ふしぎな極限値を計算しよう

藤田博司 (愛媛大学理学部)

2018 年 11 月 10 日
理学部公開講座

中学生時代のフジタさん

ある本のあるページ

等式

$$1 = 0.999999\cdots$$

は正しいか.

中学生時代のフジタさん

フジタさん (当時 12 歳) の感想

$$1 = 0.999999\cdots$$

中学生時代のフジタさん

フジタさん (当時 12 歳) の感想

$$1 = 0.999999\cdots$$

「こんな面白い式、正しいに決まっている!!」

中学生時代のフジタさん

フジタさん (当時 12 歳) の感想

$$1 = 0.999999\cdots$$

「こんな面白い式、正しいに決まっている!!」

親兄弟に話す

中学生時代のフジタさん

フジタさん (当時 12 歳) の感想

$$1 = 0.999999\cdots$$

「こんな面白い式、正しいに決まっている!!」

親兄弟に話す $\Rightarrow$ 相手にされない

中学生時代のフジタさん

フジタさん (当時 12 歳) の感想

$$1 = 0.999999\cdots$$

「こんな面白い式、正しいに決まっている!!」

親兄弟に話す $\Rightarrow$ 相手にされない

《理屈で説得しよう》

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **の両辺を** 3 **倍すれば**

$1 = 0.999999\cdots$ **になる**.

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$3\overline{)\,1.000\quad\quad}$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$\begin{array}{r} 0. \\ 3\overline{)1.000} \end{array}$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$\begin{array}{r} 0.3 \\ 3\,\overline{)\,1.000} \end{array}$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$\begin{array}{r} 0.3 \\ 3\,\overline{\smash{)}\,1.000} \\ 9 \end{array}$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$\begin{array}{r@{}l} & 0.3 \\ 3 & \overline{)1.000} \\ & 9 \\ \cline{2-2} \end{array}$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$\begin{array}{rl} & 0.3 \\ 3 & \kern-0.5em\big)\overline{1.000} \\ & 9 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array}$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$
\begin{array}{r}
0.3 \\
3\overline{)1.000} \\
\underline{9} \\
10
\end{array}
$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$\begin{array}{rl} & \mathbf{0.33} \\ \mathbf{3} & \overline{\smash{)}\,\mathbf{1.000}} \\ & \mathbf{9} \\ \hline & \mathbf{10} \end{array}$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$\begin{array}{r} 0.33 \\ 3\,\overline{)\,1.000} \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \end{array}$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$
\begin{array}{r@{\,}l}
 & 0.33 \\
\cline{2-2}
3\,\big) & 1.000 \\
 & 9 \\
\cline{2-2}
 & 10 \\
 & 9 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$\begin{array}{r} 0.33 \\ 3\overline{)1.000} \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 1 \end{array}$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$
\begin{array}{r}
0.33 \\
3\,\overline{)\,1.000} \\
\underline{9} \\
10 \\
\underline{9} \\
10
\end{array}
$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$
\begin{array}{r}
0.333 \\
3\,\overline{)\,1.000} \\
9 \\
\hline
10 \\
9 \\
\hline
10
\end{array}
$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$
\begin{array}{r}
0.333 \\
3\overline{)\,1.000} \\
9 \\
\hline
10 \\
9 \\
\hline
10 \\
9
\end{array}
$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$\begin{array}{rl}
 & 0.333 \\
3 & \hspace{-0.8em}\overline{)1.000} \\
 & \underline{9} \\
 & 10 \\
 & \underline{9} \\
 & 10 \\
 & \underline{9}
\end{array}$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$
\begin{array}{r@{}l}
 & 0.333 \\
3 & \overline{)1.000} \\
 & \ \ \ 9 \\ \cline{2-2}
 & \ \ \ 10 \\
 & \ \ \ \ \ 9 \\ \cline{2-2}
 & \ \ \ \ \ 10 \\
 & \ \ \ \ \ \ \ 9 \\ \cline{2-2}
 & \ \ \ \ \ \ \ 1
\end{array}
$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\dfrac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$
\begin{array}{r}
0.333\cdots \\
3\,\overline{)\,1.000} \\
\underline{9} \\
10 \\
\underline{9} \\
10 \\
\underline{9} \\
1 \\
\cdots
\end{array}
$$

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$
\begin{array}{r}
0.333\cdots \\
3\overline{)1.000} \\
9 \\
\hline
10 \\
9 \\
\hline
10 \\
9 \\
\hline
1 \\
\cdots
\end{array}
$$

注意: **この計算は**

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

等式 $\frac{1}{3} = 0.333333\cdots$ **は正しいか…**

$$
\begin{array}{r}
0.333\cdots \\
3\,\overline{)\,1.000} \\
9 \\
\hline
10 \\
9 \\
\hline
10 \\
9 \\
\hline
1 \\
\cdots
\end{array}
$$

注意: **この計算は終わらない**

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

たとえ

$$\frac{1}{3} = 0.3333333\cdots$$

が正しかったとしても,

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

たとえ

$$\frac{1}{3} = 0.3333333\cdots$$

が正しかったとしても, 両辺を 3 倍して

$$1 = 0.999999\cdots$$

にするには,

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

たとえ

$$\frac{1}{3} = 0.3333333\cdots$$

が正しかったとしても, 両辺を 3 倍して

$$1 = 0.999999\cdots$$

にするには, 末尾のケタのない小数のかけ算 をしないといけない.

