二重 Ramsey 定理は成立しない

ジタさん (fujitapiroc1964@twitter)

2022 年 12 月 9 日

1　はじめに

おるうぇさん (Alwe_Logic@twitter) の企画なさった数理論理学アドヴェント・カレンダー[*1]に寄稿するために, 2009 年リリースの古いノートを再構成したものです.

2　Ramsey の性質

集合 X の部分集合のうち濃度がちょうど κ であるもの全体のなす集合を $[X]^\kappa$ と書く. と一般的に定義したが, 以下はもっぱら $[\omega]^\omega$ の部分集合の話.

いま $[\omega]^\omega$ にカントール空間 ${}^\omega 2$ の部分空間としての位相を与えたとする. これは $[\omega]^\omega$ の要素をその要素の昇順の数え上げと同一視し ${}^\omega\omega$ の部分空間としての位相を与えたものと同じである. 要するに, 集合 $B \subseteq [\omega]^\omega$ が

$$\forall b \in B \exists k \in \omega \forall x \in [\omega]^\omega \Big[x \cap k = b \cap k \to x \in B \Big]$$

をみたすときに開集合とみなす位相である. このとき $[\omega]^\omega$ は ${}^\omega 2$ の G_δ 部分集合, あるいは ${}^\omega\omega$ の閉部分集合であるから, ポーランド空間である. (じつは $[\omega]^\omega \approx {}^\omega\omega \approx \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.) 以下では, この位相を $[\omega]^\omega$ の 普通の位相と呼ぶ.

さて, 集合 $A \subseteq [\omega]^\omega$ が Ramsey の性質をもつとは, $[a]^\omega \subseteq A$ または $[a]^\omega \cap A = \emptyset$ となるような無限集合 $a \in [\omega]^\omega$ が存在することをいう. 普通の位相に関する Borel 集合は Ramsey の性質をもつ (Galvin と Prikry の定理), また $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合も Ramsey の性質をもつ (Silver の定理), Solovay のモデルにおいては $[\omega]^\omega$ のあらゆる部分集合が Ramsey の性質をもつ (Mathias の定理). この Mathias の定理によれば, Ramsey の性質をもたない集合の存在を示すには選択公理の力が必要だということになる.

Ramsey の性質をもたない集合の典型的な例として Bernstein 集合がある. Bernstein 集合とは, ポーランド空間 X の部分集合であって, X における不可算な閉部分集合すべてと交わるが, しかしどんな不可算な閉部分集合をも含まないような集合のこと. よく知られているとおり, ここで閉部分集合というかわりに, Borel 集合あるいは $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合といっても同じことである. 選択公理があれば, 任意の不可算ポーランド空間が Bernstein 集合をふくむことを, 対角線論法をもちいて示せる.

さて $[\omega]^\omega$ において $[a]^\omega$ の形の集合は ($a \in [\omega]^\omega$ であるかぎり) すべて不可算な閉集合であるから, Bernstein 集合と交わり, しかし Bernstein 集合に含まれない. ゆえに, Bernstein 集合は Ramsey の性質をも

[*1] https://adventar.org/calendars/7465

たない.

次の例は Mathias による. 関数 $f : [\omega]^\omega \to [\omega]^\omega$ を

$$i \in f(x) \leftrightarrow x \cap (i+1) \text{ は奇数個の要素を持つ}$$

によって定義しよう. $x = \{\, x(0) < x(1) < x(2) < \cdots \}$ と昇順に数え上げたとすれば

$$f(x) = \bigcup_{i<\omega} [\, x(2i),\ x(2i{+}1)\, [$$

である. もしも $x, y \in [\omega]^\omega$ かつ 両者の対称差 $x \bigtriangleup y$ がただひとつの要素, 仮に k をもつものとすれば,

$$f(x) \cap f(y) \subseteq k+1, \qquad f(x) \cup f(y) \supseteq \omega \setminus (k{+}1)$$

となる. そこで, U を ω 上の任意の非単項超フィルターとすれば, いつでも $f(x)$ と $f(y)$ の一方 (だけ) が U に属することになる. つまり

$$|x \bigtriangleup y| = 1 \to \bigl(f(x) \in U \leftrightarrow f(y) \notin U\bigr)$$

が成立する. $a_0 \in [\omega]^\omega$ が任意に与えられたとしよう. かりに $f(a_0) \in U$ だったとして, a_0 から順次ひとつずつ要素を抜き去って a_1, a_2,…を作ったとすれば

$$\begin{gathered} f(a_0) \in U \\ f(a_1) \notin U \\ f(a_2) \in U \\ f(a_3) \notin U \\ \vdots \end{gathered}$$

となり, $[a_0]^\omega$ は $f^{-1}(U)$ と交わるがこれに含まれない. $f(a_0) \notin U$ とした場合も同様だ. こうして, ω 上の非単項超フィルターの f のもとでの逆像 $f^{-1}[U]$ は Ramsey の性質をもたない.

