連続体仮説に関するエルデシュの古い定理について

ジタさん (fujitapiroc1964@twitter)

2022 年 12 月 5 日

はじめに

おるうぇさん (Alwe_Logic@twitter) の企画なさった数理論理学アドヴェント・カレンダー[*1]に寄稿するために古いノート ([3]) を再構成したものです.[*2] 連続体仮説と同値であることがポール・エルデシュ (Paul Erdős) によって証明されたある命題を, 記述集合論的観点から見直します. 細かい議論をすべて追うには文献 [4] や [6] などで展開された議論が予備知識として必要になりますが, エルデシュの定理そのものの証明はあまり予備知識を必要としないように書きます. 関連する諸結果についても, 主張の内容を把握するのに必要な知識はなるべく与えようと思います.

主な結果を述べるために必要な定義だけ大急ぎで済ませましょう. 複素数平面 $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数全体の集合を $\mathcal{H}$ と書きます. 正則関数の集合 $A \subseteq \mathcal{H}$ と複素数 $z \in \mathbb{C}$ に対して

$$A(z) = \{\, f(z) : f \in A \,\}$$

と定義しましょう. すべての $z \in \mathbb{C}$ について $A(z)$ が高々可算集合になるとき, 正則関数の集合 A は性質 P_0 をもつということにします.

もしも集合 $A \subseteq \mathcal{H}$ 自身が高々可算集合であれば, A が性質 P_0 をもつことは明らかです. では不可算な A が性質 P_0 をもつことはあるでしょうか. エルデシュはこの問題について次のことを証明しました. (連続体仮説については第 1 節で説明します.)

定理 0 (文献 [2]) 性質 P_0 をもつ不可算な集合の存在は, 連続体仮説と同値である.

本稿の目的は, まずこの定理の証明を詳しく紹介し, さらに, 記述集合論の観点から考察を加えて次の 3 つの定理を証明することにあります. (用語の説明は第 3 節以降でします.)

定理 1 不可算な $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ 集合は性質 P_0 をもたない. とくに不可算なボレル集合は性質 P_0 をもたない.

定理 2 性質 P_0 をもつ不可算な $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 集合が存在するならば, ある実数 $r \subseteq \omega$ が存在して, すべての実数が r に相対的に構成可能的である. すなわち $\mathbb{R} \subseteq \mathbf{L}(r)$ が成立する.

[*1] https://adventar.org/calendars/7465

[*2] 原文に書いたことはひととおりこちらにも書きました. なので原文を参照する必要はないと思いますが, あちらには必要最小限のことだけ書いているので, 今回のこの文章がまどろっこしいと思う人には原文のほうがいいかもしれません.

定理 3 ある実数 $r \subseteq \omega$ が存在して, すべての実数が r に相対的に構成可能的であるならば, 性質 P_0 をもつ不可算な $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合が存在する.

このあとの各節の内容を説明しましょう. 第 1 節で順序数と連続体仮説について説明したあと, 第 2 節でエルデシュの定理 0 の証明をやや詳しいめに解説します. ここは, 複素関数論の基本と超限帰納法の知識があれば読めることでしょう. それ以後の節はフジタが言いたいことを好き放題にしゃべった結果として, わかりやすさとは無縁のものになっていますが, ともあれ, 第 3 節で複素平面全域で正則な関数の全体 $\mathcal{H}$ が自然にポーランド空間 (完備可分距離空間) とみなせることを示し, 第 4 節で定理 1〜3 のステートメントを理解するために必要な射影集合まわりの定義を与えます. 第 5 節で定理 1 を証明し, 次の第 6 節では定理 2〜3 の証明に関連して構成可能的集合の宇宙についての最小限度の定義の説明をしています. 残る 2 つの節で定理 2 と定理 3 の証明をそれぞれ与えています.

妙に長いわりに粗雑なドキュメントになってしまったことについてはゴメンナサイと言うほかありませんが, 楽しんでいただければ幸いです.

1 順序数と連続体仮説

順序数と連続体仮説について説明します. 整列集合の概念は知っているものとします.

集合 x のすべての要素が x の部分集合でもあるとき, x は推移的集合と呼ばれます. たとえば空集合 $\emptyset$ は推移的集合です. 推移的集合ばかりからなる集合族の合併も共通部分もまた推移的集合になります. 推移的集合 x が要素所属関係 $\in$ のもとで整列集合になっているとき, x は順序数と呼ばれます.

たとえば空集合 $\emptyset$ は順序数です. これを数 0 と考えることにします. 次に $\{\emptyset\}$ は 0 だけを要素とする順序数で, これを数 1 と考えることにします. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ は $\{0, 1\}$ ですが, これも順序数で, これを数 2 と考えることにします. 以下同様に, $0, 1, \ldots, n-1$ まで順序数が得られたとしたら, その全体 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ も順序数で, これが数 n ということになります. このようにどこまでも続けてすべての自然数 $0, 1, \ldots, n, \ldots$ が順序数として得られたら, その全体

$$\omega = \{0, 1, \ldots, n, \ldots\}$$

も順序数で, これは「最初の無限順序数」ということになります. すると $\omega \cup \{\omega\}$ がその次の順序数 $\omega+1$ であり, $\omega \cup \{\omega, \omega+1\}$ が $\omega+2$ であり, 以下同様にどこまでも続いていきます. どの順序数も, 自分より小さい順序数全体の集合になります.