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

結局, 等式

$$\frac{1}{3} = 0.333333\cdots \quad \text{や} \quad 1 = 0.999999\cdots$$

の正しさの前に,

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

結局, 等式

$$\frac{1}{3} = 0.333333\cdots \quad \text{や} \quad 1 = 0.999999\cdots$$

の正しさの前に, **右辺の意味** がまず問題.

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 1 弾

結局, 等式

$$\frac{1}{3} = 0.333333\cdots \quad \text{や} \quad 1 = 0.999999\cdots$$

の正しさの前に, 右辺の意味 がまず問題.

(あとでこの話題に戻ります)

不思議な数式 その 1

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

不思議な数式 その 1

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

として,

不思議な数式 その 1

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

として, $x - 2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$ **の両辺を** 2 **乗すると**

不思議な数式 その 1

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

として, $x - 2 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$ **の両辺を** 2 **乗すると**

$$\begin{aligned}(x-2)^2 &= 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}} \\ &= x\end{aligned}$$

不思議な数式 その 1

と考えると,

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

となる x は

不思議な数式 その 1

と考えると,

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

となる x は $(x-2)^2 = x$

不思議な数式 その 1

と考えると,

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

となる x は $(x-2)^2 = x$ つまり 2 次方程式

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

の解.

不思議な数式 その 1

と考えると,

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

となる x は $(x-2)^2 = x$ つまり 2 次方程式

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

の解. これを解くと,

$$x = 4 \text{ または } x = 1$$

不思議な数式 その 1

と考えると,

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

となる x **は** $(x-2)^2 = x$ **つまり** 2 **次方程式**

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

の解. **これを解くと**,

$$x = 4 \text{ または } x = 1$$

だけど, $\sqrt{\ } \geqq 0$ **なので** $x \geqq 2$,

不思議な数式 その 1

と考えると,

$$x = 2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots}}}$$

となる x **は** $(x-2)^2 = x$ **つまり** 2 **次方程式**

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

の解. **これを解くと**,

$$x = 4 \text{ または } x = 1$$

だけど, $\sqrt{\ } \geqq 0$ **なので** $x \geqq 2$, **したがって** $x = 4$ **が解**.

不思議な数式 その 2

$$2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{\ddots}}}}$$

不思議な数式 その 2

$$x = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{\ddots}}}}$$

から 2 を引いて 2 で割って

不思議な数式 その 2

$$x = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{\ddots}}}}$$

から 2 を引いて 2 で割って

$$\frac{x-2}{2} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{2}{\ddots}}}} = \frac{1}{x}$$

不思議な数式 その 2

とすると求める x は

不思議な数式 その 2

とすると求める x は

$$\frac{x-2}{2} = \frac{1}{x} \quad \text{つまり} \quad x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \text{の解}$$

なので,

不思議な数式 その 2

とすると求める x は

$$\frac{x-2}{2} = \frac{1}{x} \quad \text{つまり} \quad x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \text{の解}$$

なので，$x = 1 + \sqrt{3}$ または $x = 1 - \sqrt{3}$.

不思議な数式 その 2

とすると求める x は

$$\frac{x-2}{2} = \frac{1}{x} \quad \text{つまり} \quad x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \text{の解}$$

なので, $x = 1 + \sqrt{3}$ または $x = 1 - \sqrt{3}$. ←どっち?

不思議な数式 その 2

とすると求める x は

$$\frac{x-2}{2}=\frac{1}{x} \quad \text{つまり} \quad x^2-2x-2=0 \quad \text{の解}$$

なので, $x=1+\sqrt{3}$ または $x=1-\sqrt{3}$. ←どっち?

ここで "どうも正の数っぽいから $x=1+\sqrt{3}$ が答えだろう" では, 数学にならない.

不思議な数式 その 2

とすると求める x は

$$\frac{x-2}{2}=\frac{1}{x} \quad \text{つまり} \quad x^2-2x-2=0 \quad \text{の解}$$

なので， $x=1+\sqrt{3}$ または $x=1-\sqrt{3}$. ←どっち?

