします．この集合 $[X]^n$ からある Y への写像 $F\colon [X]^n \to Y$ が与えられたとしましょう．このとき $H \subset X$ が F に関して **均質** であるとは，F が $[H]^n$ において定数になることをいいます．ここでの目標は次の定理の ω を可測基数に置き換えたものが成立することを示すことです．

定理 2.2.1 (ラムゼイの定理) m と n を自然数とし，$F\colon [\omega]^n \to m$ を任意の写像とする．このとき，F に関して均質な無限集合 $H \subset \omega$ が存在する． ◀

可測基数 κ 上の正規超フィルター D を考えます．自然数 n に関する次の命題 $P(n)$ を考えましょう．

> 命題 $P(n)$: $\nu < \kappa$ とし $F\colon [\kappa]^n \to \nu$ を任意の写像とする．このとき，F に関して均質な $H \subset \kappa$ で D に属するものが存在する．

命題 $P(0)$ と $P(1)$ が成立することは明らかです．$n \geq 1$ とし $P(n)$ が成立していると仮定して $P(n+1)$ を示しましょう．写像 $F\colon [\kappa]^{n+1} \to \nu$ が任意に与えられたとします．ここで ν は κ より小さい任意の基数です．$\alpha < \kappa$ のとき $F_\alpha\colon [\kappa \setminus (\alpha+1)]^n \to \nu$ を $F_\alpha(x) = F(\{\alpha\} \cup x)$ と定義すると，$P(n)$ により，F_α に関して均質な $H_\alpha \subset \kappa \setminus (\alpha+1)$ で $H_\alpha \in D$ であるものがとれます．F_α の $[H_\alpha]^n$ 上での唯一の値を y_α としましょう．すると D の κ-完備性からある $y \in \nu$ について

$$K := \{\, \alpha < \kappa \mid y_\alpha = y \,\} \in D$$

となります．$H := K \cap \mathop{\triangle}_{\alpha<\kappa} H_\alpha$ とすると $H \in D$ です．この H から $n+1$ 個の要素を $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ と取ったとすると，$\alpha_0 \in K$ より $y_{\alpha_0} = y$ であり，$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in H_{\alpha_0}$ より

$$F(\{\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = F_{\alpha_0}(\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}) = y_{\alpha_0} = y$$

となります．したがって F は $[H]^{n+1}$ 上で一定値 y をとります．こうして F に関して均質な集合 H を D に属するようにとれたので，命題 $P(n+1)$ が成立します．

定理 2.2.2 κ を可測基数とし，D を κ 上の正規超フィルターとする．任意の自然数 n と任意の写像 $F\colon [\kappa]^n \to \nu$ (ただし $\nu < \kappa$) が与えられたとする．このとき F に関して均質な集合 $H \subset \kappa$ で D に属するものが存在する．◀

ここで D が κ-完備なフィルターであることを用いれば，定理 2.2.2 を少しばかり強化できます．集合 X の有限部分集合全体のなす集合を $[X]^{<\omega}$ と書くことにしましょう．X の部分集合 H が写像 $F\colon [X]^{<\omega} \to Y$ が F に関して均質であるとは，各 n について F が $[H]^n$ において定数になること，言いかえれば，$x \in [H]^{<\omega}$ に対する値 $F(x)$ が x の要素の個数のみによって定まることをいいます．いま κ が可測基数で D が κ 上の正規超フィルターであれば，任意の写像 $F\colon [\kappa]^{<\omega} \to \nu$ (ただし $\nu < \kappa$) に対して定理 2.2.2 を用いて，各 n ごとに，制限写像 $F \restriction [\kappa]^n$ に関して均質な $H_n \subset \kappa$ を D に属するようにとれます．$H = \bigcap_{n<\omega} H_n$ とすると $H \in D$ であり，H は F に関して均質となります．

