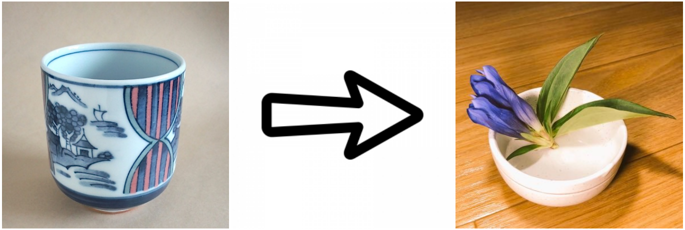
決定公理と無限玉入れ勝敗判定

ジタさん (@fujitapiroc1964)

2018 年 10 月 28 日
第 11 回関西すうがく徒のつどい (大阪大学)

自己紹介

むかしゼルプスト殿下、いまジタさん



話の概要

“米原発 姫路行 普通列車” (高槻から姫路まで快速) みたいに進みます.

決定公理について紹介.

選択公理のない集合論における濃度の概念について再考.

決定公理のもとで実数のすべての集合がルベーグ可測であることの, (マーティンによる比較的新しい) 証明を与える.

主な登場人物

- $\omega := \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\} =$ **最小の無限順序数**.
- $\omega_1 :=$ **可算順序数全体の集合** $=$ **最小の不可算順序数**.
- $\mathbb{R} :=$ **実数全体の集合**.
- $\mathcal{N} := \omega^\omega$, (**自然数の無限列全体**), **ベール空間**.
- $\mathcal{C} := 2^\omega$, (0 **と** 1 **の無限列全体**), **カントール空間**.

主な登場人物

順序数とは? $\cdots\cdots$ **整列順序**の順序構造を「自然数」の拡張と思ったもの.

整列順序とは, 「呼び鈴を押すたびにドアから小さい順に要素が出てくる家」のようなもの.

有限な全順序はすべて整列順序
$\mathbb{N}$ $\cdots$ 整列順序
$\mathbb{Z}$ $\cdots$ 整列順序でない (0 番目の要素が決まらない)
$[0,1]$ $\cdots$ 整列順序でない (1 番目の要素が決まらない)
$1 <^* 3 <^* \cdots <^* 2n+1 <^* \cdots <^* 0 <^* 2 <^* \cdots <^* 2n <^* \cdots$ は?

主な登場人物

集合論的観点からは . . .

$\mathbb{R}$ と $[0,1]$ と $\mathcal{N}$ と $\mathcal{C}$ は，だいたい同じ．**(連続体)**
これらと ω と ω_1 は，それぞれ全然違う．

完全情報無限 2 人ゲーム

2 人のプレイヤー (先手と後手) が交互に自然数を言いあう:

先手 :	x_0		x_2		$\cdots$	x_{2n}		$\cdots$
後手 :		x_1		x_3	$\cdots$		x_{2n+1}	$\cdots$

前もって, 集合 $A \subset \mathcal{N}$ を指定しておいて, 自然数の無限列 $x = (x_0, x_1, \ldots, x_{2n}, x_{2n+1}, \ldots) \in \mathcal{N}$ が $x \in A$ となれば先手の勝ち, $x \notin A$ なら後手の勝ちとする.

先手も後手も, x_k を選ぶ際に集合 A およびそれまでの経過 $x_0, \ldots, x_{k-1}$ を見ることを許される (完全情報).

完全情報無限 2 人ゲーム

先手の戦略 (ストラテジ) とは, $x_1, x_3, \ldots, x_{2n-1}$ をみて x_{2n} を指定してくれる関数

$$\sigma : \omega^{<\omega} \to \omega$$

のこと. ($\omega^{<\omega}$ は自然数の有限列全体 (空列を含む) の集合)

後手の戦略とは, $x_0, x_2, \ldots, x_{2n}$ をみて x_{2n+1} を指定してくれる関数

$$\tau : \omega^{<\omega} \setminus \{\emptyset\} \to \omega$$

のこと.

完全情報無限 2 人ゲーム

先手の戦略 σ と後手の戦略 τ から定まる無限列

$$x_0 = \sigma(\emptyset)$$

$$x_1 = \tau(x_0)$$

$$x_2 = \sigma(x_1)$$

$$x_3 = \tau(x_0, x_2)$$

$$x_4 = \sigma(x_1, x_3)$$

$$x_5 = \tau(x_0, x_2, x_4)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

を $\sigma * \tau$ **と表記**.

