決定公理と $\aleph_1$

ジタさん (fujitapiroc1964@twitter)

2019 年 12 月 11 日

はじめに

Alwe さんの企画なさった Mathematical Logic Advent Calendar 2019[*1]の 11 日目の記事として，決定公理のこと，とくに決定公理から最小の不可算基数 $\aleph_1$ が可測基数になることの証明を書きます．この記事は 2012 年 10 月に「て日々」[*2]に書いたものを修正・補足したものです．決定公理については，今回の Advent Calendar ではこの他に，でぃぐさんの記事が 5 日，ウッ鵜さんの記事が 9 日，安田さんの記事が 19 日に載る予定です．そんなわけで，わたくしのこの記事なんか，なくもがなの感じですが，よろしければおつきあいください．

1　て日々 2012 年 10 月 2 日

1.1　完全情報 2 人ゲームと決定公理

さてさて，昨日の話の流れからいって，決定公理 AD から $\aleph_1$ が可測基数であることが導かれることを証明せにゃならん．いやその前に，そもそも決定公理とはなにか説明しよう．

0 を含む自然数全体の集合を ω と書き，自然数の無限列全体の集合を ω から ω への函数の全体という意味で ${}^\omega\omega$ と書く．で，二人の人が交互に自然数を言いあうゲームをしている：

$$\begin{array}{lcccccccc} (\text{先手}) & a_0 & & a_2 & & a_4 & & \cdots \\ (\text{後手}) & & a_1 & & a_3 & & a_5 & \cdots \end{array}$$

こんな調子でずっと続けていくと，自然数の無限列

$$\vec{a} = (a_0, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}, \cdots) \in {}^\omega\omega$$

が一つ定まることになる．あらかじめ ${}^\omega\omega$ の部分集合 A を指定しておけば，結果の無限列 $\vec{a}$ が集合 A に入れば先手の勝ち，入らなければ後手の勝ち，というルールのゲームができる．勝敗条件である集合 A と，各時点でのそれまでの両者の動きがすべて公開されている．この種のゲームを「集合 ω 上の完全情報 2 人ゲーム」と呼ぶ．

---

*1 https://adventar.org/calendars/4015

*2 https://tenasaku.com/tenasaku/tepipi/

たとえば A として $a_0 = 0$ をみたす列の全体が指定されれば，先手が最初に 0 を言えばいいから先手必勝だ．A として $a_0 = a_1$ をみたす列の全体が指定されれば，後手が先手の a_0 と同じ数を a_1 として出せばいいので，後手必勝である．もうちょっと難しい例として，A が可算集合だった場合，その要素を一列にリストして対角線論法の要領で可能性を潰していけば後手が勝てる．同様の理由で A の補集合が可算だった場合は先手必勝である．

さて，決定公理は，あらゆる $A \subset {}^\omega\omega$ について，こうして定義されたゲームには先手か後手のどちらかの必勝法が必ずあると主張する．

必勝法の定式化はこうだ．自然数の有限列全体の集合を Seq と書く．**作戦** (strategy) とは函数 $\sigma\colon \mathrm{Seq} \to \omega$ のことだとする．作戦 σ と無限列 $f\colon \omega \to \omega$ が与えられれば，後手が $f(0), f(1), f(2), \ldots$ を順に言い，先手は作戦 σ のとおりに応戦してできる対局が考えられる．すなわち無限列 $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ で，$a_{2n+1} = f(n)$ であり $a_{2n} = \sigma(\langle a_0, \ldots, a_{2n-1}\rangle)$ であるようなものが定まる．この列 $\vec{a} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ を $\sigma * [f]$ と書こう．同様に，先手が $f(0), f(1), f(2), \ldots$ を順に言い後手が作戦 σ のとおりに応戦してできる対局の結果を $[f] * \sigma$ と書こう．

作戦 σ がすべての無限列 f に対して $\sigma * [f] \in A$ をみたすとき，σ は先手の **必勝法** (winning strategy) であるという．またすべての無限列 f に対して $[f] * \sigma \notin A$ となるなら，作戦 σ は後手の必勝法である．先手と後手の両方の必勝法が同時に存在しないことは明らかだけれど，与えられた集合 $A \subset {}^\omega\omega$ に対して，先手か後手のどちらかの必勝法が存在するということは，まったく自明ではない．決定公理は，それが「必ずある」と主張する．これが決定公理 AD (Axiom of Determinacy) である．

1.2 決定公理と実解析

選択公理 AC を用いれば，先手にも後手にも必勝法がないような $A \subset {}^\omega\omega$ の存在を証明することができる．作戦全体の集合を整列させて超限再帰的に対角線論法を用いればいいのだ．つまり AD は AC とは相容れない．

選択公理 AC が数学においてどれだけ有用であるかを思うと，それと相容れない決定公理 AD の出る幕はないように思える．ところが，AD はもともと ${}^\omega\omega$ の部分集合にかんする命題である．${}^\omega\omega$ は連分数展開を通じて正の無理数全体の集合と一対一に対応するため，決定公理は実数の集合にかんする命題とみなすことができる．だから，いわゆる実解析の領域に話を限ると，選択公理とは相容れないが有用で興味深い，いろいろな命題が決定公理から導かれる．

そのような例を紹介しよう．閉区間 $[0, 1]$ に含まれる，両端が有理数であるような閉区間全体の集合は，可算集合である．そこで，先手は $[0, 1]$ に含まれる有理閉区間を言い，後手はそれに答えて「左」または「右」と答える，という問答も，ω の要素を言いあうゲームの形で表現できる．