定義 2.2.3 基数 κ が **ラムゼイ基数** であるとは，任意の写像 $F\colon [\kappa]^{<\omega} \to \nu$ (ただし $\nu < \kappa$) が濃度 κ の均質集合をもつことをいう．◀

先ほどの考察により，可測基数はラムゼイ基数であることがわかります．実はもっと強く，可測基数 κ は κ 番目のラムゼイ基数であることが示せます．

3 ゼロ・シャープ

3.1 初等部分モデル

ふたつの集合 A と B があったとして，$A \subset B$ であり，かつ，任意の $p \in \mathit{FORM}$ と割当て $a \in \mathrm{Asmt}(A,p)$ について $\mathrm{Sat}(A,p,a)$ と $\mathrm{Sat}(B,p,a)$ が同値になるとき，$A \prec B$ と書いて，A は B の **初等部分モデル** であるといいます．このとき，A の要素について A において成立しているのとまったく同じことが B において成立しているわけです．

初等部分モデルについて次の定理が成立します．

定理 3.1.1 (レーヴェンハイム-スコーレム-タルスキの定理) B を任意の無限集合とし $X \subset B$ とするとき，$X \subset A$，$A \prec B$ かつ $|A| = \aleph_0 + |X|$ となるような集合 A がとれる．◀

したがってどんな無限集合も可算な初等部分モデルをもつわけです．この定理の証明の詳細にはいまは立ち入りませんが，(一般には選択公理の助けを借りて) 次のような関数 h を作ることによってなされます．$h\colon B \times \omega \to B$ であり，どんな集合 $X \subset B$ についても $X \subset h[X \times \omega]$ が成立し，さらに，もしも $Y \subset B$ が h のもとで閉じている ($h[Y \times \omega] \subset Y$) ならば $Y \prec B$ である．この条件をみたす関数 h のことを集合 B に対する **スコーレム関数** と呼びます．定理の A は，X を含み関数 h のもとで閉じた最小の集合を作ることで得られます．

必ずしも整礎的でない構造 $\mathcal{A} = (A, E)$ に対しても述語 $\mathrm{Sat}(\mathcal{A},p,a)$ を標準的な構造 $(A, \in)$ に対するのとまったく同様に定義でき，初等部分構造について考えられます．以下ではそのような場合も必要に応じて考えます．

3.2 エーレンフォイヒト-モストフスキ集合

いま，ZF 集合論から，構成可能的階層を定義しその基本的な性質を証明するのに必要にして十分なだけの有限個の公理を選んで，その公理の集まりを T と呼んだとしましょう．この T に関してさらに，

(1) (α が不可算基数)^L であるときには T に属する公理の L_α への相対化がすべて成立する，
(2) M が推移的集合で T に属するすべての公理と構成可能性公理 $V = L$ の M への相対化が成立しているとき，ある極限順序数 α について $M = L_\alpha$ が成立する，

と仮定します．このような T を選べることは本当ならきちんと確認すべきことですが，ここでは省略します．ZF 集合論から冪集合の公理を除いたものを T とすれば (1) と (2) をみたしますが，この場合公理が有限個で済まないので少し話がややこしくなります．

さて，必ずしも整礎的でない構造 $\mathcal{A} = (A, E)$ において，(x は順序数である)$^{\mathcal{A}}$ をみたす要素 $x \in A$ 全体の集合を $Ord^{\mathcal{A}}$ と書きましょう．集合 $H \subset Ord^{\mathcal{A}}$ が **$\mathcal{A}$-識別不能** であるとは，$s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1}$ かつ $t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1}$ と $2n$-個の要素を H からとったとき，$\mathrm{FreeVar}(p) \subset n$ であるような任意の $p \in FORM$ について

$$\mathrm{Sat}(\mathcal{A}, p, \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle) \leftrightarrow \mathrm{Sat}(\mathcal{A}, p, \langle t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}\rangle)$$