完全情報無限 2 人ゲーム

後手がどんな戦略を取っても常に先手を勝利に導く戦略 σ は, A における先手の**必勝法**と呼ばれる:

$$\sigma \text{ が先手の必勝法} \iff \forall \tau [\sigma * \tau \in A]$$

先手がどんな戦略を取っても常に後手を勝利に導く戦略 τ は, A における後手の**必勝法**と呼ばれる:

$$\tau \text{ が後手の必勝法} \iff \forall \sigma [\sigma * \tau \notin A]$$

決定公理

命題 (決定公理 AD)

すべての $A \subset \mathcal{N}$ において，先手または後手の必勝法が存在する．

このタイプの無限ゲームの考察は両大戦間ポーランドのルヴフ学派 (バナッハ，マズール，シュタインハウス，ウラム,...) の (「スコティッシュ・カフェ」での) 知的遊戯に始まる．AC に代わる公理として AD を考察することは，1962 年にシュタインハウスとミチエルスキの共著論文で提案された．巨大基数公理に AD を還元できることが知られた現在では，もはや AD は「公理」ではなく，普通に興味深い命題のひとつの扱い．

決定公理

命題

選択公理 AC のもとでは決定公理は偽.

[証明の概略] **先手の戦略** σ **を固定した** $\{\sigma * \tau \mid \tau$: **後手の戦略** $\}$ **は不可算な閉集合. 同様に後手の戦略** τ **を固定した** $\{\sigma * \tau \mid \sigma$: **先手の戦略** $\}$ **も不可算な閉集合. 連続体を整列させて対角線論法を用いることで, 集合** $A \subset \mathcal{N}$ **を, すべての不可算な閉集合** C **について** $A \cap C \neq \emptyset$ **かつ** $C \not\subset A$ **となるようにとる (このような** A **はベルンシュタイン集合と呼ばれる). すると,** A **において先手も後手も必勝法をもたない.**

このように露骨に AC を使わないと AD の反例は作れない.

決定公理

命題 (従属選択原理 DC)

空でなく極大要素をもたない半順序集合 $(P, \leq)$ からは, 無限上昇列

$$p_0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_n < \cdots$$

を取り出せる.

DC は AC より真に弱いが, 古典的な解析学やルベーグ積分論の展開には十分な強さをもつ. DC と AD の間には現在までのところ何の矛盾もない. 以下, **断りがなければ ZF + DC で議論する**.

$2^{\aleph_0}$ と $\aleph_1$ は比較不可能

完全集合定理 (Davis, 1964), **(AD を仮定)**

実数の任意の不可算集合 $A \subset \mathbb{R}$ **に対して，カントール空間** $\mathcal{C}$ **からの連続な単射** $i\colon \mathcal{C} \rightarrowtail A$ **が存在する**.

[証明の概略] 一般性を損なわず $A \subset [0,1]$ **とする**.

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{(先手)} & I_0 & & I_1 & & \cdots & I_k & & \cdots \\ \text{(後手)} & & J_0 & & J_1 & \cdots & & J_k & \cdots \end{array}$$

I_k **は** $[0,1]$ **に含まれる有理閉区間**,
J_k **は** I_k **の右半分か左半分**, $I_{k+1} \subset J_k$.
$\lim_{k\to\infty} I_k = \lim_{k\to\infty} J_k = x \in A$ **のとき**, **先手の勝ち**.

$2^{\aleph_0}$ と $\aleph_1$ は比較不可能

[証明の概略 (続き)]
先手の必勝法 ⇒ 単射 $i\colon \mathcal{C} \rightarrowtail A$ を構成できる.
後手の必勝法 ⇒ A を含む可算集合を構成できる.
(詳細は省く)

とくに, AD のもとでは, 実数の不可算集合はすべて $\mathbb{R}$ と対等である.

$2^{\aleph_0}$ と $\aleph_1$ は比較不可能

定理

単位閉区間 $I = [0,1]$ の任意の整列順序づけ $<^*$ を単位正方形 I^2 の部分集合とみたとき, $<^*$ はルベーグ不可測集合である.