(先手)	I_0		I_2		I_4		$\cdots$
(後手)		I_1		I_3		I_5	$\cdots$

ここで，I_0，I_1 等々は $[0, 1]$ に含まれる有理閉区間である．後手の選ぶ I_{2n+1} はその直前に先手が言った I_{2n} を中点で分割した左右半分のどちらかでなければならない．先手の選ぶ I_{2n} はその直前に後手が言った I_{2n-1} に含まれなければならない．このルールを破ったプレイヤーは判定負けになるものとしよう．先手後手ともに

ルールを守って対局が済めば，縮小閉区間列

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \cdots I_n \supset \cdots$$

が得られる．ここで，後手が毎度毎度区間を半分に分けていることからわかるとおり，区間 I_n の幅はゼロに近づくから，これらに共通に含まれる実数 x がただひとつ存在する:

$$\{x\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n \, .$$

先手と後手が区間の縮小と分割によって指定した実数 x が，あらかじめ定められた集合 $E \subset [0,1]$ に属すれば先手の勝ち，属しなければ後手の勝ちというゲームを考えよう．これを $G^*(E)$ と表現する[*3]．

これとよく似たゲーム $G^{**}(E)$ では，$G^*(E)$ と同様に $[0,1]$ に含まれる有理閉区間を選んでいくのだが，今度は後手は，先手の選んだ区間の左右の半分を選ぶという制限を緩めて，先手と同様に後手も，相手が直前に選んだ区間に含まれる有理閉区間を選べばよいというルールに変更する．すると，縮小閉区間列の共通部分は一点にまで縮む保証はないが空にはならないので，その共通部分が集合 E の要素を含めば先手の勝ち，そうでなければ後手の勝ち，というゲームを考える．これが $G^{**}(E)$ である[*4]．

証明は略すが，これらについて次の定理が成立する:

定理 1.2.1 (M. デイヴィス)　$E \subset [0,1]$ とする．(1) ゲーム $G^*(E)$ が先手必勝であるための必要十分条件は，E がカントール空間 ${}^{\omega}2$ と同相な部分集合を含むことである．(2) ゲーム $G^*(E)$ が後手必勝であるための必要十分条件は，E が可算集合であることである．◀

定理 1.2.2 (バナッハ，マズール)　$E \subset [0,1]$ とする．(1) ゲーム $G^{**}(E)$ が先手必勝であるための必要十分条件は，ある区間 I_0 に対して $I_0 \setminus E$ がベールの第一類集合となることである．(2) ゲーム $G^{**}(E)$ が後手必勝であるための必要十分条件は，E がベールの第一類集合であることである．◀

したがって《実数の任意の集合はベールの性質をもち，また可算でなければ連続体濃度を有する》ということが決定公理 AD から導かれるわけだ．

また，AD は選択公理 AC と相容れないけれども，実解析学を展開するにあたって有用な次のような弱い選択公理 $\mathrm{AC}_\omega(\mathbb{R})$ が AD から導かれる:

> $\mathbf{AC}_\omega(\mathbb{R})$: 実数の空でない集合の列 A_0，A_1，$\ldots$，$A_n, \ldots$ が与えられれば，数列 $\{x_n\}_{n\in\omega}$ を
>
> $$x_n \in A_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$
>
> となるようにとれる．

決定公理から $\mathrm{AC}_\omega(\mathbb{R})$ を導く証明はやはりゲームを使いる．まずゼロ手目に先手が番号 n を指定し，それ以後の先手の動きは勝敗には関係なくて，後手が自然数の無限列を選び，10 進展開なり何なり，あらかじめ定められたしかるべき方法でその無限列が A_n の要素をあらわしているなら後手の勝ち，というルールだ．どの

[*3] (2019 年 12 月 9 日) ゲーム G^* はデイヴィスのゲームとも呼ばれる．この Mathematical Logic Advent Calendar 2019 でも，関連する記事がでぃぐさん (`fujidig@twiter`) によって 12 月 5 日に書かれている．

[*4] (2019 年 12 月 9 日) ゲーム G^{**} はバナッハ-マズールのゲームとも呼ばれる．この Mathematical Logic Advent Calendar 2019 では，関連する記事が `y.` さん (`waidotto@twiter`) によって 12 月 12 日に書かれる予定である．

A_n も空ではないのだから先手に必勝法がないのはあたりまえだ．いっぽう，後手の必勝法があるとすれば，それは先手の言う n をみて A_n の要素を作る作戦になっているはずだから，まさしく A_n からの選択函数になっている．

この弱い選択公理 $\mathrm{AC}_\omega(\mathbb{R})$ は，弱いといってもなかなか強力で，おかげで

- 実函数の連続性の，点列による定義と ε-δ による定義の同値性
- ルベーグ測度の可算加法性
- 最小の不可算順序数 ω_1 の正則性

といった実解析で有用ないろいろな命題が保証されることになる．

長くなってきたから今日はここまで．続きはまた改めて．

1.3 と言ってしまったけど，あと少し

さきほど「実解析で有用ないろいろな命題」といって挙げたのは $\mathrm{AC}_\omega(\mathbb{R})$ からの帰結で，(選択公理を含む) 通常の数学で得られるものだ．ルベーグ積分論を含む実解析の基本的なところはこのように選択公理を $\mathrm{AC}_\omega(\mathbb{R})$ に弱めた集合論で展開できる．さらに決定公理 AD を用いることで