先ほど述べたとおり, Ramsey の性質をもたない $[\omega]^\omega$ の部分集合の存在は選択公理をもちいないでは示すことができない. ところがこの性質を多次元化しようとすると, とたんに話が違ってくる.

いま直積 $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ の部分集合 A が, ある $a, b \in [\omega]^\omega$ について

$$([a]^\omega \times [b]^\omega) \subseteq A \quad \text{または} \quad ([a]^\omega \times [b]^\omega) \cap A = \emptyset$$

をみたすとき, A は二重 Ramsey 性を有すると言うことにしよう. Ramsey の性質の, いわば二次元版である. すると, Galvin と Prikry の定理の二次元版を考えることができる. つまり, 直積空間 $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ の任意の Borel 部分集合が二重 Ramsey 性を有するかどうかが問題になる.

あまりもったいぶっても仕方がないのであっさりと答えを言ってしまえば, Borel 集合の二重 Ramsey 性は成立しない. 次の例を考えてみよう. $x, y \in [\omega]^\omega$ として

$$x(m) \le y(n) < x(m+1) \le y(n+1) < x(m+2) \le y(n+2) < \cdots$$

となるような $m, n \in \omega$ が存在するならば $\langle x, y\rangle \in A$, そうでなければ $\langle x, y\rangle \notin A$ として $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ の部分集合 A を定めよう. この A は F_σ 集合, したがって Borel 集合である. どんな集合 $a, b \in [\omega]^\omega$ からも, いままで出してきた数よりも大きな要素を交互に出し合ってそれぞれ無限部分集合をつくることができるから,

$x \in [a]^\omega$ $y \in [b]^\omega$ かつ $\langle x, y\rangle \in A$ をみたす x と y はかならずとれる. ところが, $\langle x, y\rangle$ のとき, 昇順の数え上げで偶数番目の要素を全部 x から取り去って x' を作れば, x' のじゅうぶん大きな二つのあい続く要素の間には y の要素が二つづつ挟まることになるから $\langle x', y\rangle \notin A$, そして次に y の昇順の数え上げで奇数番目の要素をすべて取り去って y' をつくれば, また $\langle x', y'\rangle \in A$ となる. このようにして, $[a]^\omega \times [b]^\omega$ は A と交わり, しかし決して A に含まれることはない. つまり, この A について二重 Ramsey 性は成立しない.

上に例としてあげた集合 A は, $[\omega]^\omega$ に普通の位相より細かい Ellentuck 位相 と呼ばれる位相を与えたときに直積空間 $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ が $[\omega]^\omega$ と同相になるかどうか, という問題への反例として Hocevar によって提示された集合と偶然にも一致する. (Ellentuck 位相は Mathias 強制に対応した位相であり, ω を離散空間と思ったときに ${}^\omega 2$ に与えられる Vietoris 位相とも一致する.) いっぽう, この例と, Ramsey の性質をもたない集合の Mathias の例との類似は, けっして偶然の一致ではない. Mathias の関数 f は明示的に定義された連続関数である. いっぽう, 非単項超フィルターはその存在証明に選択公理の助けを必要とする, いわば超越的な存在である. たとえば Solovay のモデルにはもちろん非単項超フィルターは存在しない. だが, 非単項超フィルターをジェネリック拡大で付け加える方法がある. いま $[\omega]^\omega$ に順序づけ

$$a \subseteq^* b \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} a \setminus b \text{ が有限集合}$$

を与えた半順序 $([\omega]^\omega, \subseteq^*)$ を $\mathbb{P}$ とする. よく知られているとおりこの $\mathbb{P}$ は σ-閉で (したがって ω の新しい部分集合をなにも付け加えず), ジェネリック集合は ω 上の非単項超フィルター (とくに Ramsey 超フィルター) である. $\mathbb{P}$-ジェネリック集合の正統的な $\mathbb{P}$-名前を $\mathcal{U}$ とすれば, $a, b \in [\omega]^\omega$ について

$$a \subseteq^* b \leftrightarrow a \Vdash \check{b} \in \mathcal{U}$$

となる. $\Vdash$ ($\mathcal{U}$ は非単項超フィルター) なので $\Vdash$ ($f^{-1}(\mathcal{U})$ は Ramsey の性質をもたない).