[証明の概略] $<^*$ が可測であったと仮定して, 切片 $S = \{y | y <^* x\}$ が正測度の可測集合となる最小の x があればそれをとって $E = <^* \cap (S \times S)$ を考える. そのような x がなければ $S = I$ として $E = <^*$ とする. フビニの定理から

$$0 = \int_S m_1(\{y | y <^* t\})\, dt = m_2(E) = \frac{m_2(S \times S)}{2} > 0$$

となって矛盾. (本当はもう少し細かいチェックが必要)

$2^{\aleph_0}$ と $\aleph_1$ は比較不可能

定理 (Mycielski and Świerczkowski, 1964), (**AD を仮定**)

実数のすべての集合はルベーグ可測である.

これについてはあとで証明を与える.

$2^{\aleph_0}$ と $\aleph_1$ は比較不可能

$\mathbb{R}$ に整列可能な不可算部分集合があれば，(完全集合定理により) カントール空間 $\mathcal{C}$ が整列可能になり，($\mathcal{C}$ は $\mathbb{R}$ と対等なので) $\mathbb{R}$ 全体の整列順序づけ $<^*$ が存在する．$<^*$ はルベーグ不可測集合なので，Mycielski と Świerczkowski の定理に矛盾する．したがって，**決定公理 AD のもとでは，$\mathbb{R}$ は不可算な整列可能部分集合を含まない．** すなわち，

$$\text{単射 } \omega_1 \rightarrowtail \mathbb{R}$$

が存在しない．

$2^{\aleph_0}$ と $\aleph_1$ は比較不可能

AD のもとでは, 同じ理由で,

$$\text{単射 } \mathbb{R} \rightarrowtail \omega_1$$

も存在せず, 濃度 $2^{\aleph_0}$ は最小の不可算整列濃度 $\aleph_1$ と比較不可能になっている.

$2^{\aleph_0}$ と $\aleph_1$ は比較不可能

いっぽう, AD の成否によらず,

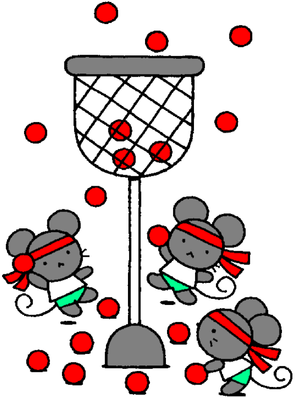
$$\text{全射 } \mathbb{R} \twoheadrightarrow \omega_1$$

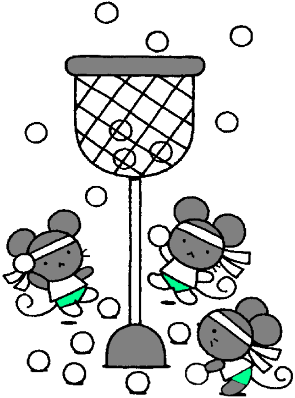
は存在する.

[証明の概略] $\mathbb{Q}$ の冪集合 $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ から ω_1 への全射が存在すればよい. 可算な全順序集合はすべて $(\mathbb{Q}, <)$ へ同型に埋め込めるので, $\mathbb{Q}$ の部分集合のうち通常の大小関係で整列集合になっているものにその順序型を対応させ, 整列集合でないものには 0 を対応させれば, ω_1 への全射ができる.

また, 全射 $\omega_1 \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ は存在しない (単射 $\mathbb{R} \rightarrowtail \omega_1$ の存在を導くから).

玉入れ





無限玉入れ勝敗判定

無限集合の世界の運動会.
玉入れ競技で, 紅組の籠にすべての可算順序数,
白組の籠にすべての実数が入ったとする.

白組は勝つことができるか.

無限玉入れ勝敗判定

玉入れでは, 1 **度に** 1 **個ずつ玉を取り出す作業を**, **相手より長く続けたほうが勝つ**.

●	●	●	⋯	●		**(負け)**
○	○	○	⋯	○	○	**(勝ち)**

作業の繰り返し回数を順序数で測ることにすれば, **籠から** 1 **個づつ玉を取り出すことは**, **籠** (**集合**) **の整列可能部分集合とその整列順序づけを指定することに相当**.