- 実数のすべての集合がルベーグ可測である．
- 数列空間 ℓ^∞ 上のすべての線形汎関数は弱連続であり，ℓ^1 は回帰的である．

といった，AC のもとでは成立しない（したがって「通常の数学」とは少し様子の異なる）さまざまな結果が導かれる．

そこで， AC の代わりに AD を採用した実解析を考えようという提案がなされたこともある*5．しかしながら，具体的な函数方程式をめぐる結果にまでその影響が及んだという話は聞かない．そして実解析への AD の影響の大部分は Solovay のモデルにおいて得られるものと一致する．むしろそうした現象のほうに，すなわち，いろいろな公理の変更にも関わらず理論のコアになるべき部分が不変であるという事態のほうにこそ，数理論理学的な分析の目が向けられるべきであり，その意味では AC と AD のどちらを正しい公理とするかなんてことは，もはや問題にならない．

2 て日々 2012 年 10 月 3 日

決定公理 AD から $\aleph_1$ が可測基数であることを導くという話をしているところなのだけど，きょうはいったんチューリング次数の話に寄り道する．

2.1 自然数の関数の計算可能性

ゼロを含む自然数全体の集合を ω と書き，自然数の無限列全体の集合を ω から ω への函数の全体という意味で ${}^\omega\omega$ と書く．あ，いかん．これでは書き出しが昨日と同じじゃないか．

自然数の集合全体，すなわち ω の部分集合全体の集合は $\mathcal{P}(\omega)$ と書かれる．$\mathcal{P}$ は Power の意味で，$\mathcal{P}(\omega)$ を ω の **冪集合** (powerset) という．

*5 たとえば文献 [1] など．さらにその歴史的背景については [4] など．

自然数の集合 $A \in \mathcal{P}(\omega)$ が **計算可能** (computable) であるということを，自然数 $n \in \omega$ を入力として受けとったら $n \in A$ か $n \notin A$ かを判定して出力してくれるコンピュータのプログラムが存在すること，と定義する．また，自然数の函数 $f\colon \omega \to \omega$ が計算可能であるということを，自然数 $n \in \omega$ を入力として受けとって自然数 $f(n)$ を出力してくれるコンピュータのプログラムが存在すること，と定義する．多項関係 $R \subset \omega^r$ や多変数函数 $f\colon \omega^r \to \omega$ についても，同様に計算可能性を定義できる．

「コンピュータのプログラム」と言ったが，コンピュータの言語で何が書けるかは処理系に依存する面があってはっきりしないように思われるかもしれない．実はそうでもないのだが，そのことを話し出すと長くなる．ここは以下のような大雑把な説明で勘弁してもらおう．

ひとまず，整数のデータ型だけを扱い `if` とか `while` のような標準的な制御構造をもち，算術演算として `+` と `-` と `*` をもち，比較演算として `==` と `!=` と `<` と `<=` と `>` と `>=`，論理演算として `&&` と `||` と `!` をもつ，小規模な手続型言語を考える．CPU の処理速度や演算のワード長やメモリ容量などの物理的制約は考えに入れず，この言語でプログラムが書けるような函数や集合を「計算可能」と定義してしまう．こんなオモチャみたいな言語では何もできないようだが，プログラムできる／できないだけを問題にするかぎり，現実のコンピュータで計算できてこの言語で計算できない函数や集合は存在しない．

プログラムの例を示す．偶数全体の集合は計算可能である．次のようにプログラムすればいい

```
function isEven(n) {
// n が偶数かどうか判定する
  if ( n < 0 ) {
    n = - n;
  }
  i = 0;
  while (i*2 < n) {
    i = i + 1;
  }
  if ( n == i*2 ) {
    return TRUE; // あらかじめ定義された「真」をあらわす定数を返す
  } else {
    return FALSE; // あらかじめ定義された「偽」をあらわす定数を返す
  }
}
```

現実のマイクロコンピュータでも，たとえば Z80CPU などは掛け算のインストラクションをもっていない．しかし，整数の掛け算と割り算は足し算と引き算と論理演算をつかってプログラムできる．しかし，今回の言語では掛け算だけ組込みにしてある．これを使って自然数を自然数で割った余りを返すプログラムを書いたら次のようになるだろう．

```
function remain(x,y) {
// 整数 x を 整数 |y| で割った余りを返す
  if ( y == 0 ) {
    ...  なにがしかのエラー処理 ...
  }
  if ( y < 0 ) {
    y = -y ;
  }
  while ( x < 0 ) {
    x = x + y ;
  }
  while ( x >= y ) {
    x = x - y;
  }
  return x;
```

```
}
```

したがって，割り算の剰余を返す函数は計算可能である．

素数全体の集合も計算可能である．次のプログラムはものすごく効率が悪いが，そのことはプログラムが存在して後の問題であるからここでは気にしない．

```
function isPrime(n) {
// n が素数かどうか判定する
  if ( n < 0 ) {
    n = - n;
  }
  i = 1;
  j = TRUE;
  while (i*i < n) {
    if ( remain(n,i) == 0 ) { // 函数 remain() はさっき定義したもの
      j = FALSE;
      break;
    } else {
      i = i + 1;
    }
  }
return j;
}
```

まあ，このような調子で，整数にかんするいろいろの概念や函数についてプログラムが書けることになる．とはいえ，プログラムというものは所詮は記号の有限列であるから全部で可算無限個しかない．いっぽう，自然数の集合全体 $\mathcal{P}(\omega)$ は可算でない．ということは，自然数の計算可能でない集合が存在することになる[*6]．