どんな整列集合も, ある一意的な順序数と順序同型になることが示せるので, 順序数は整列集合の順序同型類の完全不変量になります. 整列集合 W に対してそれと順序同型になる一意的な順序数のことを W の順序型といいます.

選択公理によればどんな集合も整列順序づけできるので, 不可算な整列集合は存在します. ということは不可算な順序数が存在します. 最小の不可算な順序数のことを ω_1 と表記します. ω_1 は高々可算な順序数全体の集合と一致します.

選択公理のもとでは, どんな無限集合も ω と等濃度の (濃度 $\aleph_0$ の) 部分集合を含み, どんな不可算集合も ω_1 と等濃度の (濃度 $\aleph_1$ の) 部分集合を含みます. このことから実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の濃度が $\aleph_1$ 以上であることがわかりますが, 順序数と濃度の理論を創始したカントールは, $\mathbb{R}$ の濃度は $\aleph_1$ だろうという予想を残しました. この予想

$$\left|\mathbb{R}\right| = \aleph_1$$

のことを, 連続体仮説といいます. 連続体仮説は ZFC 集合論において証明も反証もできない独立命題であることが知られています.

あとの話でちょっとだけ出てくる一般連続体仮説 GCH についてもついでに述べておきましょう. 実数直線 $\mathbb{R}$ は自然数全体の集合 ω の部分集合全体の集合 (冪集合) $\mathcal{P}(\omega)$ と等濃度であり, したがって ω から 2 への関数全体の集合 ${}^{\omega}2$ と等濃度です. その意味で $\mathbb{R}$ のことを $2^{\aleph_0}$ と書きます. ですから連続体仮説は

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

と表記することもできます. 同様の予想をさらに

$$2^{\aleph_1} = \aleph_2,\ 2^{\aleph_2} = \aleph_3,\ \ldots$$

と続けていくことができます. ここで, 濃度 $\aleph_n$ 以下の順序数全体からなる集合が ω_{n+1} であり, その濃度が $\aleph_{n+1}$ となります. このように次々と大きい濃度をどこまでも作っていくことができ, 各順序数 α に対して α 番目の無限濃度 $\aleph_\alpha$ が存在します. $\aleph_\alpha$ より大きいすぐ次の濃度が $\aleph_{\alpha+1}$ ですが, これと冪集合 $\mathcal{P}(\omega_\alpha)$ の濃度 $2^{\aleph_\alpha}$ がつねに等しいという主張

$$\forall\alpha\bigl(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}\bigr)$$

が一般連続体仮説 GCH です. カントールの連続体仮説はこの主張の $\alpha = 0$ の場合というわけです.

2　エルデシュの定理の証明

この節では, 定理 0 の証明を, 原論文で省略された細部を補いながら述べます.

まず性質 P_0 をもつ不可算な集合 $A \subseteq \mathcal{H}$ の存在を仮定して連続体仮説が成立することを証明します. 性質 P_0 をもつ集合のどんな部分集合もまた性質 P_0 をもつことから, A の濃度は最小の不可算濃度 $\aleph_1$ であると一般性を損わずに仮定できます. $f, g \in A$ かつ $f \neq g$ のとき集合

$$S(f,g) = \{\, z \in \mathbb{C} : f(z) = g(z) \,\}$$

は一致の定理により $\mathbb{C}$ 上どこにも集積点をもたないので, 高々可算集合です. 任意の $z \in \mathbb{C}$ を固定すると, A が不可算, $A(z)$ が高々可算であることから, 対応 A から $A(z)$ への対応 $f \mapsto f(z)$ は 1 対 1 ではありえません. そこで $f \neq g$ かつ $f(z) = g(z)$ となるような $f, g \in A$ が必ず存在します. このとき $z \in S(f,g)$ です. ということは, どの複素数 z もある $f, g \in A$ (ただし $f \neq g$) についての $S(f,g)$ に属するわけで,

$$\mathbb{C} = \bigcup \{\, S(f,g) : f, g \in A, f \neq g \,\}$$

となっています. いま A の濃度は $\aleph_1$ でしたから $f, g \in A$ かつ $f \neq g$ をみたすペア f, g も $\aleph_1$ 組しかありません. その $\aleph_1$ 組の f, g についての可算集合 $S(f,g)$ で $\mathbb{C}$ 全体が覆われるので,

$$|\mathbb{C}| = \left| \bigcup \{\, S(f,g) : f, g \in A, f \neq g \,\} \right| \leq \aleph_1 \cdot \aleph_0 = \aleph_1$$

となります. いっぽう $\mathbb{C}$ は不可算なので $|\mathbb{C}| \geq \aleph_1$ であり, $|\mathbb{C}| = \aleph_1$ となります. すなわち, 連続体仮説が成立します.