無限玉入れ勝敗判定

玉入れ勝敗判定の数学的定義 (案)

紅組・白組がそれぞれの籠の部分集合とその整列順序づけを指定し，順序型の大きいほうを勝ちとする．

選択公理 AC がある場合

選択公理 AC のもとでは，すべての集合が整列順序づけ可能．
$\mathbb{R}$ は不可算集合．その整列順序づけは長さ ω_1 以上．

連続体仮説 CH が真なら，
紅組と白組は「同じ個数の玉をもつ」
勝ち/負け/引き分け，すべてありうる

CH が偽なら，
順序型 ω_2 の整列可能部分集合があるので，
それを出して白組の勝ち

決定公理 AD の場合

決定公理 AD のもとでは, 単射 $\omega_1 \rightarrowtail \mathbb{R}$ が存在しない.
$\mathbb{R}$ の整列可能部分集合はすべて可算.

白組はどうしても負けてしまう!!

ルールの変更

そこで, 白組がルールの変更を申し出た.

変更されたルール

1 度に 1 個ずつと限らず, 複数 (1 個以上) の玉を同時に出してよいと認めたうえで, 長く出し続けたほうを勝ちとする.

AC のもとでは, この変更は無意味.
AD のもとでも, 紅組 (籠の中身が整列集合) にとってルール変更のメリットはない. (1 個ずつ出すより長くは出せない.)

ルールの変更

白組 (籠の中身が $\mathbb{R}$) にとっては?

全射 $\pi\colon \mathbb{R} \twoheadrightarrow \omega_1$ が存在したことを思い出そう.

可算順序数 $\xi < \omega_1$ に対応して逆像 $\pi^{-1}[\{\xi\}]$ の要素を全部出せば, ω_1 またはそれ以上の長さで, 玉を出し続けることができる.

状況が劇的に変わった!!

ルールの変更

変更前のルール: 籠の整列可能 **部分集合** と, その整列順序づけを指定.

変更後のルール: 籠の整列可能 **商集合** と, その整列順序づけを指定.

では, AD のもとで $\mathbb{R}$ の整列可能な商集合は, どれくらい長くなれるか.

ルールの変更

$\mathbb{R}$ の整列可能商集合の長さの上限を Θ と書く:

$$\Theta = \sup\{\, \lambda \mid \exists \text{ 全射 } \pi\colon \mathbb{R} \twoheadrightarrow \lambda \,\}$$

定義から明らかに Θ は基数 (Θ 未満のどの順序数とも同じ濃度にならない).

AC のもとでは $\Theta = (2^{\aleph_0})^+$.

AD のもとでは Θ は 極めて大きい.

ルールの変更

定理 (Solovay, Moschovakis, et.al.) (**AD を仮定**)

Θ は**正則な極限基数** (弱到達不能基数) である.

正則性: Θ は長さ Θ 未満の狭義上昇列の上限としては得られない.

極限基数: $\lambda < \Theta$ のとき, $\lambda < \kappa < \Theta$ をみたす基数 κ が存在する.

とくに, $\xi < \Theta$ ならば $\omega_\xi < \Theta$ であり, Θ の下に Θ 個の無限基数が存在する.

いっぽう紅組の籠 (最小の不可算基数 ω_1) で同じ操作をしても, 得られるものは次の基数 ω_2 にすぎない.

教訓

AD のもとでは, 集合の濃度の比較に全射を用いることで, 単射による比較とはまったく違う結果が得られる.

(全射による比較のほうが自然な場合がある)

余談

足し算の群 $(\mathbb{R}, +)$ と剰余群 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ を考える.

命題

単射 $\mathbb{R} \rightarrowtail \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ が**存在する**.

命題 (AD を仮定)

単射 $\mathbb{R}/\mathbb{Q} \rightarrowtail \mathbb{R}$ が**存在しない**.

したがって, 単射による濃度の比較の通常の定義にもとづくならば,

$$\mathrm{Card}(\mathbb{R}) < \mathrm{Card}(\mathbb{R}/\mathbb{Q})$$

ということになる.