ここで "どうも正の数っぽいから $x=1+\sqrt{3}$ が答えだろう" では，数学にならない． ではどうするか…

不思議な数式 その 3

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

不思議な数式 その 3

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とすると,

不思議な数式 その 3

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とすると, $x = \sqrt{2}^{x}$.

不思議な数式 その 3

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とすると，$x = \sqrt{2}^{x}$. **これは** $x = 2$ **のときと** $x = 4$ **のときに成立**.

不思議な数式 その 3

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とすると，$x = \sqrt{2}^{x}$． **これは** $x = 2$ **のときと** $x = 4$ **のときに成立**.

どっち?

不思議な数式 その 3

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とすると，$x = \sqrt{2}^x$. これは $x = 2$ のときと $x = 4$ のときに成立.

どっち?
他にはないの?

不思議な数式 その 3

$$x = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とすると，$x = \sqrt{2}^x$．　これは $x = 2$ のときと $x = 4$ のときに成立．

どっち?
他にはないの?

式の値がみたす方程式の解を見つけるだけでは十分ではない．

“...” の意味するもの

3 つの数式

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

$$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\ddots}}}}$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

に含まれる “・・・” は,

"…" の意味するもの

3 つの数式

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

$$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\ddots}}}}$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

に含まれる "・・・" は, 何らかの操作の限りない反復の表現.

“. . .” の意味するもの

“・・・” の操作と，その行きつく先を考えること．

“...” の意味するもの

たとえば

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

の場合

"..." の意味するもの

たとえば

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$$

の場合

$$\begin{gathered}2\\2+\sqrt{2}\\2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\\2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\\\vdots\end{gathered}$$

という数の並び (数列) の, "究極の行先" を意味する.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2+\sqrt{a_n} \end{cases}$$

で，すべての自然数 $n=1,2,3,\ldots$ についての a_n が自動的に (芋蔓式に) 決まる.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2 + \sqrt{a_n} \end{cases}$$

で，すべての自然数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ についての a_n が自動的に (芋蔓式に) 決まる.

$$a_1 = 2$$

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2+\sqrt{a_n} \end{cases}$$

で，すべての自然数 $n=1,2,3,\ldots$ **についての** a_n **が自動的に (芋蔓式に) 決まる．**

$$\begin{aligned} a_1 & & &= 2 \\ a_2 &= 2+\sqrt{a_1} & &= 2+\sqrt{2} \end{aligned}$$

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2+\sqrt{a_n} \end{cases}$$

で，すべての自然数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ **についての** a_n **が自動的に (芋蔓式に) 決まる**.

$$\begin{aligned} &a_1 && = 2 \\ &a_2 = 2+\sqrt{a_1} && = 2+\sqrt{2} \\ &a_3 = 2+\sqrt{a_2} && = 2+\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

漸化式

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2+\sqrt{a_n} \end{cases}$$

で，すべての自然数 $n = 1, 2, 3, \ldots$ **についての** a_n **が自動的に (芋蔓式に) 決まる**.

$$\begin{aligned} a_1 & & &= 2 \\ a_2 &= 2+\sqrt{a_1} & &= 2+\sqrt{2} \\ a_3 &= 2+\sqrt{a_2} & &= 2+\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2 + \sqrt{a_n} \end{cases}$$

この数列

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

について考えよう.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

$$\begin{cases} a_1 = 2, \\ a_{n+1} = 2+\sqrt{a_n} \end{cases}$$

この数列

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

について考えよう．まず

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

と増加する数列になっていることを確かめる．

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

確かめたいこと:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

確かめたいこと:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

まず $a_1 = 2,\ a_2 = 2+\sqrt{2}$ **なので** $a_1 < a_2$ **である**.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

確かめたいこと:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

まず $a_1 = 2$, $a_2 = 2+\sqrt{2}$ **なので** $a_1 < a_2$ **である**.
仮に $a_n < a_{n+1}$ **だとすると**,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (2+\sqrt{a_{n+1}}) - (2+\sqrt{a_n}) = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} > 0$$

なので

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

確かめたいこと:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

まず $a_1 = 2,\ a_2 = 2+\sqrt{2}$ **なので** $a_1 < a_2$ **である**.
仮に $a_n < a_{n+1}$ **だとすると**,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (2+\sqrt{a_{n+1}}) - (2+\sqrt{a_n}) = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} > 0$$

なので $a_{n+1} < a_{n+2}$ **が言える**.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

確かめたいこと:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

まず $a_1 = 2$, $a_2 = 2+\sqrt{2}$ **なので** $a_1 < a_2$ **である**.
仮に $a_n < a_{n+1}$ **だとすると**,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (2+\sqrt{a_{n+1}}) - (2+\sqrt{a_n}) = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} > 0$$