次に, 連続体仮説を仮定して性質 P_0 をもつ不可算集合の存在を証明しましょう. 連続体仮説により, $\mathbb{C}$ は順序型 ω_1 に整列されます:

$$\mathbb{C} = \{\, z_0, z_1, \ldots, z_\alpha, \ldots \,\} \quad (\alpha < \omega_1).$$

このような「番号づけ」を固定しておきます. 次に, $\mathbb{C}$ の可算な稠密部分集合 D を何か選んで, これを

$$D = \{ d_0, d_1, \ldots, d_k, \ldots \}$$

のように数列の形に表しておきます. これから順序数 $\alpha < \omega_1$ にかんする超限帰納法によって正則関数 $f_\alpha \in \mathcal{H}$ を選んでいきます. そのさい,

$$\beta < \alpha \text{ ならば } f_\beta(z_\beta) \neq f_\alpha(z_\beta) \text{ かつ } f_\alpha(z_\beta) \in D \tag{1}$$

がつねに成立するように選んでいくことにします. すべての f_α $(\alpha < \omega_1)$ が (1) をみたすように選ばれたなら, f_α たちはすべて互いに異なり, また, すべての $\beta < \omega_1$ について

$$\{ f_\alpha(z_\beta) : \alpha < \omega_1 \} \subseteq \{ f_\alpha(z_\beta) : \alpha \leq \beta \} \cup D$$

となります. あとは $A = \{ f_\alpha : \alpha < \omega_1 \}$ とおくことで, 性質 P_0 をもつ不可算集合 A が得られることになります.

では (1) をみたすように f_α を選んでいく方法を説明します. 順序数 α が与えられていて, 帰納法の仮定としてすべての $\beta < \alpha$ についてすでに f_β が選ばれているものとします. α 未満の順序数は高々可算個しかありませんから, その全体を

$$\alpha = \{ \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots \}$$

と数えあげることができます. (こう言うと α が有限順序数のとき少し困るのですが, α が有限のときに (1) が成立するように f_α を選ぶのはむしろ容易でしょう.)

さて目的の関数 f_α は

$$\begin{aligned} f_\alpha(z) &= a_0 + a_1(z - z_{\beta_0}) + a_2(z - z_{\beta_0})(z - z_{\beta_1}) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cdot \prod_{0 \leq j < n} (z - z_{\beta_j}) \right) \end{aligned} \tag{2}$$

という形で定めます. このようにすれば

$$\begin{aligned} f_\alpha(z_{\beta_0}) &= a_0, \\ f_\alpha(z_{\beta_1}) &= a_0 + a_1(z_{\beta_1} - z_{\beta_0}), \\ &\vdots \end{aligned}$$

となり, その先の a_2, a_3 等々をどう選んでも $f_\alpha(z_{\beta_0})$ と $f_\alpha(z_{\beta_1})$ の値に影響しないわけです. そこで, a_0, a_1, a_2, ... を順に

$$\begin{gathered} f_{\beta_0}(z_{\beta_0}) \neq a_0 \in D, \\ f_{\beta_1}(z_{\beta_1}) \neq a_0 + a_1(z_{\beta_1} - z_{\beta_0}) \in D, \\ f_{\beta_2}(z_{\beta_2}) \neq a_0 + a_1(z_{\beta_2} - z_{\beta_0}) + a_2(z_{\beta_2} - z_{\beta_0})(z_{\beta_2} - z_{\beta_1}) \in D, \\ \vdots \end{gathered}$$

となるように選ぶことができ, 結果として (1) がみたされることになります.

上に述べたように a_n を選んでいくにあたって, 級数 (2) が複素平面全体で収束して正則関数を表すように a_n の大きさを決めねばなりません.[*3]

[*3] ところが困ったことに, 原論文 [2] にはこの部分が一切書いてないのです.

以下そのように a_n が選べることの説明です．$0 \leq j \leq n < \omega$ として，n 個の変数 $X_0, \ldots, X_{n-1}$ の j 次の基本対称式を $S^n_j(X_0, \ldots, X_{n-1})$ と書きましょう．ただし $j = 0$ のときは S^n_0 とは定数 1 のことだとします．すると任意の $z, d \in \mathbb{C}$ に対して

$$\prod_{0 \leq j < n} (z - z_{\beta_j}) = \sum_{j=0}^{n} S^n_j(d - z_{\beta_0}, \ldots, d - z_{\beta_{n-1}})(z - d)^{n-j} \tag{3}$$

となります．各 $n \in \omega$ について

$$R_n = \max\{\, |S^n_j(d_k - z_{\beta_0}, \ldots, d_k - z_{\beta_{n-1}})| : k, j \leq n \,\} \tag{4}$$

としましょう．ここで $D = \{\, d_k : k \in \omega \,\}$ は最初に固定した $\mathbb{C}$ の可算な稠密部分集合です．すると $n \geq k$ かつ $|z - d_k| \leq 1/2$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \prod_{0 \leq j < n} (z - z_{\beta_j}) \right| &\leq \sum_{j=0}^{n} \left| S^n_j(d_k - z_{\beta_0}, \ldots, d_k - z_{\beta_{n-1}})(z - d_k)^{n-j} \right| \\ &\leq R_n \cdot \sum_{j=0}^{n} 2^{-(n-j)} \\ &\leq 2R_n \end{aligned} \tag{5}$$

となります．そこでいま a_n を

$$|a_n| \leq \frac{1}{2^n R_n} \tag{6}$$

となるように選べば，条件 $|z - d_k| \leq 1/2$ のもとで，式 (5) と (6) により

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left| a_n \cdot \prod_{0 \leq j < n} (z - z_{\beta_j}) \right| \leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n+1} = 2^{-k+2}$$