マーティンの証明

定理 (Mycielski and Świerczkowski, 1964)

AD $\Rightarrow$ **実数のすべての集合はルベーグ可測である.**

1964 **年**: **ミチエルスキとシュヴィエルツコフスキの最初の証明**
1970 **年代**: **レオ・ハーリントンによる別証明** (**被覆ゲーム**)
2003 **年**: **マーティンの公理 MA の中の人トニー・マーティンによる別証明**

マーティンの証明

単位閉区間 $I_\emptyset = [0,1]$ **上のルベーグ外測度と内測度**

$$\mu^*(A) = \inf\{\,\mu(G) \mid G \supset A,\ G\colon \mathrm{open}\,\} : \ \textbf{外測度}$$
$$\mu_*(A) = \sup\{\,\mu(K) \mid K \subset A,\ K\colon \mathrm{closed}\,\} : \ \textbf{内測度}$$

マーティンの証明

有限 2 進列 $p \in 2^{<\omega}$ **に閉区間** I_p **を対応させる**:

$$I_\emptyset = [0, 1]$$

$$I_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad I_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$I_{00} = \left[0, \frac{1}{4}\right], I_{01} = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right], \quad I_{10} = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], I_{11} = \left[\frac{3}{4}, 1\right]$$

$$\vdots$$

2 **進列の長さ** $\ell(p) = n$ **のとき** I_p **の幅** $\mu(I_p) = 2^{-n}$.

無限 2 **進列** $x \in 2^\omega \longmapsto \bigcap_{n\in\omega} I_{x\restriction n} = \{\bar{x}\}$ **をみたす実数** $\bar{x}$.

マーティンの証明

集合 $A \subset I_\emptyset$ **と有理数** v $(0 < v \leqq 1)$ **に対して次のゲームを考える**.
まず $v_0 = v$ **とおいてゲームを開始する**.

先手:	h_0		h_1		$\cdots$	h_i		$\cdots$
後手:		e_0		e_1	$\cdots$		e_i	$\cdots$

$$h_i\colon \{0,1\} \to [0,1] \cap \mathbb{Q}, \qquad e_i \in \{0,1\}.$$

先手の h_i **は** $\frac{1}{2}h_i(0) + \frac{1}{2}h_i(1) \geq v_i$ **をみたさねばならない**.
後手の e_i **は** $h_i(e_i) > 0$ **をみたさねばならない**.
$v_{i+1} = h_i(e_i)$ **とおく**.

マーティンの証明

後手の選んだ無限列 $x = e_0 e_1 \cdots e_i \cdots$ について $\bar{x} \in A$ なら先手の勝ち, $\bar{x} \notin A$ なら後手の勝ち.

先手は $\mu(A) \geq v$ としたい. そこでこの不等式を 2 分割+精密化する $\mu(A \cap I_0) \geq \frac{1}{2} h_0(0)$ と $\mu(A \cap I_1) \geq \frac{1}{2} h_0(1)$ を主張する.

後手はどちらかを選んでチャレンジする. 先手は選ばれたほうの主張をさらに 2 分割し精密化する, 後手はどちらかを選ぶ. 以下同様.

マーティンの証明

各ターンのオプションの個数が可算個なので ω 上のゲームと考える.

AD により, 先手または後手の必勝法が存在する.

マーティンの証明

補題 1

先手の必勝法が存在すれば $\mu_*(A) \geqq v$

補題 2

後手の必勝法が存在すれば $\mu^*(A) \leqq v$

もしも A **が不可測なら** $\mu_*(A) < \mu^*(A)$ **なので有理数** v **を** $\mu_*(A) < v < \mu^*(A)$ **と選べて，補題** 1〜2 **に反する**.

補題 1 の証明

補題 1

先手の必勝法が存在すれば $\mu_*(A) \geqq v$

先手の必勝法 σ **があったとする**. 2 **進有限列** p **が有効かどうかということを**, **帰納的に定義する**.

空列 $\emptyset$ **は有効である**. **長さ** i **の** 2 **進有限列** $p = e_0 e_1 \cdots e_{i-1}$ **が有効だったとする**. **このときの** v_i **すなわち** $h^p_{i-1}(e_{i-1})$ **を** v^p **と呼ぶ**.