なので $a_{n+1} < a_{n+2}$ **が言える**. $a_1 < a_2$ **から** $a_2 < a_3$ **が言え**,

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

確かめたいこと:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

まず $a_1 = 2$, $a_2 = 2+\sqrt{2}$ **なので** $a_1 < a_2$ **である**.
仮に $a_n < a_{n+1}$ **だとすると**,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (2+\sqrt{a_{n+1}}) - (2+\sqrt{a_n}) = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} > 0$$

なので $a_{n+1} < a_{n+2}$ **が言える**. $a_1 < a_2$ **から** $a_2 < a_3$ **が言え**,
$a_2 < a_3$ **から** $a_3 < a_4$ **が言えて**,

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

確かめたいこと:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

まず $a_1 = 2,\ a_2 = 2+\sqrt{2}$ **なので** $a_1 < a_2$ **である**.
仮に $a_n < a_{n+1}$ **だとすると**,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (2+\sqrt{a_{n+1}}) - (2+\sqrt{a_n}) = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} > 0$$

なので $a_{n+1} < a_{n+2}$ **が言える**. $a_1 < a_2$ **から** $a_2 < a_3$ **が言え**,
$a_2 < a_3$ **から** $a_3 < a_4$ **が言えて**, **芋蔓式に**

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots$$

がわかる

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

確かめたいこと:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

まず $a_1 = 2,\ a_2 = 2+\sqrt{2}$ **なので** $a_1 < a_2$ **である**.
仮に $a_n < a_{n+1}$ **だとすると**,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (2+\sqrt{a_{n+1}}) - (2+\sqrt{a_n}) = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} > 0$$

なので $a_{n+1} < a_{n+2}$ **が言える**. $a_1 < a_2$ **から** $a_2 < a_3$ **が言え**,
$a_2 < a_3$ **から** $a_3 < a_4$ **が言えて**, **芋蔓式に**

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots$$

がわかる (この論法を　　　　　　　　　という).

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

確かめたいこと:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots$$

まず $a_1 = 2$, $a_2 = 2+\sqrt{2}$ **なので** $a_1 < a_2$ **である**.
仮に $a_n < a_{n+1}$ **だとすると**,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (2+\sqrt{a_{n+1}}) - (2+\sqrt{a_n}) = \sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_n} > 0$$

なので $a_{n+1} < a_{n+2}$ **が言える**. $a_1 < a_2$ **から** $a_2 < a_3$ **が言え**,
$a_2 < a_3$ **から** $a_3 < a_4$ **が言えて**, **芋蔓式に**

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \cdots$$

がわかる (**この論法を数学的帰納法という**).

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

次に $a_n < 4$ **を確かめる**.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

次に $a_n < 4$ **を確かめる.**

$a_1 = 2$ **だから** $a_1 < 4$ **は確かに成立している.**

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

次に $a_n < 4$ **を確かめる**.

$a_1 = 2$ **だから** $a_1 < 4$ **は確かに成立している**.

仮に $a_n < 4$ **だとすると**,

$$a_{n+1} = 2 + \sqrt{a_n} < 2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$$

なので $a_{n+1} < 4$ **が言える**.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

次に $a_n < 4$ を確かめる.

$a_1 = 2$ だから $a_1 < 4$ は確かに成立している.

仮に $a_n < 4$ だとすると,

$$a_{n+1} = 2 + \sqrt{a_n} < 2 + \sqrt{4} = 2 + 2 = 4$$

なので $a_{n+1} < 4$ が言える.

ここでも芋蔓式に (数学的帰納法によって), すべての番号 n について $a_n < 4$ が言える.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

最後に $4-a_n$ **がどうなるか考える.**

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

最後に $4-a_n$ がどうなるか考える.

まず $4-a_1=2$ である. さらに

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

最後に $4-a_n$ **がどうなるか考える**.

まず $4-a_1=2$ **である**. **さらに**

$$4-a_{n+1}=4-(2+\sqrt{a_n})$$

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

最後に $4-a_n$ がどうなるか考える.

まず $4-a_1=2$ である. さらに

$$\begin{aligned} 4-a_{n+1} &= 4-(2+\sqrt{a_n}) \\ &= 2-\sqrt{a_n} \end{aligned}$$

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

最後に $4-a_n$ **がどうなるか考える**.

まず $4-a_1=2$ **である**. **さらに**

$$\begin{aligned} 4-a_{n+1} &= 4-(2+\sqrt{a_n}) \\ &= 2-\sqrt{a_n} \\ &= \frac{4-a_n}{2+\sqrt{a_n}} \end{aligned}$$

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

最後に $4-a_n$ **がどうなるか考える**.