となり，級数 (2) が任意の $k \in \omega$ について閉円板

$$\overline{U}(d_k; \tfrac{1}{2}) = \{\, z : |z - d_k| \leq 1/2 \,\}$$

上で一様収束することがわかります．ところが $D = \{\, d_k : k \in \omega \,\}$ は $\mathbb{C}$ の稠密部分集合だったので，すべての $z \in \mathbb{C}$ は開円板

$$U(d_k; \tfrac{1}{2}) = \{\, z : |z - d_k| < 1/2 \,\}$$

の形の近傍をもちます．ということは，級数 (2) は各 $z \in \mathbb{Z}$ の近傍で一様収束し，その和 $f_\alpha(z)$ は $\mathbb{C}$ 全域で定義された正則関数になります．こうして，定理 0 の証明が完了しました．

3　正則関数のなすポーランド空間

前節まででエルデシュの定理の証明を紹介しました．これからこのエルデシュの定理について記述集合論の観点からコメントを加え，定理 1 から 3 までを証明します．そのために，$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数全体の集合 $\mathcal{H}$ がポーランド空間すなわち完備可分距離空間の構造を持つことを確かめましょう．

正整数 n に対して

$$d_n(f,g) = \sup\{\,|f(z) - g(z)| \,:\, z \in \mathbb{C}, |z| \le n\,\} \quad (f, g \in \mathcal{H})$$

と定めましょう．正則関数に関する一致の定理により, 各 $n \ge 1$ について d_n は $\mathcal{H}$ 上の距離関数になっています．ただし, どの d_n も完備ではありません．というのも, d_n に関する $\mathcal{H}$ 内のコーシー列はいずれも, 閉円盤 $|z| \le n$ 上で連続, 開円板 $|z| < n$ 上で正則であるような関数に収束するものの, その極限関数が $\mathbb{C}$ 全体で定義された正則関数に拡張できる保証はないからです．$\mathcal{H}$ の関数列の極限がふたたび $\mathcal{H}$ に属するためには, その関数列がすべての d_n $(n \ge 1)$ について収束する必要があります．そこで

$$d(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(f,g)}{2^n(1 + d_n(f,g))} \quad (f, g \in \mathcal{H})$$

と定義すれば, d は $\mathcal{H}$ 上の完備な距離関数となります．この d によって定まる $\mathcal{H}$ の位相は, 広義一様収束 (コンパクト一様収束) の位相と一致します．また, この位相は可分な位相でもあります．というのも, 複素有理数 ($\mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ の要素) を係数とする多項式の全体が, $\mathcal{H}$ において稠密な可算集合だからです．

したがって, $\mathbb{C}$ 全域で正則な関数全体の集合 $\mathcal{H}$ は広義一様収束の位相のもとでポーランド空間になっています．

さて, 以下の議論では各々の正則関数を数理論理学でいう「実数」として扱う必要がでてきます．ここで「実数」というのは必ずしも $\mathbb{R}$ の要素という意味での実数ではなくて, 可算無限ビットの情報を保持する対象であれば何でもよいのです．たとえば, いわゆる「実数の集合論」の主要な対象は冪集合 $\mathcal{P}(\omega)$ の部分集合であり, ここでは ω の部分集合のことを「実数」と呼んでいるわけです．また本稿にも関連する「実効的記述集合論」では, ω から ω への関数のことを「実数」と呼んでいます．要するに, 具体的なポーランド空間をひとつ決めて, その個々の点を「実数」と呼んでいることになります．

通常の集合論の定式化では, 関数はある種の順序対の集合です．その解釈を杓子定規に当てはめれば, 正則関数 $f \in \mathcal{H}$ が構成可能的であるためには, f の定義域である $\mathbb{C}$ のすべての要素が構成可能的でなければならず, とりもなおさず, すべての「実数」が構成可能的 ($\mathbb{R} \subset \mathbf{L}$) でなければならなくなります．いっぽう, 本稿では個々の正則関数を「実数」すなわち可算無限ビットの情報の集まりとして扱うことにします．本稿で正則関数 $f \in \mathcal{H}$ を構成可能的であると言った場合, 順序対の集合としての f ではなく, f を定めている可算無限ビットの情報の集まりが構成可能的であるという意味です．具体的には, f を原点 0 においてマクローリン展開して

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots$$

と表したときの係数の列 $\langle\, c_n \,:\, n \in \omega \,\rangle$ が構成可能的であるという意味に捉えればよいのです．

4　射影集合の階層

ポーランド空間 X の部分集合 A について次の (i)–(v) は同値になります．

(i) A はあるポーランド空間 Y のボレル集合 B の連続像である．
(ii) A は無理数空間 $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ の連続像である．
(iii) A は $X \times \mathbb{R}$ のボレル部分集合の射影である．
(iv) 自然数の有限列に添字づけされた X の閉集合の族 $\langle\, F_s \,:\, s \in {}^{<\omega}\omega \,\rangle$ について

$$A = \bigcup_{f \in {}^{\omega}\omega} \bigcap_{n \in \omega} F_{f \restriction n}$$

が成立する.

(v) $X \times \mathbb{Q}$ の閉集合 C について $x \in A \leftrightarrow (\{\, r : \langle x, r\rangle \in C\}$ が整列集合でない $)$ となる.