この $f^{-1}(\mathcal{U})$ の $\mathbb{P}$-名前になっている集合を基礎モデルで考えてみる. f の絶対性のおかげで

$$\Big(a \Vdash \check{b} \in f^{-1}(\mathcal{U})\Big) \leftrightarrow \Big(a \Vdash f(\check{b}) \in \mathcal{U}\Big) \leftrightarrow a \subseteq^* f(b).$$

f の定義から

$$a \subseteq^* f(b) \leftrightarrow \exists m \forall i > m \exists j \big(\, b(2j) \le a(i) < b(2j{+}1)\,\big).$$

したがって,

$$\mathcal{B} = \Big\{\, \langle \check{b}, a\rangle \;\Big|\; \exists m \forall i > m \exists j \big(b(2j) \le a(i) < b(2j{+}1)\big) \Big\}$$

によって $\mathbb{P}$-名前 $\mathcal{B}$ を定義すれば $\Vdash \mathcal{B} = f^{-1}(\mathcal{U})$ が成立する. この $\mathcal{B}$ に対応して, 同じ式で定義される $[\omega]^\omega \times [\omega]^\omega$ の部分集合

$$B = \Big\{\, \langle a, b\rangle \;\Big|\; \exists m \forall i > m \exists j \big(b(2j) \le a(i) < b(2j{+}1)\big) \Big\}$$

を考えれば, これもまた二重 Ramsey 性の反例になっている. 先の例は以上の考察に基づき, あと知恵で少し整理して単純化したものである.

以上の例はトリヴィアルなものであるが, 要点はあきらかだろう. 二重 Ramsey 性が $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大における $[\omega]^\omega$ の部分集合の Ramsey 性の基礎モデルにおける表現にほかならない点に注目しよう. $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大における "実数の集合" に起こっていることを, 基礎モデルにおける実数の集合の性質に書き換える, またはその逆をする, ということで新しい結果が生み出せる可能性が, ここに示唆されている.

もうひとつ例をあげると, Borel 集合の Ramsey 性という Galvin と Prikry の定理を A.W.Miller や Todorčević が次の形で多次元化している. B を $[\omega]^\omega \times {}^\omega 2$ の任意の Borel 集合とするとき, $a \in [\omega]^\omega$ と完全集合 P を

$$([a]^\omega \times P) \subseteq B \quad \text{または} \quad ([a]^\omega \times P) \cap B = \emptyset$$

をみたすようにとれる. この B は $\mathbf{\Sigma}^1_1$ 集合でもよいことがわかっているし, Solovay のモデルにおいては $[\omega]^\omega \times {}^\omega 2$ の任意の部分集合でよい. このタイプの多次元化 Ramsey 性を A.W.Miller に従って「パラメータつき Ramsey 性」と呼ぶことにする. すると, $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大における ${}^\omega 2$ の部分集合 E の基礎モデルにおける $\mathbb{P}$-名前が, $[\omega]^\omega \times {}^\omega 2$ の部分集合とみてパラメータ付き Ramsey 性をもつならば, ジェネリック拡大において E または補集合 ${}^\omega 2 \setminus E$ がある完全集合を含む. このことから次の結果が得られる. Solovay のモデルの $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大においては, Ramsey 超フィルターは存在するけれども Bernstein 集合は存在しない. いいかえれば Ramsey 超フィルターの存在は Bernstein 集合の存在を導かない.

実際にはもっと強く, Solovay のモデルの $\mathbb{P}$-ジェネリック拡大においては実数の不可算集合は必ず完全集合を含むということがわかっている (DiPrisco と Todorčević の結果).

参考文献

[1] E.Ellentuck, Journal of Symbolic Logic, **39** (1974) 163–165.

[2] F.Galvin and K.Prikry, Journal of Symbolic Logic, **38** (1973) 193–198.

[3] D.Hocevar, Question and Answers in General Topology, **20** (2002) 33–37.

[4] A.W.Miller, Ann. Pure Appl. Logic **41**-2 (1989), 179–203.