まず $4-a_1=2$ **である**. **さらに**

$$\begin{aligned}4-a_{n+1} &= 4-(2+\sqrt{a_n}) \\ &= 2-\sqrt{a_n} \\ &= \frac{4-a_n}{2+\sqrt{a_n}} \\ &< \frac{4-a_n}{2}\end{aligned}$$

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

最後に $4-a_n$ **がどうなるか考える**.

まず $4-a_1=2$ **である**. **さらに**

$$
\begin{aligned}
4-a_{n+1} &= 4-(2+\sqrt{a_n}) \\
&= 2-\sqrt{a_n} \\
&= \frac{4-a_n}{2+\sqrt{a_n}} \\
&< \frac{4-a_n}{2}
\end{aligned}
$$

$(4-a_n=(2-\sqrt{a_n})(2+\sqrt{a_n})$ **に注意**$)$

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

最後に $4-a_n$ **がどうなるか考える**.

まず $4-a_1=2$ **である**. **さらに**

$$\begin{aligned}4-a_{n+1} &= 4-(2+\sqrt{a_n}) \\ &= 2-\sqrt{a_n} \\ &= \frac{4-a_n}{2+\sqrt{a_n}} \\ &< \frac{4-a_n}{2}\end{aligned}$$

($4-a_n=(2-\sqrt{a_n})(2+\sqrt{a_n})$ **に注意**)

なので $4-a_{n+1}$ **は** $4-a_n$ **の半分に満たない**.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

以上の考察から

$$0 < 4 - a_n \leqq \frac{1}{2^{n-2}}$$

がわかる.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

以上の考察から

$$0 < 4 - a_n \leqq \frac{1}{2^{n-2}}$$

がわかる. n **をどんどん大きくすると**,

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

以上の考察から

$$0 < 4 - a_n \leqq \frac{1}{2^{n-2}}$$

がわかる．n をどんどん大きくすると，$4 - a_n$ はどんどん小さくなって

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

以上の考察から

$$0 < 4 - a_n \leqq \frac{1}{2^{n-2}}$$

がわかる． n **をどんどん大きくすると，** $4 - a_n$ **はどんどん小さくなってゼロに近づく．**

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

こうして,

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

こうして,

番号 n が大きくなればなるほど,

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

こうして,

番号 n が大きくなればなるほど,
a_n はいくらでも 4 に近づく.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

こうして,

番号 n が大きくなればなるほど,
a_n はいくらでも 4 に近づく.

このことを

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

こうして,

番号 n が大きくなればなるほど,
a_n はいくらでも 4 に近づく.

このことを a_n の極限値は 4 である という.

$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}=4$ を証明する

こうして,

番号 n が大きくなればなるほど,
a_n はいくらでも 4 に近づく.

このことを a_n **の極限値は 4 である** という. これが, 等式

$$2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}=4$$

の意味であると (現代の数学では) 考える.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

第 3 の数式

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とは,

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

第 3 の数式

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とは,

$$\sqrt{2}$$

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

第 3 の数式

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とは,

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

第 3 の数式

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とは,

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$$

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

第 3 の数式

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$$

とは,

$$\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$$

$$\vdots$$

という数列の極限値 (があれば, それ) のことである.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

漸化式

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt{2}, \\ b_{n+1} = \sqrt{2}^{b_n} \end{cases}$$

で決まる数列

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

を考えよう.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

漸化式

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt{2}, \\ b_{n+1} = \sqrt{2}^{b_n} \end{cases}$$

で決まる数列

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

を考えよう.

まず $b_1 = \sqrt{2} < 2$ **であり,**

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

漸化式

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt{2}, \\ b_{n+1} = \sqrt{2}^{b_n} \end{cases}$$

で決まる数列

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

を考えよう.

まず $b_1 = \sqrt{2} < 2$ **であり**, **仮に** $b_n < 2$ **のときには**
$b_{n+1} = \sqrt{2}^{b_n} < \sqrt{2}^2 = 2$ **であるから** $b_{n+1} < 2$ **が言える**.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

漸化式

$$\begin{cases} b_1 = \sqrt{2}, \\ b_{n+1} = \sqrt{2}^{b_n} \end{cases}$$

で決まる数列

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

を考えよう.