この同値な条件をみたす A のことを $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合, あるいは解析集合といいます. (i) によればすべてのボレル集合は $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合になります. 逆は一般には正しくありませんが, ポーランド空間 X の部分集合 A がボレル集合であることは, A と補集合 $X \setminus A$ の両方が $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合であることと同値になります. これをススリンの定理といいます.

このように定義された $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合はボレル集合の優れた性質の多くを受けついでいます. たとえばユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合はすべてルベーグ可測です. また, 任意のポーランド空間の $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合は, 可算でなければ不可算なコンパクト部分集合を含み, したがって連続体の濃度をもちます.

ポーランド空間 X において $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合の補集合になっている集合のことを $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合あるいは補解析集合と呼びます. またポーランド空間 X の部分集合 A がある $\mathbf{\Pi}^1_1$ 集合 C の連続像になっているとき, 集合 A を $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 集合と呼びます. 以下同様に, $\mathbf{\Sigma}^1_n$ 集合の補集合を $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合と呼び, $\mathbf{\Pi}^1_n$ 集合の連続像になっている集合のことを $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ 集合と呼びます. こうして得られる部分集合族の系列 $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$ のどれかに属する集合のことを射影集合と呼びます. これら射影集合が, (古典的) 記述集合論の主要な研究対象です.

いっぽう, 定理 1 から定理 3 までの証明のためには, いま定義した射影集合族の実効的記述集合論における対応物が必要になってきます. 話を簡単にするために, 以下ではユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合に話を限って定義を述べますが, 同様の定義はさまざまな (具体的に与えられた) ポーランド空間に適用できます. 詳細は文献 [6] の第 3 章にあります.

実数直線 $\mathbb{R}^n$ の射影集合は, 構造 $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, \omega, <, +, \times)$ に対応する形式言語の論理式で定義できる集合というのと同じことになります. とくに, 定数のパラメータを含まず, しかもすべての量化記号が非負整数の集合 ω に制限されている論理式によって, 構造 $\mathcal{R}$ 上で定義できる集合のことを算術的集合と呼びます. 形式言語の論理式は可算個しかないので, $\mathbb{R}^n$ の算術的集合も可算個しかありません. いま, $\mathbb{R}^{n+1}$ の算術的集合の $\mathbb{R}^n$ への射影として得られる集合のことを Σ^1_1 集合と呼び, その補集合を Π^1_1 集合と呼びます. 一般に Σ^1_n 集合の補集合を Π^1_n 集合と呼び, Π^1_n 集合の射影を Σ^1_{n+1} 集合と呼びます. ここではギリシャ文字が細字体になっていることに注意してください.

つぎに, $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が $\mathbb{R}^{n+1}$ の算術的な部分集合 B と実数 r によって

$$A = \{\, \langle x_1, \ldots, x_n\rangle : \langle r, x_1, \ldots, x_n\rangle \in B \,\}$$

の形で得られるとき, A は r に相対的に算術的であるといいます. r に相対的に算術的な集合の射影を $\Sigma^1_1(r)$ 集合と呼び, その補集合を $\Pi^1_1(r)$ 集合と呼びます. 一般に $\Sigma^1_n(r)$ 集合の補集合を $\Pi^1_n(r)$ 集合と呼び, $\Pi^1_n(r)$ 集合の射影を $\Sigma^1_{n+1}(r)$ 集合と呼びます.

このように定義すると, ユークリッド空間の部分集合が $\mathbf{\Sigma}^1_n$ であることと, ある実数 r について $\Sigma^1_n(r)$ であることとは同値になります.

次に, $\mathbf{\Sigma}^1_n$ でありかつ $\mathbf{\Pi}^1_n$ でもある集合のことを $\mathbf{\Delta}^1_n$ 集合と呼びます. Δ^1_n 集合, $\Delta^1_n(r)$ 集合についても同様に定義します. この定義により, ボレル集合であることと $\mathbf{\Delta}^1_1$ 集合であることとは同値です.

個々の実数あるいは ω の部分集合については, それが $\mathbf{\Sigma}^1_n$ であるとかないとかいうのは意味をもちませんが, 細字の Σ^1_n であるかないかということであれば, ω の部分集合についても意味をもちます. Π^1_n や Δ^1_n についても同様です.

とくに, 実数が Δ^1_1 であることと, 計算可能性理論でいう超算術的実数であることとは同値になり, また実数 r に相対的に超算術的である実数の全体が $\Delta^1_1(r)$ に一致することになります.

5　定理 1 の証明

前節で準備した用語を用いて, 定理 1 の証明を述べることができます. ポーランド空間 X の部分集合 A が $\Sigma^1_1(r)$ であったとき,

(i) A は不可算なコンパクト部分集合を含み, したがって A は連続体の濃度をもつか, または
(ii) A の要素はすべて r に相対的に超算術的で, したがって A は可算である

のいずれかが成立します. 証明は文献 [4] の定理 6.3, あるいは文献 [6] の定理 4F.1 にあります.

上記の (ii) は

$$\forall x[\, x \in A \to x \in \Delta^1_1(r)\,]$$

であり, X の $\Delta^1_1(r)$ 要素の全体が $\Pi^1_1(r)$ 集合であることから, "A が可算である" というステートメントは $\Pi^1_1(r)$ で書けることになります.