となることをいいます．なお，ここでは有限列 $\langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle$ で変数 $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$ にそれぞれ $s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}$ を対応させる割当てをあらわしています．この式は，集合 H からとられた単調増加な n 組はすべて $\mathcal{A}$ においてまったく同じ「論理式」をみたす，と主張しています．

いま，T と $V = L$ の (必ずしも整礎的でない) モデル $\mathcal{A} = (A, E)$ があって，$\mathcal{A}$-識別不能な無限集合 $H \subset Ord^{\mathcal{A}}$ が存在するとします．H からとられたある (任意の) 単調増加な有限列 $s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1}$ について $\mathrm{Sat}(\mathcal{A}, p, \langle s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}\rangle)$ となるような $p \in FORM$ 全体の集合 Σ のことを，$\mathcal{A}$ と H によって決まる **エーレンフォイヒト-モストフスキ集合** とよびます．以下これを **EM 集合** と略記します．

なんらかの EM 集合 Σ が与えられたとします．α をなんらかの無限順序数として，**(Σ, α)-モデル** というものを，次の条件をみたす組 $(\mathcal{A}, H)$ のことだとします．

(1) $\mathcal{A} = (A, E)$ は T と $V = L$ をみたす．
(2) $H \subset Ord^{\mathcal{A}}$ であり，H は $\mathcal{A}$-識別不能である．
(3) $Ord^{\mathcal{A}}$ の順序のもとで H は順序型 α の整列集合である．
(4) $H \subset A'$ かつ $(A', E) \prec \mathcal{A}$ となるような A' は A 全体しかないという意味で，H は $\mathcal{A}$ を生成する．
(5) $\mathcal{A}$ と H によって決まる EM 集合は Σ に一致する．

任意の EM 集合 Σ と任意の無限順序数 α に対して (Σ, α)-モデルが存在すること，そして (Σ, α)-モデルは同型の意味で一意的であることが知られています．

3.3 ゼロ・シャープの定義

さて，公理系 T において構成可能的集合のクラス L 全体の整列順序づけ $<_L$ が定義できます．これは ZF 集合論で AC^L が証明できることを検証するさいのキモになる考察で，サブセクション 1.3 で述べた $\mathcal{D}$ 演算の性質により，各 $B \in \mathcal{D}(A)$ が $FORM$ の要素 p と A の有限個の要素の並び $\langle a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle$ によって決ま

ることを用いて，L_α 上の整列順序づけから $L_{\alpha+1}$ 上の整列順序づけが自然に定められることによるのです．とくに，L_α が公理系 T をみたすときには $<_L$ の L_α への相対化 $(<_L)^{L_\alpha}$ が定義でき，それは $<_L$ の L_α への相対化 $<_L \cap (L_\alpha \times L_\alpha)$ に一致します．このことを用いると，関数 $h_\infty\colon L \times \omega \to L$ を，L_α が公理系 T をみたすときにはつねに h_∞ の L_α への相対化 $h_\infty^{L_\alpha}\colon L_\alpha \times \omega \to L_\alpha$ が L_α に対するスコーレム関数になるように定義できます．以下，そのように定義された関数 h_∞ を固定して考えます．

EM 集合 Σ が

$$h_\infty(\langle v_0, \ldots, v_{n-1} \rangle, k) \in \mathit{Ord} \to h_\infty(\langle v_0, \ldots, v_{n-1} \rangle, k) < v_n$$

の形の論理式をすべて含むとき Σ は **共終** であるといいます．Σ が共終であることと，任意の極限順序数 α について (Σ, α)-モデル $(\mathcal{A}, H)$ において H が $\mathit{Ord}^{\mathcal{A}}$ の中で共終になる (上に有界にならない) ことは同値であり，また，少なくともひとつの極限順序数 α について (Σ, α)-モデル $(\mathcal{A}, H)$ において H が $\mathit{Ord}^{\mathcal{A}}$ の中で共終になることも同値になります．