まず $b_1 = \sqrt{2} < 2$ **であり，仮に** $b_n < 2$ **のときには**
$b_{n+1} = \sqrt{2}^{b_n} < \sqrt{2}^2 = 2$ **であるから** $b_{n+1} < 2$ **が言える．したがって，数学的帰納法により，すべての番号** n **で** $b_n < 2$ **である.**

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

不足分の $2 - b_n$ の推移を考える.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

不足分の $2 - b_n$ の推移を考える．高校数学の数 III で学ぶとおり

$$(\sqrt{2}^x)' = \sqrt{2}^x \cdot \log \sqrt{2}$$

である．

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

不足分の $2 - b_n$ **の推移を考える．高校数学の数 III で学ぶとおり**

$$(\sqrt{2}^x)' = \sqrt{2}^x \cdot \log \sqrt{2}$$

である．そこで，平均値の定理を用いると

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdots}} = 2$ を証明する

不足分の $2 - b_n$ の推移を考える．高校数学の数 III で学ぶとおり

$$(\sqrt{2}^x)' = \sqrt{2}^x \cdot \log \sqrt{2}$$

である．そこで，平均値の定理を用いると

$$\frac{2 - b_{n+1}}{2 - b_n} = \frac{\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^{b_n}}{2 - b_n} = \sqrt{2}^t \cdot \log \sqrt{2}$$

$$(b_n < t < 2)$$

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdots}} = 2$ を証明する

不足分の $2 - b_n$ **の推移を考える．高校数学の数 III で学ぶとおり**

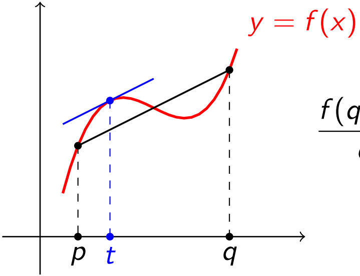
$$(\sqrt{2}^x)' = \sqrt{2}^x \cdot \log\sqrt{2}$$

である．そこで，平均値の定理を用いると

$$\frac{2 - b_{n+1}}{2 - b_n} = \frac{\sqrt{2}^2 - \sqrt{2}^{b_n}}{2 - b_n} = \sqrt{2}^t \cdot \log\sqrt{2}$$
$$(b_n < t < 2)$$

をみたす実数 t **が存在することがわかる．**

補足説明: 平均値の定理について



$$\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = f'(t)$$

ある区間で定義された微分可能な関数 $y = f(x)$ **と**, **区間上の** 2 **点** p, q (**ただし** $p < q$) **に対して**, $p < t < q$, $\dfrac{f(q) - f(p)}{q - p} = f'(t)$ **を みたす** t **がとれる**.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

いま $t < 2$ なので

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

いま $t < 2$ なので $\sqrt{2}^t < \sqrt{2}^2 = 2$ であり,

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

いま $t < 2$ **なので** $\sqrt{2}^t < \sqrt{2}^2 = 2$ **であり**,

$$\frac{2 - b_{n+1}}{2 - b_n} = \sqrt{2}^t \cdot \log \sqrt{2} < 2 \log \sqrt{2} = \log 2$$

となっている.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

いま $t < 2$ なので $\sqrt{2}^t < \sqrt{2}^2 = 2$ であり,

$$\frac{2 - b_{n+1}}{2 - b_n} = \sqrt{2}^t \cdot \log\sqrt{2} < 2\log\sqrt{2} = \log 2$$

となっている. これがすべての番号 n で成立していることと

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

いま $t < 2$ なので $\sqrt{2}^t < \sqrt{2}^2 = 2$ であり，

$$\frac{2 - b_{n+1}}{2 - b_n} = \sqrt{2}^t \cdot \log\sqrt{2} < 2\log\sqrt{2} = \log 2$$

となっている． これがすべての番号 n で成立していることと $2 - b_1 = 2 - \sqrt{2}$ であることから，

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

いま $t < 2$ なので $\sqrt{2}^t < \sqrt{2}^2 = 2$ であり，

$$\frac{2 - b_{n+1}}{2 - b_n} = \sqrt{2}^t \cdot \log \sqrt{2} < 2 \log \sqrt{2} = \log 2$$

となっている． これがすべての番号 n で成立していることと $2 - b_1 = 2 - \sqrt{2}$ であることから，すべての n で

$$0 < 2 - b_n \leqq (\log 2)^{n-1} \cdot (2 - \sqrt{2})$$

である．

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdots}} = 2$ を証明する

いま $t < 2$ なので $\sqrt{2}^t < \sqrt{2}^2 = 2$ であり，

$$\frac{2 - b_{n+1}}{2 - b_n} = \sqrt{2}^t \cdot \log \sqrt{2} < 2 \log \sqrt{2} = \log 2$$

となっている． これがすべての番号 n で成立していることと $2 - b_1 = 2 - \sqrt{2}$ であることから，すべての n で

$$0 < 2 - b_n \leqq (\log 2)^{n-1} \cdot (2 - \sqrt{2})$$

である． $\log 2 = 0.6931\cdots$ であるから，

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

いま $t < 2$ なので $\sqrt{2}^{t} < \sqrt{2}^{2} = 2$ であり,

$$\frac{2 - b_{n+1}}{2 - b_n} = \sqrt{2}^{t} \cdot \log \sqrt{2} < 2 \log \sqrt{2} = \log 2$$

となっている. これがすべての番号 n で成立していることと $2 - b_1 = 2 - \sqrt{2}$ であることから, すべての n で

$$0 < 2 - b_n \leqq (\log 2)^{n-1} \cdot (2 - \sqrt{2})$$

である. $\log 2 = 0.6931\cdots$ であるから, n をどんどん大きくすれば $2 - b_n$ はいくらでもゼロに近づく.