次に正則関数からなる $\Sigma^1_1(r)$ 集合 $A \subseteq \mathcal{H}$ について考えると, この A が性質 P_0 をもつことは,

$$\forall z \forall f[\, f \in A \to f(z) \in \Delta^1_1(r, z)\,]$$

と書けることから, これも $\Pi^1_1(r)$ ステートメントです.

ところでわたくしたちはすでにエルデシュの定理を証明してしまったので, 連続体仮説 CH が成立していなければ性質 P_0 をもつ不可算な集合が存在しないことを知っています. いま $\Sigma^1_1(r)$ であるような集合 $A \subseteq \mathcal{H}$ について, A が可算であるというステートメントを Φ_1, A が性質 P_0 をもつというステートメントを Φ_2 とすれば,

$$\neg\mathrm{CH} \to (\Phi_2 \to \Phi_1)$$

となっています. $\Phi_2 \to \Phi_1$ というのは $\Pi^1_1(r)$ ステートメントのブール結合なので $\Sigma^1_2(r)$ ステートメントであり, シェーンフィールドの補題[*4]により, 任意のジェネリック拡大に対して絶対的です. ということは真の宇宙 $\mathbf{V}$ における $\Phi_2 \to \Phi_1$ の真偽と, $\neg$CH を強制するコーエンの半順序によるジェネリック拡大 $\mathbf{V}[G]$ における真偽とは一致することになりますが, $\neg$CH のもとでは $\Phi_2 \to \Phi_1$ は真なので, $\mathbf{V}$ においても真となるわけです. したがってどんな $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ 集合 $A \subseteq \mathcal{H}$ についても, それが性質 P_0 をもつかぎり, 可算でなければならない, つまり定理 1 が成立します.

6　構成可能的集合の宇宙

構成可能的集合の宇宙 $\mathbf{L}$ は 1930 年代の終わりごろにクルト・ゲーデル (Kurt Gödel) が選択公理や連続体仮説の相対的無矛盾性を示すために導入した概念です. この $\mathbf{L}$ をめぐる詳しいことはデブリン (Keith J.Devlin) の文献 [1] で読めますし. 他にも文献 [6] の第 8 章など, いろいろなテキストで紹介されています. ここでは定義まわりのことをざっと紹介します.

[*4] 12 月 8 日のでぃぐさんの記事を参照してください.

順序数 α について L_α という集合を次のとおり再帰的に定義します.[*5]

$$
\begin{aligned}
L_0 &= \emptyset; \\
L_{\alpha+1} &= (L_\alpha, \in) \text{ において 1 階論理式で定義可能な } L_\alpha \text{ の部分集合全体}; \\
L_\delta &= \bigcup_{\alpha<\delta} L_\alpha \quad (\delta \text{ が極限順序数のとき.})
\end{aligned}
$$

このようにして定まる L_α の超限列 $\langle L_\alpha : \alpha \text{ は順序数} \rangle$ のことを構成可能的階層といいます. $\mathbf{L}$ は

$$
\mathbf{L} = \bigcup \{ L_\alpha : \alpha \text{ は順序数} \}
$$

と定義されます. $\mathbf{L}$ に属する集合のことを構成可能的な集合といい, $\mathbf{L}$ のことを構成可能的集合の宇宙とよびます. 集合論研究者界隈では単に「エル」と言えばこの $\mathbf{L}$ のことです. ZFC 集合論の各公理 φ に対してその $\mathbf{L}$ への相対化 $\varphi^{\mathbf{L}}$ が (選択公理を含まない)ZF 集合論において証明可能な定理になっているという意味で, $\mathbf{L}$ は ZFC 集合論の「内部モデル」になっています. また, $(\mathrm{GCH})^{\mathbf{L}}$ が ZF 集合論の定理になるので, ZF 集合論が矛盾を含まない限り選択公理と一般連続体仮説 GCH を追加した ZFC+GCH も矛盾を含まないことがいえる, というのがゲーデルによる相対的無矛盾性証明のあらすじです.

とくに $\mathbf{L}$ においては順序数全体のクラスと順序同型な整列順序づけ $<_L$ が定義可能です. $\mathbf{L}$ は, 単にそこで選択公理が成立するというだけでなく, 整列順序づけや選択関数が定義可能になるという著しい特徴をもっています.

ゲーデルの相対的無矛盾性証明以来, $\mathbf{L}$ は集合論のいろいろな領域で活躍しています. 記述集合論も例外ではありません. ただし, 記述集合論にとって重要な $\mathbf{L}$ の応用を述べるには, 実数 $r \subseteq \omega$ に相対化された構成可能的階層を定義しておいたほうがいいでしょう. 順序数 α について $L_\alpha(r)$ を次のとおり再帰的に定義します. 構成可能的階層とは出発点が異なるだけです.

$$
\begin{aligned}
L_0(r) &= \omega \cup \{r\}; \\
L_{\alpha+1}(r) &= (L_\alpha(r), \in) \text{ において 1 階論理式で定義可能な } L_\alpha(r) \text{ の部分集合全体}; \\
L_\delta(r) &= \bigcup_{\alpha<\delta} L_\alpha(r) \quad (\delta \text{ が極限順序数のとき.})
\end{aligned}
$$

これと同様に一般の集合 A に対して $L_\alpha(A)$ を, $L_0(A) = (A$ を要素にもつ最小の推移的集合 $)$ として定義できます. そのうえで $\mathbf{L}(r)$ や一般の $\mathbf{L}(A)$ を階層全体の合併として定義します. これらは ZF 集合論の内部モデルとなります. 一般の A については $\mathbf{L}(A)$ は選択公理や一般連続体仮説のモデルになるとは限らないのですが, 実数 r の場合は $\mathbf{L}(r)$ は ZFC+GCH の内部モデルになり, クラス $\mathbf{L}(r)$ 全体の整列順序づけが定義できます.