次に，EM 集合 Σ が **めざましい** ということを定義します．これは $k \in \omega$ について

$$h_\infty(\langle v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{n+m} \rangle, k) < v_n$$

という論理式が Σ に属するときには必ず

$$h_\infty(\langle v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{n+m} \rangle, k) = h_\infty(\langle v_0, \ldots, v_{n-1}, v_{n+m+1}, \ldots, v_{n+2m+1} \rangle, k)$$

という論理式も Σ に属する，ということです．この条件はちょっとわかりにくいですが，共終でめざましい EM 集合 Σ については，極限順序数 α に対する (Σ, α)-モデル $(\mathcal{A}, H)$ において H が $\mathit{Ord}^{\mathcal{A}}$ の閉非有界集合になることが知られています．またこのとき，H の順序型 γ の切片 K のスコーレム関数 $h_\infty^{\mathcal{A}}$ に関する閉包を $\mathcal{B}$ とすると，$(\mathcal{B}, K)$ が (Σ, γ)-モデルになります．

最後に，EM 集合 Σ が **整礎的** であるということを，任意の無限順序数 α について (Σ, α)-モデルが整礎的であることだと定義します．これは，ある不可算順序数 α について (Σ, α)-モデルが整礎的であることと同値であり，またすべての可算順序数 α について (Σ, α)-モデルが整礎的であることと同値です．

整礎的で共終でめざましい EM 集合は，存在すればただひとつに定まります．そのただひとつの EM 集合を $0^\sharp$ と表記し，**ゼロ・シャープ** と呼ぶのです．

ゼロ・シャープが存在したとすれば，任意の不可算基数 κ について (同型の意味で) 一意的な $(0^\sharp, \kappa)$-モデル $(\mathcal{A}, H)$ について $\mathcal{A}$ は $(L_\kappa, \in)$ と同型になります．またこのときの H を H_κ と書けば，H_κ は κ において閉非有界であり，しかも κ 未満のすべての不可算基数を含みます．$\kappa < \lambda$ をふたつの不可算基数とし，(L_κ, H_κ) と (L_λ, H_λ) をそれぞれ $(0^\sharp, \kappa)$-モデルおよび $(0^\sharp, \lambda)$-モデルとするとき，$H_\kappa = H_\lambda \cap \kappa$ となります．

3.4 ラムゼイ基数からのゼロ・シャープの存在証明

ゼロ・シャープの存在は ZFC 集合論だけでは証明できませんが，ラムゼイ基数が存在するならばゼロ・シャープも存在します．

ラムゼイ基数 κ が存在したとします．

論理式のゲーデル数全体の集合 FORM は可算集合です．FORM のすべての要素を

$$p_0, p_1, \ldots, p_i, \ldots \quad (i < \omega)$$

と数えあげ，しかも各 i で $\mathrm{FreeVar}(p_i) \subset i$ となるようにしておきます．そのうえで，各 i に対し $f_i\colon [\kappa]^i \to \{0, 1\}$ を $\xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{i-1} < \kappa$ に対し

$$\mathrm{Sat}(L_\kappa, p_i, \langle \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}\rangle) \text{ のとき } f_i(\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}\}) = 1,$$
$$\mathrm{Sat}(L_\kappa, p_i, \langle \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}\rangle) \text{ でないとき } f_i(\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}\}) = 0$$

と定めましょう．$f\colon [\kappa]^{<\omega} \to \{0,1\}$ を $f \restriction [\kappa]^i = f_i$ となるように定め，この f に関する均質集合 $H \subset \kappa$ で $|H| = \kappa$ となるものをとると，あきらかに H は $(L_\kappa, \in)$-識別不能で，順序型 κ をもちます．