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdots}} = 2$ を証明する

こうして n を大きくすれば b_n がいくらでも 2 に近くなること,

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

こうして n を大きくすれば b_n がいくらでも 2 に近くなること，いいかえれば，b_n **の極限値が** 2 **であること** がわかる．

$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots}}} = 2$ を証明する

こうして n を大きくすれば b_n がいくらでも 2 に近くなること，いいかえれば，b_n の極限値が 2 であること がわかる．これが，等式

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}} = 2$$

の意味である．

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 2 弾

ある本のあるページ

等式

$$1 = 0.999999\cdots$$

は正しいか.

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 2 弾

$0.999999\cdots$ **は**,

$$\begin{gathered} 0.9 \\ 0.99 \\ 0.999 \\ \vdots \end{gathered}$$

を「ずうっと続けたやつ」だとフジタさん (当時 12 歳) は考えた.

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 2 弾

一般に

$$0.\overbrace{999\cdots99}^{n\text{ ケタ}} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

なので，「この数列の極限値は 1」と言えればよかったのだけれど，

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 2 弾

一般に

$$0.\overbrace{999\cdots 99}^{n\text{ ケタ}} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

なので，「この数列の極限値は 1」と言えればよかったのだけれど，そんな言葉を知っているはずもなく．

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 2 弾

一般に

$$0.\overbrace{999\cdots99}^{n\text{ ケタ}} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

なので，「この数列の極限値は 1」と言えればよかったのだけれど，そんな言葉を知っているはずもなく．「ずうっとやってったら最後にはゼロになる」としか言えなかった．

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 2 弾

一般に

$$0.\overbrace{999\cdots99}^{n\ \text{ケタ}} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

なので，「この数列の極限値は 1」と言えればよかったのだけれど，そんな言葉を知っているはずもなく．「ずうっとやってったら最後にはゼロになる」としか言えなかった．

しかし，この数列に最後はない．

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 2 弾

一般に

$$0.\overbrace{999\cdots99}^{n\text{ ケタ}} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

なので，「この数列の極限値は 1」と言えればよかったのだけれど，そんな言葉を知っているはずもなく．「ずうっとやってったら最後にはゼロになる」としか言えなかった．

しかし，この数列に最後はない．だから，差がゼロになる日もこない．

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 2 弾

一般に

$$0.\overbrace{999\cdots99}^{n\text{ ケタ}} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

なので，「この数列の極限値は 1」と言えればよかったのだけれど，そんな言葉を知っているはずもなく．「ずうっとやってったら最後にはゼロになる」としか言えなかった．

しかし，この数列に最後はない．だから，差がゼロになる日もこない．

結局，説得は失敗した

フジタさん (当時 12 歳) の考え 第 2 弾

一般に

$$0.\overbrace{999\cdots 99}^{n\ \text{ケタ}} = 1 - \frac{1}{10^n}$$

なので，「この数列の極限値は 1」と言えればよかったのだけれど，そんな言葉を知っているはずもなく．「ずうっとやってったら最後にはゼロになる」としか言えなかった．

しかし，この数列に最後はない．だから，差がゼロになる日もこない．

結局，説得は失敗した (涙)

実数の連続性について

現代の数学では, 無限小数, たとえば

$$\pi = 3.14159265358979323846 2\cdots$$

とは, 数列

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ \ldots$$

の極限値のことだと考える.

実数の連続性について

現代の数学では，無限小数，たとえば

$$\pi = 3.14159265358979323846 2\cdots$$

とは，数列

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ \ldots$$

の極限値のことだと考える．

だけど

実数の連続性について

現代の数学では，無限小数，たとえば

$$\pi = 3.14159265358979323846 2\cdots$$

とは，数列

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ \ldots$$

の極限値のことだと考える．

だけど**極限値はあるのか？**

実数の連続性について

このような数列の**極限値はあるのか？**

実数の連続性について

このような数列の**極限値はあるのか？**

この疑問点を解消するために, 数のシステム (実数体) を

実数の連続性について

このような数列の**極限値はあるのか？**

この疑問点を解消するために，数のシステム (実数体) を

ワイヤストラスの原理

単調増加で上に有界な数列は，極限値をもつ

実数の連続性について

このような数列の**極限値はあるのか？**

この疑問点を解消するために，数のシステム (実数体) を

ワイヤストラスの原理

単調増加で上に有界な数列は，極限値をもつ

が成り立つように構成することが，現代の数学の出発点のひとつになっている．

実数の連続性について

ワイヤストラスの原理

単調増加で上に有界な数列は，極限値をもつ

実数の連続性について

ワイヤストラスの原理

単調増加で上に有界な数列は，極限値をもつ

数列

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ \ldots$$

はたしかに単調増加数列である.