2.2 チューリング次数とは

話はここからだ．自然数の集合が，計算可能でないとしても，いったい《どの程度計算不可能か》ということを考えるために，さきほどのプログラム言語の仕様をすこし拡張する．

現実のプログラミングの世界では，計算できないデータがあるなんてことはあたりまえのことだ．たとえば，ワープロソフトのユーザがそのソフトで何を書こうとしているかを，ソフトの開発者が前もって知っているなんてことはありえない．オペレーティングシステムの開発者はどんなアプリケーションがそのシステムで稼動するか予知しているわけではないが，それでもアプリケーションとのインターフェイス (API) を設計しなければならない．

プログラムを書いている段階で詳細のわからないデータは，別ファイルで用意して実行時に読みこんだり，必要に応じてネットワークを介してサーバに問い合わせたりする．そうした場合，ソフトウェアの開発者にもエンドユーザにも，それら外部データの全容はわからない．わかっているくらいなら問い合せない．

要するに，数学以外の世界では，プログラムは必要に応じて外部に接続してデータを問い合わせながら動いているわけだ．

自然数の集合や函数を計算する我々のプログラミング言語も，外部のデータを取り込めるよう拡張しよう．プログラムの途中で外部のデータベースにアクセスして，与えられた集合 $B \in \mathcal{P}(\omega)$ に自然数 $x \in \omega$ が属するかどうかを教えてもらえることにする．つまり，与えられた集合 B に x が属しているか否かに応じて `TRUE` または `FALSE` を返す組込み函数

[*6] (2019 年 12 月 8 日) 自然数の計算可能でない集合の存在を言うのに $\mathcal{P}(\omega)$ の不可算性を持ち出したのは，いまにして思えば悪手であった．クリーネの K のように，もっと具体的な集合を指名することは可能だ．とはいえ，本題に入る前にあまり長い話をするわけにもいかない．この話はまた改めて．

$$\texttt{query}(x)$$

が用意されているものとする．ただし，個別の数値についてその都度「属する」「属さない」を教えてもらえるだけで，実行時に与えられるのがどんな集合か，プログラムの側で指定することはできない．また，与えられた集合が全体としてどんなものであるかは，プログラムの内部からはわからない．この，聞けば答えてくれるがその全容はわからない外部のデータベースとしての集合 B のことを，**ご神託** (oracle) という．

さて，自然数の集合 A が《集合 B から計算可能》ということを，《集合 B をご神託として接続しておくことにより，自然数 n を受けとって $n \in A$ か $n \notin A$ かを判定して出力してくれる，ご神託つきプログラムが存在する》という意味だと定義しよう．函数や関係の B からの計算可能性についても同様に定義する．

たとえば，どの集合 A も A 自身から計算可能である．なぜなら，A そのものをご神託にしてしまえば `query(`x`)` 一行だけのプログラムで A に属するかどうかは判定できるから．また x が入力されたら `!query(`x`)` を返すプログラムを考えれば，A はその補集合 $\omega \setminus A$ から計算可能でもある．

もともとの意味で計算可能な集合はどんな B からでも計算可能だし，空集合 $\emptyset$ から計算可能な集合というのは，`query(`x`)` の部分をすべて定数 `FALSE` に書き替えたプログラムで計算可能なんだから，もともとの意味で計算可能である．

やっとこさ，きょうの話で一番大切な定義:

定義 2.2.1 自然数の集合 A が自然数の集合 B から計算可能であるとき

$$A \leq_{\mathrm{T}} B$$

と書く．この式を，A は B に **チューリング帰着可能** (Turing reducible) と読む．また $A \leq_{\mathrm{T}} B$ かつ $B \leq_{\mathrm{T}} A$ であるとき

$$A \equiv_{\mathrm{T}} B$$

と書いて，A は B と **チューリング同値** (Turing equivalent) と読む． ◀

こうして $\mathcal{P}(\omega)$ 上に関係 $\leq_{\mathrm{T}}$ と $\equiv_{\mathrm{T}}$ が定義された．すぐにわかるとおり，$\leq_{\mathrm{T}}$ は反射的（すべての A について $A \leq_{\mathrm{T}} A$）かつ推移的（$A \leq_{\mathrm{T}} B$ かつ $B \leq_{\mathrm{T}} C$ のとき $A \leq_{\mathrm{T}} C$）である．そこで $\equiv_{\mathrm{T}}$ は反射的・推移的かつ対称となり，$\mathcal{P}(\omega)$ 上の同値関係になる．

定義 2.2.2 商集合 $\mathcal{P}(\omega)/\equiv_{\mathrm{T}}$ を $\mathcal{D}$ と書く．集合 $A \in \mathcal{P}(\omega)$ の同値類を $\deg(A)$ と書いて A の **チューリング次数** (Turing degree) と呼ぶ． ◀

チューリング次数の集合 $\mathcal{D}$ には $\leq_{\mathrm{T}}$ によって自然に半順序づけが導入される．計算可能性理論 (Computability Theory) においてはこの半順序集合の構造そのものが大きな興味の対象になっている．