さて, この (相対的) 構成可能的集合の記述集合論への応用として最も重要なのはおそらく次の事実でしょう. 実数全体 $\mathbb{R}$ を整列順序づけする $\mathbf{\Sigma}^1_2$ 順序関係が存在するためには, ある実数 $r \subseteq \omega$ について $\mathbb{R} \subseteq \mathbf{L}(r)$ となることが必要十分です. このような順序関係が存在すればそれは必然的に $\mathbf{\Delta}^1_2$ になります. $\mathbf{\Sigma}^1_1$ や $\mathbf{\Pi}^1_1$ では $\mathbb{R}$ 全体を整列順序づけできないことはルベーグ可測性の議論[*6]などからわかりますが, 射影集合の階層をひとつだけ登った $\mathbf{\Delta}^1_2$ で $\mathbb{R}$ 全体の整列順序づけが (無矛盾性の意味で) 実現できることが, $\mathbf{L}$ の理論からわかる

[*5] 実を言うと $L_{\alpha+1}$ の定義の「1 階論理式で定義可能」ということのきちんとした定式化が少々やっかいです. いずれどこかに詳しく書きます.

[*6] これについても 12 月 8 日のでぃぐさんの記事を参照してください

のです．逆に言えば, ZFC 集合論で証明できる $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ 集合と $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ 集合のルベーグ可測性が $\boldsymbol{\Delta}^1_2$ にまでは (ZFC に留まる限り) 拡張できないこともわかります．

第 8 節の議論のために, クラス $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ と構成可能的階層の関係についても触れておく必要があります．一般に実数 $r \subseteq \omega$ に対して $L_\alpha(r)$ が Δ_0-収集公理図式

$$\forall x \in a \exists y\, \theta(x,y) \to \exists b \forall x \in a \exists y \in b\, \theta(x,y) \quad (\theta \text{ は集合論の } \Delta_0 \text{ 論理式})$$

と無限公理のモデル (許容可能集合) になるような最小の順序数 α のことを ω_1^r と書きます．次の定義に出てくる $\omega_1^{\langle x,r\rangle}$ も同様に定義されます．最小の不可算順序数 ω_1 と見ためは似ていますが, これらは可算順序数にすぎません．実数 $r \subseteq \omega$ についてポーランド空間 X の部分集合 A が $\Pi^1_1(r)$ であるためには, 集合論の Σ_1 論理式 $\varphi(x,y)$ が存在して, すべての $x \in X$ について

$$x \in A \leftrightarrow L_{\omega_1^{\langle x,r\rangle}}(\langle x,r\rangle) \models \varphi(x,r)$$

となることが必要十分です．

7　定理 2 の証明

第 4 節で述べたとおり, ポーランド空間の $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ 部分集合については, それ自身が可算であるか, さもなければ不可算なコンパクト部分集合を含む, という「完全集合定理」が成立します．この完全集合定理は $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ 集合については, あるいは $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ 集合についてすら, そのままでは一般に成立しません．*7 $\boldsymbol{\Sigma}^1_2$ については, 完全集合定理の次のような類似の定理が知られています．

■ **マンスフィールド-ソロヴェイの定理** $r \subseteq \omega$ とする．ポーランド空間 X の $\Sigma^1_2(r)$ 部分集合 A について,

(i) A が不可算なコンパクト部分集合を含むか, あるいは
(ii) A のすべての要素が r に相対的に構成可能的である, すなわち $A \subseteq \mathbf{L}(r)$ である．

このマンスフィールド-ソロヴェイの定理の証明は文献 [4] の第 6 章, あるいは [6] の 8G 節にあります．いま正則関数の集合 $A \subseteq \mathcal{H}$ が $\Sigma^1_2(r)$ で性質 P_0 をもったとすると, A は不可算なコンパクト集合を含まないので, $A \subseteq \mathbf{L}(r)$ が成立します．いまさらに A が不可算であったとすると, エルデシュの指摘するとおり

$$\mathbb{C} = \bigcup \{\, S(f,g) \,:\, f,g \in A,\ f \neq g \,\}$$

となります．ここで $S(f,g)$ は f と g に相対的に算術的なので, とくに $\Sigma^1_2(\langle f,g\rangle)$ です．また $S(f,g)$ は可算でもあるので, ふたたびマンスフィールド-ソロヴェイの定理により $S(f,g) \subseteq \mathbf{L}(\langle f,g\rangle)$ となりますが, いま $A \subseteq \mathbf{L}(r)$ だったので, $f,g \in \mathbf{L}(r)$ したがって $S(f,g) \subseteq \mathbf{L}(r)$ となります．このことから $\mathbb{C} \subseteq \mathbf{L}(r)$ となって, すべての複素数が, ひいてはすべての実数が, r に相対的に構成可能的となるわけです．これが定理 2 の証明です．