$h^p_0, \ldots, h^p_i$ **を** $e_0 e_1 \cdots e_{i-1}$ **から** σ **に従って作ったとする**.
$e \in \{0, 1\}$ **に対し**, $h^p_i(e) > 0$ **なら** $p^\frown(e)$ **は有効**, $h^p_i(e) = 0$ **なら** $p^\frown(e)$ **は無効だとする**. (**無効な列は**, **以後どう延長しても無効**.)

補題 1 の証明

$f: 2^{<\omega} \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$ を

$$\begin{cases} p \text{ が有効のとき } f(p) = v^p \\ p \text{ が無効のとき } f(p) = 0 \end{cases}$$

と定める. p が有効のとき,

$$\frac{1}{2} f(p^\frown(0)) + \frac{1}{2} f(p^\frown(1)) = \frac{1}{2} h_i^p(0) + \frac{1}{2} h_i^p(1) \geq v^0 = f(p)$$

補題 1 の証明

p が無効のときは $f(p) = f(p^\frown(0)) = f(p^\frown(1)) = 0$.
この場合も含めて不等式

$$\frac{1}{2} f(p^\frown(0)) + \frac{1}{2} f(p^\frown(1)) \geqq f(p)$$

はすべての p で成立．帰納法によって

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\ell(p)=n} f(p) \geqq f(0) = v$$

となる．

補題 1 の証明

$$K = \{ \bar{x} \in I_\emptyset \mid x \in 2^\omega, \forall n (x{\restriction}n \colon \textbf{有効}) \}$$

とする．必勝法 σ と整合するようにとったのが有効な列だから，$K \subset A$ である．

$$K_n = \bigcup \{ I_p \mid p \in 2^{<\omega}, \ell(p) = n, \textbf{有効} \}$$

とおくと，$K = \bigcap_{n\in\omega} K_n$．すべての p で $0 \leqq f(p) \leqq 1$ で，無効な p では $f(p) = 0$ なので，

$$\mu(K_n) = \frac{\textbf{長さ } n \textbf{ の有効列の個数}}{2^n} \geq \frac{1}{2^n} \sum_{\ell(p)=n} f(p) \geqq v.$$

したがって $\mu_*(A) \geqq \mu(K) \geqq v$ である．(証明終)

補題 2 の証明

補題 2

後手の必勝法が存在すれば $\mu^*(A) \leqq v$

任意の $\delta > 0$ について $\mu^*(A) \leqq v + \delta$ であることを示す.

後手の必勝法 τ があったとする. 2 進有限列 p が有効かどうかということと, "シミュレートされた先手のオプション" $h_0^p, \dots, h_{i-1}^p$ を, 帰納的に定義する.

補題 2 の証明

空列 $\emptyset$ **は有効である．** $v^{\emptyset}$ **とは** v **のことだとする．**

長さ i **の** 2 **進有限列** $p = e_0 e_1 \cdots e_{i-1}$ **が有効だったとする．対応する** $h_0^p, \ldots, h_{i-1}^p$ **がすでに定まっているとする．** $i > 0$ **なら，このときの** $v_i = h_{i-1}^p(e_{i-1})$ **を** v^p **とする．**

$e \in \{0, 1\}$ **に対して，**

$$u^p(e) = \inf \left\{ h(e) \;\middle|\; h \text{ は第 } 2i \text{ 手に適格}, \tau(h_0^p, \ldots, h_{i-1}^p, h) = e \right\}$$

とおく．(ただし $\inf \emptyset = 1$ **と規約する.)**

補題 2 の証明

$$u^p(e) = \inf\left\{\, h(e) \;\middle|\; h \text{ は第 } 2i \text{ 手に適格}, \tau(h_0^p, \ldots, h_{i-1}^p, h) = e \,\right\}$$

ここで $u^p(e) < 1$ であれば $p^\frown(e)$ を有効とし, 第 $2i$ 手として適格な h のうち $h(e) < u^p(e) + 2^{-(i+1)}\delta$ かつ $\tau(h_0^p, \ldots, h_{i-1}^p, h) = e$ となるものを固定して $h_i^{p^\frown(e)}$ とし, $h_0^p, \ldots, h_{i-1}^p$ をそのまま $h_0^{p^\frown(e)}, \ldots, h_{i-1}^{p^\frown(e)}$ として引き継ぐ. $p^\frown(e)$ が無効となる e については $h^{p^\frown(e)}(0) = h^{p^\frown(e)}(1) = 1$ とする. このケースも含めて不等式

$$u^p(e) \leqq h^{p^\frown(e)}(e) < u^p(e) + \frac{\delta}{2^{i+1}}$$

は成立している.