なお，函数や関係についても，それらのグラフをあらわす自然数の集合に変換することでご神託として利用できる．たとえば函数 $f\colon \omega \to \omega$ に対して集合

$$B_f = \left\{ 2^n \cdot (2 \cdot f(n) + 1) \,:\, n \in \omega \right\}$$

を対応させておけば，$f(n)$ の値は B_f をご神託として $2^n(2k+1) \in B_f$ となる k を小さい順に探していけば見つかるし，逆に，n が与えられるごとに $f(n)$ の値がわかる仕掛けが存在するならば，自然数 x が B_f に属するかどうかは $x = 2^n(2k+1)$ をみたす n と k について $k = f(n)$ となるかどうかを判断すればいいので

計算できる．この意味で集合 B_f と函数 f は計算可能性の意味で同等だと考えられる．そこで $A \leq_{\mathrm{T}} f$ という式や $\deg(f)$ といった次数がそれぞれ $A \leq_{\mathrm{T}} B_f$ とか $\deg(B_f)$ のこととして，意味をもつことになる．Seq 上の函数として定義された「作戦」についても同様である．

で，このチューリング次数の話が決定公理の話とどうつながるか．それに $\aleph_1$ が可測基数という巨大基数の条件をみたすことに，なんでチューリング次数が関係するのか．

本当のことを言えば AD のもとで $\aleph_1$ が可測基数になることの証明にチューリング次数を使うというのは「そうやれば，チューリング次数のことを知っている人には簡単だよ」というだけで，$\aleph_1$ の可測性という事態の本質に迫るものではないかもしれない．

にもかかわらず，こうして長々とチューリング次数について書いている理由は，ひとつには，これまでもこの「て日々」で何度かチューリング次数 (や，その類似である hyperdegree) が話題になっており，これから先そういう機会が増える気がしていること．一度はきちんと説明しておくべきだという理由である．それに，このあと述べる「チューリング次数の決定性」は，$\aleph_1$ が可測基数であることの証明に使われるだけでなく，それ自身が AD の応用として重要だという理由もある．なので，もう少し我慢してつきあってください．

2.3 決定公理とチューリング次数

以下ではチューリング次数を太字のラテン小文字 $\mathbf{a}$，$\mathbf{b}$，$\mathbf{c}$，等々であらわすことにする．とくに計算可能な集合のチューリング次数 $\deg(\emptyset)$ を $\mathbf{o}$ と書く．

次数 $\mathbf{a}$ に対して $\mathbf{a}$ を頂点とする **チューリング次数の錐** $\mathcal{D}_{\mathbf{a}}$ を

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{D} : \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \right\}$$

によって定義しよう．どの錐 $\mathcal{D}_{\mathbf{a}}$ も不可算無限個の次数を含む．また，ふたつの次数 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ に対して，その共通の上界 $\mathbf{c}$ をとれば，

$$\mathcal{D}_{\mathbf{c}} \subset \mathcal{D}_{\mathbf{a}} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{b}}$$

となるから，どの二つの錐の共通部分も不可算集合になっている．ここで $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の共通の上界を作るには $\mathbf{a} = \deg(A)$，$\mathbf{b} = \deg(B)$ という集合 $A, B \subset \omega$ をとって

$$A \oplus B = \left\{ 2n : n \in A \right\} \cup \left\{ 2n+1 : n \in B \right\}$$

とおいて（これを A と B の計算論的和と呼ぶ）その次数 $\mathbf{c} = \deg(A \oplus B)$ を考えればよい．こうやって決めた $\mathbf{c}$ は，特に $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の最小上界 $\mathbf{a} \cup \mathbf{b}$ になっている．半順序集合 $\mathcal{D}$ は任意の 2 要素の最小上界が存在する**上半束** (upper semilattice) になる．しかし，2 つの次数 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の最大下界 $\mathbf{a} \cap \mathbf{b}$ は存在しない場合があるので，束にはならない．ともあれ，任意の 2 つのチューリング次数 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ について

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{b}} = \mathcal{D}_{\mathbf{a} \cup \mathbf{b}}$$

が成立する．したがって，有限個の錐の共通部分はふたたび錐になる．

そして， AD の重要な帰結であるチューリング次数の決定性というのは，次の命題である．

定理 2.3.1 AD を仮定する． チューリング次数の任意の集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ に対して，$\mathcal{D}_{\mathbf{a}} \subset \mathcal{A}$ をみたす次数 $\mathbf{a}$ か $\mathcal{D}_{\mathbf{b}} \cap \mathcal{A} = \emptyset$ をみたす次数 $\mathbf{b}$ の，いずれか一方が，かならず存在する． ◀

二つの錐は必ず共通要素をもつので，そのような $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は共存できない．すなわち存在するとしてもどちらか一方しか存在できない．少なくとも一方が存在する，というのが，チューリング次数の決定性である．

定理 2.3.1 の証明をする．チューリング次数の集合 $\mathcal{A}$ が与えられたとする．次のようなゲームを考えよう．先手と後手が交互に自然数を言いあって，自然数の無限列を作る

$$\begin{array}{lcccccccc} (\text{先手}) & a_0 & & a_2 & & a_4 & & \cdots \\ (\text{後手}) & & a_1 & & a_3 & & a_5 & \cdots \end{array}$$

すると $f(n) = a_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ として函数 $f \colon \omega \to \omega$ が定まる．もしも $\deg(f) \in \mathcal{A}$ ならば先手の勝ち，$\deg(f) \notin \mathcal{A}$ ならば後手の勝ちとしよう．このゲームを $G(\mathcal{A})$ と表記しよう．