集合 A を $H \subset A$ かつ $A \prec L_\kappa$ となるようにとったとしましょう．A は T と $V = L$ のモデルであり，L_κ の部分構造なので整礎的ですから，一意的な推移的集合 M と同型になります．この M は，T と $V = L$ の推移的モデルとして $M = L_\alpha$ と書けますが，$|A| = \kappa$ であることから $\alpha \geq \kappa$ となっています．いっぽう，$A \subset L_\kappa$ なので A の「順序数」の順序型は κ 以下であり，このことは $\alpha \leq \kappa$ であることを意味します．よって $\alpha = \kappa$，$M = L_\kappa$ です．A から M への同型写像による H の像を H_κ としましょう．$A \simeq M = L_\kappa$ なので H_κ は $(L_\kappa, \in)$-識別不能で，かつ，L_κ を生成します．H_κ は濃度 κ をもつことから κ において共終なので，L_κ と H_κ の定める EM 集合 Σ は共終で，かつ整礎的であり，(L_κ, H_κ) は (Σ, κ)-モデルになっています．

あとは，Σ がめざましい EM 集合になっていることを確認すればよいのです．そのために，論理式

$$h_\infty(\langle v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{n+m-1}\rangle, k) < v_n \tag{$\star$}$$

が Σ に属すると仮定します．このとき論理式

$$h_\infty(\langle v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n, \ldots, v_{n+m-1}\rangle, k) = h_\infty(\langle v_0, \ldots, v_{n-1}, v_{n+m}, \ldots, v_{n+2m-1}\rangle, k) \tag{*}$$

が Σ に属することが示したいのです．各 $\eta < \kappa$ に対して

$$\beta_\eta = h_\infty^{L_\kappa}(\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_{n+m\eta}, \ldots, \alpha_{n+m\eta+(m-1)}\rangle, k)$$

とおきましょう．$\beta_0 = \beta_1$，$\beta_0 > \beta_1$, $\beta_0 < \beta_1$ の可能性が考えられます．$\beta_0 = \beta_1$ だったら (*) が Σ に属することになって証明が完了します．$\beta_0 > \beta_1$ だったら，識別不能性から

$$\beta_0 > \beta_1 > \beta_2 > \cdots$$

となって不合理です．最後の $\beta_0 < \beta_1$ の場合を仮定しましょう．すると識別不能性から β_η は η とともに単調増加するので $K = \{\, \beta_\eta \mid \eta < \kappa \,\}$ は順序型 κ をもちます．また，スコーレム関数 $h_\infty^{L_\kappa}$ の定義可能性と β_η の定め方から，K は $(L_\kappa, \in)$-識別不能です．ここで $K \subset B$，$B \prec L_\kappa$ とすると，先ほど議論したのと同様にして，B は L_κ と同型になります．このときの同型写像によって順序数 β_η が $\bar{\beta}_\eta$ に写ったとして $\bar{K} = \{\, \bar{\beta}_\eta \mid \eta < \kappa \,\}$ とおくと，$\bar{K}$ は順序型 κ をもち，$(L_\kappa, \in)$-識別不能で，L_κ を生成します．よって $(L_\kappa, \bar{K})$ も (Σ, κ)-モデルになります．ところが，($\star$) によれば各 η について $\beta_\eta < \alpha_{n+m\eta}$ であり，とくに $\beta_\omega < \alpha_\omega$ となっています．同型写像の性質から $\bar{\beta}_\omega \leq \beta_\omega < \alpha_\omega$ となりますが，これは (Σ, κ)-モデルの一意性に矛盾します．こうして次の定理が証明されました．

定理 3.4.1 ラムゼイ基数が存在するならば，ゼロ・シャープが存在する． ◀

3.5 ゼロ・シャープの存在・不存在から導かれること

まだ書けていません…

参考文献

[1] K. Devlin, CONSTRUCTIBILITY, Springer, (reprint: Cambridge).

[2] T. Jech, SET THEORY, 3rd edition, Springer.

[3] Y.N. Moschovakis, DESCRIPTIVE SET THEORY, 2nd edition, American Mathematical Society.

[4] キューネン (藤田博司 訳)『集合論』日本評論社.