8　定理 3 の証明

すべての実数が, したがってすべての複素数も, ある $r \subseteq \omega$ に相対的に構成可能的であると仮定します．すなわち, $\mathbb{C} \subseteq \mathbf{L}(r)$ と仮定します．ここでは記号の節約のために $r = \emptyset$ の場合, すなわち $\mathbb{C} \subseteq \mathbf{L}$ の場合に議論

*7 このことの証明にも $\mathbf{L}$ が用いられます．詳細は文献 [4] などを見てください．

しますが, 一般の場合も同様に考えられます. エルデシュの定理 0 の証明の後半部分を, 仮定 $\mathbb{C} \subseteq \mathbf{L}$ のもとでたどり直すと, アーニィ・ミラー (A.W.Miller) が文献 [5] で用いたトリックを用いて, 性質 P_0 をもつ不可算な Π^1_1 集合を構成できます.

定理 0 の証明で $\mathbb{C}$ 全体を順序型 ω_1 に整列させました. この節の最初に述べたように $\mathbf{L}$ 自体が $<_L$ によって整列順序づけされていますが, 仮定 $\mathbb{C} \subseteq \mathbf{L}$ のもとでは, この $<_L$ の $\mathbb{C}$ への制限が, まさに順序型 ω_1 をもちます. そこで以下では $\mathbb{C}$ が $<_L$ によって

$$\mathbb{C} = \{ z_0, z_1, \ldots, z_\alpha, \ldots \} \quad (\alpha < \omega_1).$$

と整列順序づけされているものとします. また, $\mathbb{C}$ の可算な稠密部分集合 D の数えあげ

$$D = \{ d_0, d_1, \ldots, d_k, \ldots \}$$

は算術的に定義されているものとします. 可算順序数 α の数えあげ

$$\alpha = \{ \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n, \ldots \}$$

については, 可能な数えあげのうち $<_L$ の意味で最小のものを選ぶことにします. このような設定のもとで, エルデシュの定理 0 の証明でやったとおりに正則関数 f_α を定めるのですが, そのさい次のようにひと工夫を加えます. 条件

(1) $$\beta < \alpha \text{ ならば } f_\beta(z_\beta) \neq f_\alpha(z_\beta) \text{ かつ } f_\alpha(z_\beta) \in D$$

と

(6) $$|a_n| \leq \frac{1}{2^n R_n}$$

をみたすように a_n を選ぶにあたって, この条件に合致する a_n の候補は無限に多くあり, そのうちから自由に選ぶことができます. このことを利用すると, 前もって与えられた任意の「実数」すなわち可算無限ビットの情報の並びを f_α に埋め込むことが可能です. そこで, 定理 0 における f_α の構成に必要なすべての情報を f_α 自身に埋め込むことにします. すなわち, 順序数 α とその数えあげ $\langle \beta_n : n \in \omega \rangle$, $\mathbb{C}$ の数えあげの始切片 $\langle z_\beta : \beta \leq \alpha \rangle$, すでに構成された関数の並び $\langle f_\beta : \beta < \alpha \rangle$, といった一切合切をしかるべくコード化して埋め込みます. そうすれば, f_α は自分自身がどのように構成されたのかを「知っている」ことになります. 以上の条件をすべてみたすような f_α の選び方も, やはり無数にありますが, そのうちで $<_L$ の意味で最小のものを選ぶものとします. そうすると, 正則関数 $f \in \mathcal{H}$ がどれかの f_α に一致するためには, f を要素にもつ最小の許容可能集合 $L_{\omega_1^f}(f)$ において, f は f 自身に埋め込まれた情報をデコードして得られるいくつかの要素から「かくかくしかじかの」(つまり定理 0 の証明で述べたとおりの) 手順を踏んで定義可能であり, かつ, その方法で定義可能な $L_{\omega_1^f}(f)$ に属する正則関数のうちで f が $<_L$ の意味で最小のものになっている, ということが必要十分, ということになります. この「かくかくしかじか」の部分が算術的に記述できることにより, 集合論のある Σ_1 論理式 $\psi(v)$ によって

$$\exists \alpha < \omega_1 (f = f_\alpha) \leftrightarrow L_{\omega_1^f}(f) \models \psi(f)$$

となります. このことが $A = \{ f_\alpha : \alpha < \omega_1 \}$ の Π^1_1 での記述を与えてくれることになります.

参考文献

[1] K.J.Devlin, Constructibility, Springer, 1984/Cambridge UP, 2016.

[2] P.Erdős, *An interpolation problem associated with the continuum hypothesis*, Michigan Math. J. **11** (1964), 9–10.

[3] H.Fujita, *Notes on an old theorem of Erdős concerning CH*, 数理解析研究所講究録 **1790** (2012), 10–15; http://hdl.handle.net/2433/172818

[4] R.Mansfield and G.Weitkamp, Recursive Aspects of Descriptive Set Theory, Oxford, 1985.

[5] A.W.Miller, *Infinite combinatorics and Definability*, Ann. Pure Appl. Logic **41**-2 (1989), 179–203.

[6] Y.N.Moschovakis, Descriptive Set Theory (Second Edition), American Mathematical Society 2009.