決定公理により，ゲーム $G(\mathcal{A})$ には先手の必勝法または後手の必勝法がある．

先手の必勝法 σ が存在した場合を考える．$\mathbf{a} = \deg(\sigma)$ としよう．このとき $\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$ をみたすすべての次数 $\mathbf{x}$ が $\mathcal{A}$ に属する．そのことの証明: $\mathbf{x} \geq \mathbf{a}$ であったとして， $\mathbf{x} = \deg(B)$ となる B をとろう．仮定により先手の必勝法 σ は集合 B から計算可能である．そこで

$$a_1 < a_3 < a_5 < \cdots < a_{2n+1} < \cdots$$

を B の要素の数えあげとして，後手にこのとおりに a_{2n+1} を選ばせ，先手に必勝法 σ のとおりに応じさせたとしよう．無限列 $\langle a_{2n+1} : n \in \omega \rangle$ も σ も B から計算可能であることにより，対局の結果として得られる $f = \sigma * [\langle a_{2n+1} : n \in \omega \rangle]$ も B から計算可能である: $f \leq_{\mathrm{T}} B$．ところが作り方から $B = \{\, f(2n{+}1) \ : \ n \in \omega \}$ なのだから，B は f から計算可能である: $B \leq_{\mathrm{T}} f$．こうして，$\mathbf{x} = \deg(B) = \deg(f)$ となるが，σ が先手の必勝法であったことから，$\deg(f) \in \mathcal{A}$ である．したがって $\mathbf{x} \in \mathcal{A}$ となる．

こうして，ゲーム $G(\mathcal{A})$ に先手の必勝法がある場合には $\mathcal{D}_{\mathbf{a}} \subset \mathcal{A}$ をみたす次数 $\mathbf{a}$ が存在することになる．

ゲーム $G(\mathcal{A})$ に後手の必勝法 τ がある場合，$\mathbf{b} = \deg(\tau)$ とし，上の議論で先手と後手の役割を交換して同様に議論すれば， $\mathcal{D}_{\mathbf{b}} \cap \mathcal{A} = \emptyset$ となることがわかる．これで定理 2.3.1 が証明できた．

さてさて，このチューリング次数の決定性から $\aleph_1$ が可測基数であることの証明をしようとすれば，さらに「計算可能な整列順序」の話をしないといけない．明日はその話をして，いよいよ証明を完結させよう．

3　て日々 2012 年 10 月 4 日

決定公理 AD から $\aleph_1$ が可測基数であることを導く．この話も今日が三日目．そろそろケリをつけなくちゃ．

3.1　超フィルターと可測基数

念のために，可測基数の定義を復習する．空でない集合 S の部分集合の集合 $\mathbb{F}$ が次の条件をみたしていたとしよう．

(i) $S \in \mathbb{F}$ であり $\emptyset \notin \mathbb{F}$ である．
(ii) $A \in \mathbb{F}$ かつ $A \subset B \subset S$ のとき $B \in \mathbb{F}$ である．
(iii) $A \in \mathbb{F}$ かつ $B \in \mathbb{F}$ のとき $A \cap B \in \mathbb{F}$ である．

この条件をみたす集合族 $\mathbb{F}$ のことを S 上の **フィルター** (filter) という．フィルターは，集合 S の要素のうち “ほとんど全部” という曖昧な表現に意味を与えるもの，と考えられる．S の要素 x にかんする命題 $\mathrm{P}(x)$

が《ほとんどすべての x について成立する》ということを，

$$\{\, x \in S : \mathrm{P}(x) \,\} \in \mathbb{F}$$

と解釈しようじゃないか，というのがフィルターの使い道というわけだ．

集合 S 上のフィルター $\mathbb{F}$ が **超フィルター** (ultrafilter) であるというのは，それが追加の条件

どの $A \subset S$ についても $A \in \mathbb{F}$ または $S \setminus A \in \mathbb{F}$ が成立．

をみたすことをいう．

なにか S の空でない部分集合 S_0 があったとき，

$$\{\, A \subset S : S_0 \subset A \,\}$$

は S 上のフィルターである．この形のフィルターを，集合 S_0 の生成する **単項フィルター** (principal filter) という．それ以外のフィルターを **非単項フィルター** (nonprincipal filter) という．単要素集合 $\{x_0\}$ の生成する単項フィルターは超フィルターである．

フィルターの条件 (iii) により，フィルターの有限個のメンバーの共通部分がまたそのフィルターのメンバーになることがわかる．この性質を，無限個のメンバーにまで延長できる場合がある．κ を無限基数としよう．集合 S 上のフィルター $\mathbb{F}$ が **κ-完備** であるとは，κ 個未満のメンバーの共通部分をとる操作のもとで閉じていることをいう．すなわち

$$|I| < \kappa,\ (\forall i \in I)\big[\, A_i \in \mathbb{F} \,\big] \implies \bigcap_{i \in I} A_i \in \mathbb{F}$$

となることをいう．定義により，すべてのフィルターは $\aleph_0$-完備である．非単項フィルター $\mathbb{F}$ は $\kappa > \big|\mathbb{F}\big|$ のとき κ-非完備であるから，濃度 κ に制限のない κ-完備フィルターは単項フィルターだけである．

定義 3.1.1 濃度 κ の集合 S 上に 非単項 κ-完備 超フィルターが存在するとき，κ を可測基数と呼ぶ． ◀

歴史的には，可測基数の概念は測度問題の研究から析出されてきたものである．このことについてはイェックの [2] やカナモリの本で触れられているとおりだ．カナモリ本の訳書 [3] を別にして，日本語でこのあたりのことを詳しく書いた本はあるのだろうか．いずれきちんと書いてやらねばらなんと思っている．