実数の連続性について

ワイヤストラスの原理

単調増加で上に有界な数列は，極限値をもつ

数列

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ \ldots$$

はたしかに単調増加数列である．また，どこまで行っても数列は 4 **を越えないから，上に有界な数列である．**

実数の連続性について

ワイヤストラスの原理

単調増加で上に有界な数列は，極限値をもつ

数列

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ \ldots$$

はたしかに単調増加数列である．また，どこまで行っても数列は 4 を越えないから，上に有界な数列である．なのでワイヤストラスの原理によって極限値が存在する．

実数の連続性について

ワイヤストラスの原理

単調増加で上に有界な数列は，極限値をもつ

数列

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ \ldots$$

はたしかに単調増加数列である．また，どこまで行っても数列は 4 **を越えないから，上に有界な数列である．なのでワイヤストラスの原理によって極限値が存在する．**

実数体のこの性質を　　　　　という．

実数の連続性について

ワイヤストラスの原理

単調増加で上に有界な数列は，極限値をもつ

数列

$$3,\ 3.1,\ 3.14,\ 3.141,\ 3.1415,\ \ldots$$

はたしかに単調増加数列である．また，どこまで行っても数列は 4 を越えないから，上に有界な数列である．なのでワイヤストラスの原理によって極限値が存在する．

実数体のこの性質を **連続性** という．

まとめ

教訓

まとめ

教訓

1. (無理数を含む) 実数の扱いには無限が必要

まとめ

教訓

1. (無理数を含む) 実数の扱いには無限が必要
2. 数学には実数の連続性が必要

まとめ

教訓

1. (無理数を含む) 実数の扱いには無限が必要
2. 数学には実数の連続性が必要
3. 説得には適切な言葉が必要

まとめ

教訓

1. (無理数を含む) 実数の扱いには無限が必要
2. 数学には実数の連続性が必要
3. 説得には適切な言葉が必要
4. 面白さは正しさの代わりにならない (その逆もだめ)

延長戦: 第 2 の数式のこと

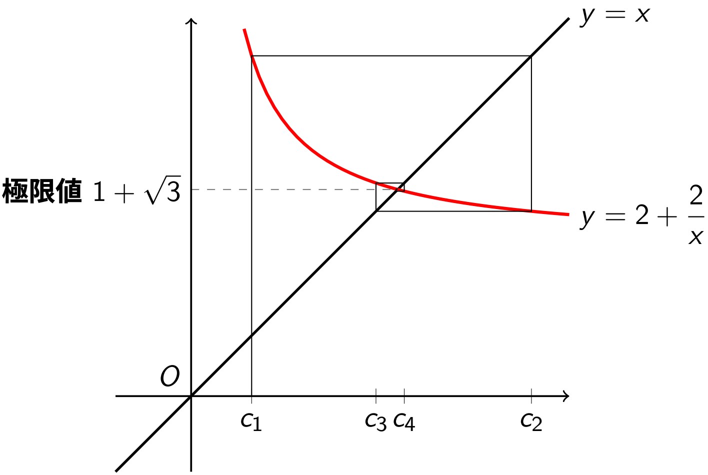
$$2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{2+\cfrac{2}{\ddots}}}$$

数列 $c_1, c_2, c_3, \ldots$ を漸化式

$$\begin{cases} c_1 = 2, \\ c_{n+1} = 2 + \dfrac{2}{c_n} \end{cases}$$

で定め，そのふるまいを調べよう

延長戦: 第 2 の数式のこと



延長戦: 第 2 の数式のこと

数値計算の結果

項	分数	小数	誤差
c_1	$2/1$	2.000000000000000	-7.32×10^{-1}
c_2	$3/1$	3.000000000000000	2.67×10^{-1}
c_3	$8/3$	2.666666666666666	-6.53×10^{-2}
c_4	$11/4$	2.750000000000000	1.79×10^{-2}
c_5	$30/11$	2.727272727272727	-4.77×10^{-3}
c_6	$41/15$	2.733333333333333	1.28×10^{-3}
c_7	$112/41$	2.731707317073171	-3.43×10^{-4}
c_8	$153/56$	2.732142857142857	9.20×10^{-5}
c_9	$418/153$	2.732026143790850	-2.46×10^{-5}
c_{10}	$571/209$	2.732057416267942	6.60×10^{-6}

延長戦: 第 2 の数式のこと

もう一つの解 $1-\sqrt{3}$ の場合,