補題 2 の証明

(シミュレートされた先手のオプション h_i^p は, 適格なもののうちでできるだけ小さい値をとるもの (先手の主張の成立しやすいもの) を選んでいる.)

こうして有限 2 進列の有効・無効と, 対応する h_i^p が決まったとして, $f: 2^{<\omega} \to [0,1] \cap \mathbb{Q}$ を

$$\begin{cases} p \text{ が有効のとき } f(p) = v^p \quad \left(= h^p_{\ell(p)-1}(e_{\ell(p)-1})\right) \\ p \text{ が無効のとき } f(p) = 1 \end{cases}$$

と定める.

補題 2 の証明

p **が有効なとき**,
$$\frac{1}{2}u^p(0) + \frac{1}{2}u^p(1) \leqq v^p$$
である.

($\because$ **そうでなければ** $h(0)$ **と** $h(1)$ **を** $u^p(0) > h(0)$, $u^p(1) > h(1)$, $\frac{1}{2}h(0) + \frac{1}{2}h(1) \geqq v^p$ **となるようにとれる**. $e = \tau(h_0^p, \ldots, h_{i-1}^p, h)$ **とすると** $h(e) < u^p(e)$ **となって** $u^p(e)$ **の定義に矛盾する**.)

補題 2 の証明

p が有効で $\ell(p) = n$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2} f(p^\frown(0)) + \frac{1}{2} f(p^\frown(1)) &= \frac{1}{2} h_n^{p^\frown(0)}(0) + \frac{1}{2} h_n^{p^\frown(1)}(1) \\
&< \frac{1}{2}(u^p(0) + \frac{\delta}{2^{n+1}}) + \frac{1}{2}(u^p(1) + \frac{\delta}{2^{n+1}}) \\
&\leqq v^p + \frac{\delta}{2^{n+1}} = f(p) + \frac{\delta}{2^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

p が無効のときは $f(p) = f(p^\frown(0)) = f(p^\frown(1)) = 1$ なのでこの場合も含めてすべての p で

$$
\frac{1}{2} f(p^\frown(0)) + \frac{1}{2} f(p^\frown(1)) < f(p) + \frac{\delta}{2^{n+1}}.
$$

補題 2 の証明

不等式

$$\frac{1}{2}f(p^\frown(0))+\frac{1}{2}f(p^\frown(1))<f(p)+\frac{\delta}{2^{n+1}}.$$

から帰納法で

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\ell(p)=n}f(p)<v+\frac{2^n-1}{2^n}\delta$$

がわかる.

補題 2 の証明

$$V_n = \bigcup \{\, I_p \mid \ell(p) = n,\ p\colon \textbf{無効}) \,\}$$

とする．もしもすべての n で $x \upharpoonright n$ が有効なら $\bar{x} \notin A$ である．そこで，

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset \cdots,$$

$$A \subset \bigcup_{n \in \omega} V_n$$

となっている．

補題 2 の証明

$\ell(p) = n$ のとき $\mu(I_p) = 2^{-n}$ で, p が無効のとき $f(p) = 1$, 有効のときも $f(p) \leqq 1$ なので,

$$\mu(V_n) = \frac{\text{長さ } n \text{ の無効列の個数}}{2^n} \leqq \frac{1}{2^n} \sum_{\ell(p)=n} f(p) < v + \frac{2^n - 1}{2^n}\delta$$

したがって

$$\mu^*(A) \leqq \mu(\bigcup_{n\in\omega} V_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(V_n) \leqq v + \delta.$$

(証明終)

参考文献

D.A.Martin, *A simple proof that determinacy implies Lebesgue measurability*, Rend. Sem. Mat. Politec. Trino **61** (2003), no.4, 393–397.

Y.N.Moschovakis, **Descriptive Set Theory** (2nd.Ed.), AMS, 2009.

志賀浩二『無限からの光芒』日本評論社, 1988.