さて，可測基数の第一の特徴は，それが「巨大だ」ということ．選択公理 AC のもとでは，可測基数 κ は到達不能基数であり，またそれより小さい κ 個の到達不能基数が存在する．だから，これから証明しようとしている《 $\aleph_1$ が可測基数である》という命題は，選択公理を含む通常の集合論においてはナンセンスである．

決定公理 AD のもとで $\aleph_1$ が可測基数になったとすると，選択公理を含む集合論の内部モデルで，そこでは真の $\aleph_1$ がとんでもない巨大基数になっているようなものが存在することになる．このように，決定公理は実数の集合にかんする命題だが，巨大基数公理 (の無矛盾性) を含意する．先に紹介したカナモリの本のテーマの一つに，決定公理の強さが巨大基数公理の階層のなかで正しく見積られるようになるまでのプロセスの概説がある．

3.2 チューリング次数の錐のなすフィルター

話をフィルターに戻す．

定理 3.2.1 $\mathrm{AC}_\omega(\mathbb{R})$ を仮定する．チューリング次数の全体 $\mathcal{D}$ の部分集合の集合 $\mathbb{F}$ を

$$\mathbb{F} = \Big\{ \mathcal{A} \subset \mathcal{D} : \exists \mathbf{a} \in \mathcal{D}\big(\mathcal{D}_{\mathbf{a}} \subset \mathcal{A} \big) \Big\}$$

と定義すれば，この $\mathbb{F}$ は $\mathcal{D}$ 上の非単項 $\aleph_1$-完備フィルターである．さらに，決定公理 AD のもとではこの $\mathbb{F}$ は超フィルターである．

まず $\mathbb{F}$ がフィルターの条件 (i) と (ii) をみたすことは明らかとしてよいであろう．また，チューリング次数の錐については昨日触れたように等式

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}} \cap \mathcal{D}_{\mathbf{b}} = \mathcal{D}_{\mathbf{a}\cup\mathbf{b}}$$

が成立するので，条件 iii も成立する．どのチューリング次数 $\mathbf{a}$ に対しても，チューリング次数 $\mathbf{a}'$ を $\mathbf{a} < \mathbf{a}'$ をみたすようにとれて，

$$\mathbf{a} \notin \mathcal{D}_{\mathbf{a}'} \in \mathbb{F}$$

となるため $\bigcap \mathbb{F} = \emptyset$ となる．したがって $\mathbb{F}$ は非単項フィルターである．

ここで $\mathbf{a}'$ の作り方にまで立ち入る余裕はないが，$\mathbf{a}'$ として $\mathbf{a}$ の “チューリング・ジャンプ” というものをとれば $\mathbf{a} < \mathbf{a}'$ となることがわかっている．というよりむしろ，チューリング次数論の文脈で $\mathbf{a}'$ と書いたらまず間違いなく $\mathbf{a}$ のチューリング・ジャンプの意味だと見なされる．

あとは $\mathbb{F}$ の $\aleph_1$-完備性，すなわち可算個のメンバーの共通部分のもとで閉じていることだが，選択公理の使用を $\mathrm{AC}_\omega(\mathbb{R})$ の範囲に留めてそのことの証明をするためには工夫がいる．$\mathbb{F}$ のメンバーの可算列 $\mathcal{A}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ が与えられたとして，次数の列 $\mathbf{a}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ を $\mathcal{D}_{\mathbf{a}_n} \subset \mathcal{A}_n$ となるようにとりました，といったら，見かけ上 $\mathbb{R}$ の部分集合の可算列に制限された $\mathrm{AC}_\omega(\mathbb{R})$ の範囲を越えた選択をしてしまっている．これが本当に可能であることを確かめる必要がある．そのため，$\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合 $\mathbf{A}_n$ を

$$\mathbf{A}_n = \big\{ A \subset \omega : \mathcal{D}_{\deg(A)} \subset \mathcal{A}_n \big\}$$

と定めよう．$\mathcal{A}_n$ は次数の錐を含むのだから $\mathbf{A}_n \neq \emptyset$ である．この列 $\langle \mathbf{A}_n : n \in \omega \rangle$ に $\mathrm{AC}_\omega(\mathbb{R})$ を適用すれば，ω の部分集合の列 $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ を

$$A_n \in \mathbf{A}_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

となるようにとれる．そこで $\mathbf{a}_n = \deg(A_n)$ とおけばよい．とはいえ証明の役に立つのは $\langle \mathbf{a}_n : n \in \omega \rangle$ よりむしろ $\langle A_n : n \in \omega \rangle$ のほうだ．ω の部分集合 B を

$$B = \big\{ 2^n \cdot (2k+1) : k \in A_n \big\}$$

と定め，$\mathbf{b} = \deg(B)$ としよう．すると，各 n ごとに $A_n \leq_{\mathrm{T}} B$ であるから $\mathbf{a}_n \leq \mathbf{b}$ であり，

$$\mathcal{D}_{\mathbf{b}} \subset \bigcap_{n\in\omega} \mathcal{D}_{\mathbf{a}_n} \subset \bigcap_{n\in\omega} \mathcal{A}_n$$

となり $\bigcap_{n\in\omega} \mathcal{A}_n \in \mathbb{F}$ となる．したがって $\mathbb{F}$ は $\aleph_1$-完備である．

最後の AD のもとで $\mathbb{F}$ が超フィルター になることは，昨日証明した定理 2.3.1 からわかる．以上で定理 3.2.1 が証明できた．

3.3　計算可能整列順序と計算可能順序数

あとひと息だ．最後の関所，計算可能順序数の話をしよう．

ω 上の二項関係 R が集合 $B \subset \omega$ から計算可能であるとは，ご神託として集合 B をもちいて，自然数 m と n を入力したら，関係 mRn が成立しているかどうかを判定して出力してくれる，ご神託つきプログラムが存在することをいう．この意味で計算可能な，ω の整列順序づけになっている二項関係を，**B から計算可能な整列順序** という．B から計算可能な整列順序の順序型になっているような順序数のことを，**B から計算可能な順序数** という．ご神託つきプログラムは可算個しかないので，B から計算可能な順序数の全体は可算順序数の可算集合である．その上限は，B から計算可能でない最小の順序数ということになるが，それも可算順序数である[*7]．

定義 3.3.1　集合 $B \subset \omega$ から計算可能でない最小の順序数を ω_1^B と書く．◀

あきらかに，$A \equiv_{\mathrm{T}} B$ のとき $\omega_1^A = \omega_1^B$ である．だから，ω_1^B は B のチューリング次数によって決まる．その意味でチューリング次数 $\mathbf{a}$ に対して $\omega_1^{\mathbf{a}}$ という表記を用いることにしよう．$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ のとき $\omega_1^{\mathbf{a}} \leq \omega_1^{\mathbf{b}}$ ではあるが，$\mathbf{a} < \mathbf{b}$ だからといって $\omega_1^{\mathbf{a}} < \omega_1^{\mathbf{b}}$ になるとは限らない．

可算順序数 $\alpha < \aleph_1$ に対しては，ω 上の順序型 α の整列順序関係 R が存在する．この R について集合 $A \subset \omega$ を

$$A = \left\{\, 2^n \cdot (2m+1) \,:\, mRn \,\right\}$$

と定義すると，R は A から計算可能であるから $\alpha < \omega_1^A$ となる．したがって集合

$$\left\{ \omega_1^{\mathbf{a}} \,:\, \mathbf{a} \in \mathcal{D} \right\}$$

は $\aleph_1$ において共終 (=上に非有界) である．

この集合は $\aleph_1$ の閉非有界 (club) 部分集合を含むが，それ自身は $\aleph_1$ において閉非有界でないことが知られている．

さて，最後に $\aleph_1$ の部分集合の集合 $\mathbb{U}$ を

$$X \in \mathbb{U} \iff \left\{\, \mathbf{x} \in \mathcal{D} \,:\, \omega_1^{\mathbf{x}} \in X \,\right\} \in \mathbb{F}$$

と定義しよう．$\mathbb{F}$ は昨日の話に出てきたチューリング次数の集合 $\mathcal{D}$ 上のフィルターである．定理 3.2.1 により，$\mathbb{U}$ が $\aleph_1$ 上の $\aleph_1$-完備フィルターであることが導かれる．とくに，決定公理 AD のもとでは $\mathbb{U}$ は超フィルターである．

可算順序数 $\alpha < \aleph_1$ に対して $\alpha < \omega_1^{\mathbf{a}}$ となる次数 $\mathbf{a}$ をとれば，

$$\mathcal{D}_{\mathbf{a}} \subset \{\, \mathbf{x} \in \mathcal{D} \,:\, \omega_1^{\mathbf{x}} > \alpha \,\} \in \mathbb{F}$$

であるから

$$\{\, \xi < \aleph_1 \,:\, \xi > \alpha \,\} \in \mathbb{U}$$

となる．したがって $\mathbb{U}$ は可算集合を含まず．とくに非単項フィルターである．こうして，最終目標の定理が証明された．

---

*7 こう書くと，ここで選択公理［$\aleph_1$ の正則性］を使うみたいだが，実際には ω の部分集合の順序型 ω_1^A の整列順序関係をきちんと定義できるので，選択公理は不要だ．だがもちろん，それはそのように書かないとわからないな．

定理 3.3.2 $\mathrm{AC}_\omega(\mathbb{R})$ のもとで，上に定義されたフィルター $\mathbb{U}$ は $\aleph_1$ 上の非単項 $\aleph_1$-完備フィルターである．さらに AD のもとでは，$\mathbb{U}$ は $\aleph_1$ 上の非単項 $\aleph_1$-完備 超フィルターであり，$\aleph_1$ は可測基数である． ◀

なお，この定理はイェックの本 [2] には定理 33.12 の (i) として収録されている．その証明では，チューリング次数の代わりに構成可能性次数（すなわち $A \in L[B]$ なる擬順序関係から導入される順序構造）を用い，ω_1^A の代わりに $\aleph_1^{L[A]}$ を用いている．それはイェックの本の文脈においては適切な改変だが，ここでその証明を再現しようとしても，やっぱり同じくらい長々と説明することになっただろうと思う．

ともあれ，三日がかりの長い証明におつきあいくださってありがとうございました．

参考文献

[1] Jan Mycielski and Hugo Steinhaus, “A mathematical axiom contradicting the axiom of choice,” Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 10 (1962) 1–3.

[2] Thomas Jech, Set Theory — the third millenium edition, Springer-Verlag 2003

[3] A. カナモリ著，渕野昌訳『巨大基数の集合論』(シュプリンガー)

[4] 志賀浩二『無限からの光芒 —— ポーランド学派の数学者たち』(日本評論社)